



Title	可換デナイ Operator Ring ノスペクトル分解ニツイ テ, I
Author(s)	小平, 邦彦
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 245, p. 1439-1476
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75014
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1082. 可換デトイ Operator Ring ノ スペ
クトル分解ニ就イテ, I

小平 邦彦 (東京大理工大)

Hilbert-空間 $\mathcal{H}$ 上 operator ring $\mathcal{M}$ が與ヘラ
レタトキ, $\mathcal{M}$ の center $\mathcal{Z}$ $\mathbb{Z}$ トスレバ, $\mathbb{Z}$ ハーツノ her-
mitic operator H デ生成サレル. 若シユノトキ H が 点

スペクトルノミヲ有ツトラバ $\mathcal{H}$ ノ固有空間 $\mathcal{H}_n$ ノ直和ニ分解サレ, コレニ從ツテ $\mathcal{M}$ ハ "單純" ナ operator ring $\mathcal{M}_n$ ノ直和トナル. コノコトハ $\mathcal{H}$ が連続スペクトルヲモツトキハドウナルデアラウカ? 以下コレヲ考ヘテ見タイ¹⁾

§1. Relative Dimensionality²⁾

1.1. $\mathcal{H}$ (separable +) Hilbert 空間, $\mathcal{M}$ $\mathcal{H}$ 上ノ operator ring トシ, $\mathcal{Z}$ $\mathcal{M}$ ノ center ヲ $\mathbb{Z}$ トスル. $\mathbb{Z} = (\alpha I)$ ノ場合ニハ $\mathcal{M}$ ハ factor ト呼ビレ, J. von Neumann ト Murray = ヨツテ詳シク研究サレテキル. 吾々ハ $\mathcal{Z}$ ノ relative dimensionality, 理論ヲ一般ノ場合ニ拡張スルコトカラ始メル.^{2a)} — 一般ニ $\mathcal{H}$ ノ element f, g 等 $\mathcal{H}$ ノ有限ノ operator A, B 等デ

1) コノ問題ニツイテハ Neumann が On infinite direct products, Comp. Math. 6 (1938) 1 序文デ注意シテキル。

2) コレニツイテハ 前田文友氏ノ論文ガアル: Relative Dimensionality in Operator Rings, Jour. Sci. Hiroshima Univ 11 [1] (1941).

2a) 先ヅ dimension ノコトカラ始メルノハ 角谷氏ノ注意ニヨツテノデアアル. $\mathbb{Z} = (\alpha I)$ ノ場合ノ理論ハ殆んど $\mathcal{Z}$ ノマニ一般ノ場合ニ拡張サレル. 以下述バル理論ハ原理的ニハ J. von Neumann ト Murray ノ理論ノ直接ナル一般化ニ過ギナイガ, 技術的ニハ簡單ニナツテキル所ガアル. 例ヘバ J. von

表ハス。 h_1 / 部分集合 Ω が與ヘラレタトキ, Ω ヲ含ム最小
 1 linear closed manifold $\gamma[\Omega]$ デ表ハシ, 特ニ
 M ト N が, $\perp$ = orthogonal + closed linear manifold
 ナルトキ $[M, N] \gamma M \oplus N$ ト書ク. 又一般ニ closed
 linear manifold $\gamma M, N, \rho, \sigma$ 等, γ / projection
 $\gamma P_M, P_N$ 等, projection operator $\gamma E, F$ 等,
 partially isometric operator $\gamma W, W$ / initial
 及ビ final set γ 夫々 ϕ_W, ψ_W デ現ハス. M / com-
 mutator $\gamma C(M)$ ト書ク.³⁾ ヨク知ラレテキル如ク

$$C(C(M)) = M$$

デアレ.

定義 1.1. $P_M \in M$ ナルトキ $M \wedge M =$ 属スルトイヒ.
 $M \gamma M$ ト書ク.

明ラカニ $M \gamma M$ ナルタメノ必要且ツ充分ナ条件ハ, ス
 ベテノ $A \in C(M) =$ 對シテ $A M \subseteq M$ ナルコトデアレ. 従
 ツテ M_ν ($\nu = 1, 2, \dots$) が $M =$ 属スルナラバ $\sum^\infty M_\nu \in$
 $M \wedge M \gamma M = M =$ 属スル.

定義 1.2. $E, F \in M$ ノトキ, $E = W^* W, F = W W^*$
 ナル W が M 内ニ存在スルナラバ, $E \sim F(M)$, 或ハ

Heumann ト Murray / 理論ニハ unbounded
 operator が現ハレルガ, 吾々, 理論ハ bounded operator
 カケテ快ツテ組立テラレテキル。

3) 通常ハ M / commutator $\gamma M'$ ト書クガ給レ易イカラ
 $C(M)$ トシタ.

$E \sim F$ ト書ク。又 $M, N \in M$ が與ヘラ レタトキ
 $P_M \sim P_N (M)$ ナラバ $M \sim N (M)$, 或ハ $M \sim N$ ト
 書ク。

$M \sim N$ ハ スナハチ $M = \mathcal{B}_W, N = \mathcal{L}_W$ ナル M ノ
 partially isometric operator W が 存在スルコト =
 他ナラナイ。明ラカニ $M \sim N, N \sim P$ ナラバ $M \sim P$ デ
 アル。 $\sim$ ハ スナハチ ツノ 同値關係デアアル。

又容易ニ 示サレル如ク, $M = \Sigma \oplus M_1, N = \Sigma \oplus N_1$
 ナルトキ $M_1 \sim N_1$ ガスベテノ $\sim$ ニツイテ 成立スレバ
 $M \sim N$ デアル。コノ事カテ又, $M \sim P \subseteq N, N \sim Of \subseteq M$
 ナラバ $M \sim N$ ナル事ガ示サレル。⁴⁾ ソコデ吾々ハ $\preceq (M)$ ナ
 ル關係ヲ次ノ如ク定ムル

定義 1.3. $E \sim G (M), G \preceq F$ ナルトキ $E \preceq F (M)$
 ト書ク。又 $M \sim N (M), N \subseteq P$ ナルトキ $M \preceq P (M)$
 ト書ク。

然ルトキハ, $\preceq$ が partially order ノ性質ヲモツ事,
 明ラカデアラウ。—— 任意ノ有界ノ operator A が與ヘラ
 レタトキ, ソノ canonical decomposition $A = WH$
 トスレバ

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_W &= [\text{Range } H] = \mathcal{L}_Y - (f; Hf = 0) \\ &= \mathcal{L}_Y - (f; Af = 0) = [\text{Range } A^*], \\ \mathcal{L}_W &= [\text{Range } A] = \mathcal{L}_Y - (f; A^*f = 0)\end{aligned}$$

4) コノ証明ハ Murray + Heilmann, $\mathbb{Z} = 1$ ノ場合ノ証明ト
 全く同じデアアル。

デアッテ, $A \in M$ + ル $\lambda \neq 0$ $H \in M$, $W \in M$ + ル コ
トが必要且充分デアッル. コノコトカラ直チニ次ノ Lemma
が得ラレル.

Lemma 1.1. $A \in M$ + ル トキハ

$$[\text{Range } A] = \{f; A^*f=0\} \sim \{f; Af=0\} \\ = [\text{Range } A^*]$$

コレヲ用ヒレバ容易ニ次ノ事実が証明セラレル.

Lemma 1.2. $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in M$ + ル トキハ

$$[\mathcal{M}, \mathcal{N}] - \mathcal{N} \sim \mathcal{M} - \mathcal{M} \cap \mathcal{N} \quad (M)$$

証明. $[\mathcal{M}, \mathcal{N}] - \mathcal{N}$ ハ 容易ニ知ラレル如ク $[\text{Range}$
 $P_{\mathcal{M}} - P_{\mathcal{N}}]$ デアル. 故ニ Lemma 1.1. ニヨッテ

$$[\mathcal{M}, \mathcal{N}] - \mathcal{N} \sim \{f; P_{\mathcal{M}} - P_{\mathcal{N}} f = 0\}$$

然ルニ $(f; P_{\mathcal{M}} - P_{\mathcal{N}} f = 0) \wedge (f; P_{\mathcal{M}} f = 0) \Rightarrow (f; P_{\mathcal{N}} f = 0)$
ニ他ナラズ. 故ニ

$$[\mathcal{M}, \mathcal{N}] - \mathcal{N} \sim \mathcal{M} - \mathcal{M} \cap \mathcal{N}. \quad (\text{証明終})$$

定義 1.4. 與ヘラレタ $E \in M$ (或ハ $E \in C(M)$) ニ対シ
テ, $F \geq E$ + ル center $\mathbb{Z}$, projection F , minimal
+ ル E ノ F E , central envelope ト名付ケ, $E_{\mathbb{Z}}$ ア現
ハス.⁵⁾ 又 $\mathcal{M} \in M$ + ル トキ $(P_{\mathcal{M}})_{\mathbb{Z}}$ $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ ト書ク

$\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ ハ従ッテ $\mathbb{Z}$, projection $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ ト書ク.

Lemma 1.3. $A \in M$, $B \in C(M)$, $A \cdot B = 0$ + ラバ
 $B = EB$, $A = A(1-E)$, $E \in \mathbb{Z}$ + ル projection E

5) 前田氏ノ論文ノ定義 2.1 ニヨル.

が存在スル。⁶⁾

証明. $M = (f; AMf=0)$ とおけば明らかに $P_M \in \mathbb{Z}$ であって $AP_M = 0$ である. 又 $g \in L_M^2$ 1 トキ Bg ハ スベテ M = 含コレル. ストハチ $B = P_M B$. 故ニ $E = P_M$ が求ムル projection である.

ユノ重要ナ Lemma カラ次ノ Lemma が導カレル:

Lemma 1.4. M, N 及 M が任意ニ與ヘラレタトキ, M, N 内ニ夫々 $M =$ 属スル closed linear manifold M_1, N_1 ヲ適當ニ選ンデ

$$\begin{cases} M = M_1 \oplus (M - M_1), & N = N_1 \oplus (N - N_1), \\ M_1 \sim N_1 (M), & (M - M_1)_Z (N - N_1)_Z = 0 \end{cases}$$

ナラシメルコトが出来ル.

証明. コレヲ示スニハ $M_Z \cdot N_Z \neq 0$ ナラバ $M \subseteq N$, $N \subseteq M$ デ且ツ $M \sim N (M)$ ナル M, N ($\neq 0$!) が存在スルコトヲ言ヘバヨイ.⁷⁾ コノタメニ $f \in M$, $f \neq 0$ ナル f ヲ任意ニトツテ closed linear manifold $[Mf]$ ヲ考ヘル.⁸⁾ $[Mf] \in C(M)$ デアレカラ, 若シコノデ $[Mf] \wedge N = 0$ ナラバ Lemma 1.3 カラ $P_{[Mf]} = E P_{[Mf]}$, $P_N E = 0$ ナル $E \in \mathbb{Z}$ が存在スル. 従ツテ $1 - E \geq N_Z$ トナルカラ $N_Z f = 0$ デアル.

6) 前田氏: Lemma 2.1.

7) 同上 2.5.

8) $[Mf] = [Af; A \in M]$

故 = スベテ $f \in \mathcal{M} = \text{対シテ } [Mf] \wedge \mathcal{N} = 0$ ナラバ

$\mathcal{M}_2 \cdot \mathcal{N}_2 = 0$ トナツテシマフ。 $[Mf] \wedge \mathcal{N} \neq 0$ ナル $f \in \mathcal{M}$

ガアル場合ニハ $g \in [Mf] \wedge \mathcal{N}$, $g \neq 0$ ナル g フトレバ,

任意 $\epsilon > 0$ = 対シテ $\|Af - g\| < \epsilon$ ナル $A \in M$ ガアル。

$g \in \mathcal{N}$ デアルカラ, コノトキ $\|P_{\mathcal{N}} A P_{\mathcal{M}} f - g\| < \epsilon$ ト

イル。故ツテ ϵ フ充分小サクトツテオケバ $P_{\mathcal{N}} A P_{\mathcal{M}} \neq 0$

デアル。ソコデ $\mathcal{M}_1 = [\text{Range } P_{\mathcal{M}} A^* P_{\mathcal{N}}]$, $\mathcal{N}_1 = [\text{Range}$

$P_{\mathcal{N}} A P_{\mathcal{M}}]$ トオク。然ルトキハ明ラカニ $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{M}_1 \neq 0$,

$\mathcal{N} \supseteq \mathcal{N}_1 \neq 0$ デ, Lemma 1.1 カラ $\mathcal{M}_1 \sim \mathcal{N}_1$ (M) デアル。

定義 1.5. $E \in \mathcal{Z}$ トスル。コノトキ $M = \text{属スル } \mathcal{M}$
ハ $E \mathcal{M} \sim \mathcal{N}$, $\mathcal{N} \neq E \mathcal{M}$ ナル $\mathcal{N}$ が存在スルナラバ E = 於
テ無限デアルト言ヒ, コノマウナ $\mathcal{N}$ が存在シナイナラバ E
= 於テ有限デアルト言フ。特ニ $E = 1$ ナル場合ニハ 單ニ $\mathcal{M}$ ハ
有限デアアル, 或ハ無限デアルト云フ。

明ラカニ $\mathcal{M}$ が E デ有限ナラバ $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ ナル $\mathcal{N}$ ハ スベテ
 E デ有限デアアル。 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ が共ニ E デ有限ナラバ $[\mathcal{M}, \mathcal{N}] \in$
 E デ有限デアアル。コノコトハ証明ヲ要スル。先ッ

Lemma 1.5. $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{Q}$ ナルトキハ

$$E \mathcal{P} \subseteq E \mathcal{M}, (1-E) \mathcal{Q} \subseteq (1-E) \mathcal{N}$$

ナル projection $E \in \mathcal{Z}$ が存在スル。

証明。一般ニ $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ ナルトキ

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^* \oplus \mathcal{P} \cap \mathcal{M} \oplus \mathcal{P} \cap \mathcal{N}$$

トオケバ Lemma 1.1 = ヲ ヴテ

$$[P_M \psi^*] = [\text{Range } P_M \psi^*]$$

$$\sim \text{by } (f; P_M P_M \psi^* f = 0) = \psi^*$$

$$\text{デアル. サテ } \psi \oplus \phi = \eta \oplus \xi \text{ トシ}$$

$$\psi = \psi^* \oplus \psi \wedge \eta \oplus \psi \wedge \xi,$$

$$\phi = \phi^* \oplus \phi \wedge \eta \oplus \phi \wedge \xi$$

トオケル. $\psi \wedge \xi \text{ ト } \phi \wedge \eta = \text{Lemma 1.4} \text{ヲ適用スルバ}$

$$\begin{cases} \psi \wedge \xi = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2, & \mathcal{L}_1 \sim \mathcal{X}_1, \\ \phi \wedge \eta = \mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2, & \mathcal{L}_2 \cdot \mathcal{Y}_2 = 0 \end{cases}$$

ナル関係ヲ成立スル. コノデ $E = \mathcal{Y}_2$ トオケル

$$E(\psi \wedge \xi) = E\mathcal{L}_1, \quad E(\phi \wedge \eta) = E\mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2$$

トナリ. 従フテ, 一般ニ $\mathcal{L} \sim \mathcal{M}$ ナラバ $E \in \mathbb{Z} = \text{對シ}$

テハ $E\mathcal{L} \sim E\mathcal{M}$ ナルカラ, $\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{X}_1$ ナルコトカラ

$$E(\psi \wedge \xi) \leq E(\phi \wedge \eta)$$

ナルコトが分ル. 然ルニ始メニ述べタル如ク $\psi^* \sim [P_M \psi^*]$

デアツテ, 容易ニ確メラレル如ク $[P_M \psi^*], \psi \wedge \eta, \phi \wedge \xi$

ハ互ニ orthogonal デアル. 故ニ

$$E\psi = E\psi^* \oplus E(\psi \wedge \eta) \oplus E(\psi \wedge \xi)$$

$$\leq E[P_M \psi^*] \oplus E(\psi \wedge \eta) \oplus E(\phi \wedge \xi)$$

$$\leq E\mathcal{M}.$$

$1-E$ ニ於テハコレト反對ニ

$$(1-E)(\phi \wedge \eta) \leq (1-E)(\psi \wedge \xi)$$

が成立ツ. 故ニ $(1-E)\phi \leq (1-E)\xi$ デアル.

Lemma 1.6. $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathbb{M}$ が共ニ $F \in \mathbb{Z}$ ニ於テ有

限ナルトキハ和 $\mathcal{Y} = [\mathcal{M}, \mathcal{N}] \in F$ ニ於テ有限デアリ.

証明. $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$ であるから、 $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$ である。故に $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ として一般性を失はない。—— $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus (\mathcal{H} - \mathcal{H}_1)$ であるが Lemma 1.2 によれば $\mathcal{H} - \mathcal{H}_1 \sim \mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_2$ である。従って $\mathcal{H} - \mathcal{H}_1$ は有限である。故に $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ として証明すればよい。今 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ が有限でかつ $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$ と仮定する。

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \quad \mathcal{H} \sim \mathcal{H}_1, \quad \mathcal{H}_2 \neq 0$$

上の分解が可能である。 $\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}$ の間、 $\in \mathbb{M}$ 上の partially isometric 変換 U を取って $\mathcal{H}_1$ の分解 $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3$ を得る。

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4, \quad \mathcal{H} \sim \mathcal{H}_1, \quad \mathcal{H}_2 \sim \mathcal{H}_3 \neq 0$$

上の $\mathcal{H}$ の分解 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_4$ を更に $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_2$ とする。

$$\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_4 = \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4, \quad \mathcal{H}_2 \sim \mathcal{H}_2,$$

$$\mathcal{H}_2 \sim \mathcal{H}_2$$

上の関係が成立つ。故に Lemma 1.5 によつて

$$E(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3) \leq E \mathcal{H}_2,$$

$$(1-E)(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3) \leq (1-E) \mathcal{H}_2$$

上の $E \in \mathbb{Z}$ が存在する。 $E \mathcal{H}_2 \sim E \mathcal{H}_2$, $(1-E) \mathcal{H}_2 \sim (1-E) \mathcal{H}_2$ であるから $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$ が有限であることが仮定によつて

$$E \mathcal{H}_3 = (1-E) \mathcal{H}_3 = 0$$

が成り立つ。然るに $\mathcal{H}_3 \sim \mathcal{H}_2$ であるから

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_3 &= E \mathcal{H}_3 \oplus (1-E) \mathcal{H}_3 \sim E \mathcal{H}_3 \oplus (1-E) \mathcal{H}_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

コレハ $\varphi_1 \sim \varphi_2$ キ $\emptyset = \text{反スル}$ 。

1.2. コノ節デ M = 関スル dimension τ 導入スル。
 $\mathbb{Z}$ = 含マレル projection 全体 / 作ル Boolean algebra $(E)_{\mathbb{Z}}$ ハ, Lebesgue measure m / 定義サ
 レタ空間 Ω τ 適當 = 選ベバ, Ω / 可測集合 / 作ル Boolean
 algebra (Γ) τ null set / 作ル sub-algebra
 (Γ) 。デ割ッタ $\equiv$: $(\bar{\Gamma})/(\Gamma) = \text{isomorphic}$ トナ
 ル。

而モ Ω ハ $m(\Omega) < +\infty$ ナルヲ $\psi = \text{選}$ デコトが出来ル。
 吾々ハ $E \in \mathbb{Z}$ τ コノ isomorphism デ對應スル可測集合
 Γ τ 用ヒテ $E = E(\Gamma)$ ト現スコトニスル。

定義 2.1. $E \in \mathbb{Z}$ トスル。コノトキ $\mathcal{H}^{\circ} \cap M$ ガニッ
 / 條件:

$$\begin{cases} \text{i)} & \mathcal{H}_Z^{\circ} = E \\ \text{ii)} & \mathcal{M}_Z = E \text{ 且ツ } \mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}^{\circ}, \mathcal{M} \cap M \text{ ナラバ } \mathcal{M} = \mathcal{H}^{\circ} \end{cases}$$

τ 満足スルナラバ, $\mathcal{H}^{\circ} \cap E =$ 於テ M = 関シ最小デア
 ルトイフ。コノトキ又 $P_{\mathcal{H}^{\circ}} \cap E =$ 於テ M = 関シ最小デア
 ルトイフ。

E デ最小ナ $\mathcal{H}^{\circ}$ ハ有限デア
 ル。何トナレバ, 一般ニ
 $\mathcal{M} \sim \mathcal{H}$ ナラバ $\mathcal{M}_Z = \mathcal{H}_Z$ デアルカ⁹⁾, $\mathcal{H}^{\circ} \cap \psi \subseteq \mathcal{H}^{\circ}$ ト
 スレバ

9) $P_{\mathcal{M}} = W^*W, P_{\mathcal{H}} = WW^*$ トスレバ $W\mathcal{M}_Z = W$. 故ニ
 $\mathcal{M}_Z \in \mathbb{Z}$ ナカラ $P_{\mathcal{H}} \subseteq \mathcal{M}_Z$. 故ニ $\mathcal{H}_Z \subseteq \mathcal{M}_Z$.
 故ニ $\mathcal{H}_Z = \mathcal{M}_Z$

$\mathcal{N}_Z = \mathcal{N}_Z^\circ = E$, 従ッテ $\mathcal{N} = \mathcal{N}^\circ$ デナケレバナラヌ。

Lemma 2.1. $E, F \in \mathbb{Z}$, $F \leq E$ トスレ。然ルトキハ $\mathcal{M}_Z = E$ ナラバ $(F\mathcal{M})_Z \leq F$ デアル。又 $\mathcal{M}^\circ$ が E デ最小ナラバ $F\mathcal{M}^\circ$ ハ F デ最小デアル。

証明 i) 明カ = $(F\mathcal{M})_Z \leq F$ デアルカ, 一方

$$(F\mathcal{M})_Z + (E-F) \geq P\mathcal{M}$$

モ明カデアル。故ニ $(F\mathcal{M})_Z = F$ デナケレバナラヌ。

ii) $\mathcal{M}_Z = F$, $\mathcal{M} \leq F\mathcal{N}^\circ$ デアツタトスレ。スルト

$$(\mathcal{M} \oplus (E-F)\mathcal{N}^\circ)_Z = E,$$

$$\mathcal{M} \oplus (E-F)\mathcal{N}^\circ \leq \mathcal{N}^\circ$$

故ニ $\mathcal{M} \oplus (E-F)\mathcal{N}^\circ = \mathcal{N}^\circ$ デナケレバナラヌ。両辺ニ F テ掛ケレバ $\mathcal{M} = F\mathcal{N}^\circ$ テ得ル。

Lemma 2.2. $E_j \in \mathbb{Z}$, $E_j \cdot E_k = 0$ ($j \neq k$), $(\mathcal{N}_j)_Z = E_j$ デアツタトシ $E = \sum E_j$, $\mathcal{N} = \sum \mathcal{N}_j$ トオク。然ルトキハ $\mathcal{N}_Z = E$ デアツテ, $\mathcal{N}_j$ が有限ナラバ $\mathcal{N}$ モ有限, $\mathcal{N}_j$ が各 E_j デ最小ナラバ $\mathcal{N} \in E$ デ最小デアイル。

証明. $\mathcal{N}_Z = E$ ハ明ラカデアル。

i) $\mathcal{N}_j$ が有限デアツタトシ, $\mathcal{N} \sim \mathcal{N} \leq \mathcal{N}$ トスレ。

スルト $\mathcal{N}_j = E_j \mathcal{N} \sim E_j \mathcal{N} \leq E_j \mathcal{N} = \mathcal{N}_j$ 故ニ $E_j \mathcal{N} = \mathcal{N}_j$ 。故ニ $\mathcal{N} = \sum E_j \mathcal{N} = \sum \mathcal{N}_j = \mathcal{N}$ 。故ニ $\mathcal{N}$ ハ有限デアイル。

ii) $\mathcal{N}_j$ が E_j デ最小デアイルトスレ。 $\mathcal{M} \leq \mathcal{N}$, $\mathcal{M}_Z = E$ トスレバ $E_j \mathcal{M} \leq \mathcal{N}_j$, $(E_j \mathcal{M})_Z = E_j$ 。故ニ $E_j \mathcal{M}$

$$= \mathcal{R}_{j_0}$$

故に $\mathcal{R} = \sum \oplus E_j \mathcal{R} = \sum \oplus \mathcal{R}_j = \mathcal{R}$. ストハチ $\mathcal{R}$ ハ E デ最小デアル. (証明了)

$E_j \in \mathbb{Z}$ が任意ニ舉ヘラレタトシ, $(\mathcal{R}_j)_\mathbb{Z} = E_j +$
 $\mathcal{R}_j$ デ有限ナルモノガアッタスル. スルト $\mathcal{R}_j$
 ηM ナル submanifold ハヤハリ有限デアルカラ

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \oplus \sum_{j=1}^{\infty} (E_{j+1} - E_1 \vee E_2 \vee \dots \vee E_j) \mathcal{R}_{j+1}$$

トオケバ, Lemma 2.1 ト 2.2 ニヨツテ $\mathcal{R}$ ハ有限デ
 $\mathcal{R}_\mathbb{Z} = \sum \vee E_j$ ノ満足スルコトガ分ル. 特ニ又 $\mathcal{R}_j$ ガ E_j
 $\mathcal{R}$ デ最小ナラバ $\mathcal{R}$ ハ $\sum \vee E_j$ デ最小トナル. コノコトカラ
 $\mathcal{R}_\mathbb{Z} = E$ ナル有限ナル $\mathcal{R}$ ガ存在スル如キ projection
 E ノ最大ナルモノ¹⁰⁾ が存在スルコトガ分ル. コレヲ E_0
 トシ

$$E_\infty = I - E_0.$$

トオク. 然ルトキハ如何ナル $E \leq E_\infty$ ヲトツテモ, $\mathcal{R} \eta M$
 ハ $E \mathcal{R} \neq 0$ ナル限り $E =$ 終テ無限デアル.

次ニ同様ニシテ, $\mathcal{R}_\mathbb{Z}^0 = E$ ナル最小ナル $\mathcal{R}_\mathbb{Z}^0$ ガ存在ス
 ル如キ projection $E(\in \mathbb{Z})$ ノ最大ナルモノ¹⁰⁾ が存在ス

10) コノ様ナ E ヲ $E(\Gamma)$ ト書キ, $m = \sup m(\Gamma)$ トオイテ

$$E_j = E(\Gamma_j) \text{ ヲ, } \Gamma_j \leq \Gamma_{j+1} \text{ 且ツ } \lim m(\Gamma_j) = m \text{ ナル様ニト}$$

レバ $E = \sum \vee E_j$ ハ求ムル最大ナルモノトナル. 或ハ直接超
 限帰納法ヲ使ツテモ証明出来ル.

ルコトが分ル。コレヲ E_I トオク。明ラカニ $E_I \leq E$ 。デ
アル。最後ニ E_{II} ヲ

$$E_{II} = E - E_I$$

ト定義スル。然レトキハ E_{II} = 於テハ $\mathcal{H}_Z = E_{II}$ + レ有限ナ
ルが存在スルカ、如何ナル $E \leq E_{II}$ ヲトッテモ E デ最小
ナルハ存在シナイノデアル。コノヤヲ事情ヲ言ヒ表スタ
トニ次ノ定義ヲオク。

定義2.2. $E \in \mathcal{Z}$ トスル。コノトキ

i) E = 於テ最小ナル $\mathcal{H}^\circ \cap M$ が存在スルナラバ M ハ E
= 於テ I 型デアルトイフ。

ii) $\mathcal{H}_Z = E$ + レ有限ナル $\mathcal{H} \cap M$ が存在スルカ、如何ナル
 $F (\in \mathcal{Z}) \leq E$ ヲトッテモ M が F デ I 型デナイトキ M
ハ E = 於テ II 型ニ属スルトイフ。

iii) E 既キ $\mathcal{O}$ ナル限り如何ナル $\mathcal{H} \cap M \ni E$ = 於テ
無限ナルトキ、 M ハ E = 於テ III 型デアルトイフ。

コノ定義ヲ用ヒレバ上ニ得ラレタ結果ハ次ノ形ニ現ハ
サレル。

定理1. M = 對シテ

$$I = E_I + E_{II} + E_{III},$$

$$E_I E_{II} = E_{II} E_{III} = E_{III} E_I$$

+ レ $\mathcal{Z}$ / projection E_I, E_{II}, E_{III} が定リ、 M ハ $E_I,$
 E_{II}, E_{III} = 於テ夫々 I 型, II 型, III 型ニ属スル

—— コノ E_I, E_{II}, E_{III} = ヨッテ h_N ハ

$$h_N = h_{I} \oplus h_{II} \oplus h_{III}, \quad h_N = E_N h_N \quad (N = I, II, III)$$

1 形 = 分解 せられ。 $M, C(M)$ ハ 共 = h_N = ヨツテ
 $reduce$ せられ。 従ツテ $M, C(M)$ ノ 考へル = ハ 各 h_N ノ 別
 々 = 論 べられヨイ,

定義 2.3. $E \in \mathbb{Z}$, $M, N \in M$ トスル。 コノトキ
 $E M \subseteq E N$ デアツテ, $0 < F \subseteq E$, 且 $F \in \mathbb{Z}$ ナルスベテ,
 F = ツイテ $F M \subset F N$ ナラバ

$$M \subseteq N$$

ト書ク。

明カ = $M \subseteq N$ ナラバ $E N \subseteq E M$ = E アツル。 — $M,$
 $N \in M$ が 任意 = 與へられタトスルト, M, N ハ Lemma
 1.4 = ヨツテ

$$\begin{cases} M = M_1 \oplus \mathcal{P}, & N = N_1 \oplus \mathcal{Q}, \\ M_1 \sim N_1 (M), & \mathcal{P}_2 \cdot \mathcal{Q}_2 = 0 \end{cases}$$

1 形 = 分解 せられ。 $\mathcal{Q}_2 \subseteq E$, $1 - E = F$ トオケル, $E =$
 於テハ

$$E M = E M_1, \quad E N = E N_1 \oplus \mathcal{Q}_1,$$

$$E M_1 \sim E N_1,$$

F = 於テハ

$$F M = F M_1 \oplus \mathcal{P}, \quad F N = F N_1,$$

$$F M_1 \sim F N_1,$$

デアル。 従ツテ

$$E M \subseteq E N, \quad F N \subseteq F M$$

が 成立スル。 特 = N が 有限 / 場合 = ハ

$$E M \subseteq E N$$

デアル。何トナレバ $0 < E, \leq E, E, M \sim E, \gamma \leq + \text{ル } E, \text{ガア}$
ツタトスレバ

$$E, M, \sim E, \gamma, \oplus E, \theta$$

トナレバ, 一方 $E, M, \sim E, \gamma, \text{デ } E, \gamma, \text{ハ有限デアル。故ニ}$
 $E, \theta = 0 \text{ ナナレバナラナイガ, コレハ } \theta_z = E = \text{反スル。}$
結果ヲマツテ言ハバ:

Lemma 2.3. $M, \gamma \in M$ トスル

$$E M \leq E \gamma, (1-E) \gamma \leq (1-E) M$$

ナレバ, projection E が存在スル 特ニ γ が有限
ノ場合ニハ, コノ E ヲ $M \leq \gamma + \text{ル } \times \text{ウニ選ガコトが}$
出
来ル。

Lemma 2.4. $M, \gamma \in M$ 且ツ γ ハ有限トスル。

然ルトキハ $\gamma_z \in \mathbb{Z} = \text{於テ}$

$$\gamma_z = E_\infty + \sum_{n=0}^{\infty} E_n, \quad E_n E_m = 0$$

$$(0 \leq n < m \leq \infty)$$

ノ形ニ分解ナレバ, $E_n (n < +\infty) = \text{於テハ } M$ ハ

$$\begin{cases} E_n M = \underbrace{\psi_n^1 \oplus \psi_n^2 \oplus \dots \oplus \psi_n^n}_{n \text{ 個}} \oplus \theta_n, \\ \psi_n^i \sim E_n \gamma, \quad \theta_n \leq_{E_n} E_n \gamma \end{cases}$$

ト現ハナレバ, $E_\infty = \text{於テハ}$

$$E_\infty M = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_\infty^j, \quad \psi_\infty^j \sim E_\infty \gamma$$

ガ成立スル。 γ_z ノコノ様ニ分解ハ唯一ニ限ル。

証明. $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0$, $\mathcal{N} = \mathcal{N}_0$. トオキ, コレ = ツイテ

Lemma 2.3. 7 適用シテ E, F, G ヲ定メ,

$$E_0 = \mathcal{N}_{Z_1} E, \quad F_0 = \mathcal{N}_{Z_1} (1 - E)$$

= ヨツテ E_0, F_0 ヲ定メル. 然レトキハ 明ラカ =

$$\begin{cases} \mathcal{N}_Z = E_0 + F_0 \\ E_0 \mathcal{M}_0 \leq_{E_0} E_0 \mathcal{N}_0 \\ F_0 \mathcal{M}_0 \geq_{F_0} F_0 \mathcal{N}_0 \end{cases}$$

デアル. ソコデ $\sigma_0, \psi', \mathcal{M}_1, \mathcal{N}_1$ 7

$$\begin{cases} \sigma_0 = E_0 \mathcal{M}_0; \\ F_0 \mathcal{M}_0 = \psi' \oplus \mathcal{M}_1, \quad \psi' \sim F_0 \mathcal{N}_0; \\ \mathcal{N}_1 = F_0 \mathcal{N}_0 \end{cases}$$

= ヨツテ定メル. 然レトキハ 明ラカ =

$$(\mathcal{N}_1)_Z = F_0$$

デアル. ———— コノカラ始メテ $E_n, F_n, \sigma_n, \psi^{n+1}, \mathcal{M}_{n+1},$

$\mathcal{N}_{n+1}$, 7 帰納法 = ヨツテ順次 = 定義シテ行ク. スナハチ

$\mathcal{M}_n, \mathcal{N}_n = \text{Lemma 2.3}$ 7 適用シテ E 7 定メ, コノ E

ヲ用ヒテ

$$\begin{cases} E_n = (\mathcal{N}_n)_Z E \\ F_n = (\mathcal{N}_n)_Z - E_n \end{cases}$$

= ヨツテ E_n, F_n 7 定義シ,

$$\begin{cases} \sigma_n = E_n \mathcal{M}_n \\ \mathcal{N}_{n+1} = F_n \mathcal{N}_n \end{cases}$$

トオク. ソシテ

$$F_n \mathcal{M}_n = \psi^{n+1} \oplus \mathcal{M}_{n+1}, \quad \psi^{n+1} \sim F_n \chi_n$$

ニヨツテ ψ^{n+1} , $\mathcal{M}_{n+1}$ ヲ定義スル。カクノ如ク進ンデ行
ツテ 最後ニ

$$\begin{cases} E_\infty = \prod_{n=0}^{\infty} F_n, \\ \mathcal{M}_\infty = \prod_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}_n \end{cases}$$

トオケ。然ルトキハ 容易ニ確メラレル如ク

$$\begin{cases} \chi_z = E_\infty + \sum_{n=0}^{\infty} E_n, \\ \chi_z \mathcal{M} = \mathcal{M}_\infty \oplus \sum_{n=1}^{\infty} \psi^n \oplus \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n \end{cases}$$

デアツテ,

$$\begin{cases} \psi^{n+1} \sim F_n \chi_n, \\ \sigma_n \leq_{E_n} E_n \chi \end{cases}$$

ナリ關係ハ成立スル。故ニ $n < +\infty$ ニ對シテハ

$$\psi_n^j = E_n \psi^j \quad (1 \leq j \leq n)$$

トオケバ

$$\begin{cases} E_n \mathcal{M} = \psi_n^1 \oplus \psi_n^2 \oplus \dots \oplus \psi_n^n \oplus \sigma_n, \\ \psi_n^j \sim E_n \chi, \quad \sigma_n \leq_{E_n} E_n \chi \end{cases}$$

コレデ E_n ($n < +\infty$) ノ部分ニツイテハ証明出来クコト
ニナル。

$E_\infty = \text{對シテハ}$

$$E_\infty M = M_\infty \oplus \sum_{n=1}^{\infty} \oplus E_\infty \psi^n$$

デアッテ

$$E_\infty \psi^n \sim E_\infty \gamma$$

ナリ関係が成リ立ッ。然ルニ上ノ γ_2, M ノ分解ノ式ニ於テ $\psi^n \leq \gamma$, $\sum \oplus \psi^n \leq \gamma$ デアルカラ、一般ニ γ_2, M ハ

$$\gamma_2, M = M_\infty \oplus \sum_{n=1}^{\infty} \oplus L^n, \quad L^n \leq \gamma$$

ノ形ニ現ハサレルコトカ分ル。從ッテ超限帰納法ヲ使ッテ M_∞ ヲ更ニ分解シテ行ケバ、遂ニハ γ_2, M ハ

$$\gamma_2, M = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus L^n \quad L^n \leq \gamma$$

ノ形ニ表ハサレル。 $E_\infty M = \text{余レバ}$

$$E_\infty M = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus L^n, \quad L^n \leq E_\infty \gamma$$

ナリ分解カ可能デアル。明カラニ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \oplus L^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \oplus E_\infty \psi^n$$

デアル。故ニ

$$E_\infty M \sim \sum_{n=1}^{\infty} \oplus E_\infty \psi^n$$

デナケレバナラナリ。ユリ $E_\infty M$ ト $\sum \oplus E_\infty \psi^n$ ノ間ノ

isometric +, ηM + 変換 $E_\infty \psi^n =$ 対応スル e ,
 ψ_∞^n ト書ケバ, 明ラカニ

$$E_\infty \eta e = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \psi_\infty^n, \quad \psi_\infty^n \sim E_\infty \eta e$$

命題: 一意性ハ容易ニ示サレル. 今二種ノ分解カア
 ッタトシ, ソノ一ヲ棒ヲ引イテ表ハスコトニスル. $n \neq m$
 トシテ $G = E_n \bar{E}_m$ トオケバ, 例ヘバ $n, m < +\infty$ ノト
 キニハ

$$\begin{aligned} G \eta e &= G \psi'_n \oplus \dots \oplus G \psi_n^n \oplus G \bar{0}_n \\ &= G \bar{\psi}'_m \oplus \dots \oplus G \bar{\psi}_m^m \oplus G \bar{0}_m \end{aligned}$$

デヲッテ

$$\begin{cases} G \psi_n^j \sim G \bar{\psi}_m^k \sim G \eta e, \\ G \bar{0}_n \leq G \eta e, \quad G \bar{0}_m \leq G \eta e \end{cases}$$

デアルガ, コレハ $G = 0$ ナラザル限り不可能デアル.¹¹⁾

(証明了)

定義 2.4. ηM ハ $0 < E \leq \eta e$, $E \in \mathbb{Z}$ ナン
 スベテノ $E =$ 對シテ $E \eta e$ が無限ナルトキ 純粋 = 無限デ
 アルトイフ。

任意ノ ηM が與ヘラレタトキ Lemma 2.2 カラ容
 易ニ知ラレル如ク, $E \eta e$ が有限ナル最大ノ $\mathbb{Z}$: projection
 E が存在スル. コレヲ ηe ニテ ηe ヲ

$$\eta e = E \eta e \oplus (1-E) \eta e$$

ト分解スレバ, $(1-E) \eta e$ ハ明ラカニ純粋 = 無限デアル.

¹¹⁾ Lemma 1.5 ニスル.

スナハチ任意, m ハ有限ト部分ト純粹 = 無限ト部 = 分ケラ
レレノデアル。

Lemma 2.5. m, n が共 = 純粹 = 無限トルトキハ,
 $m_z = n_z + \tau$ バ $m \sim n$ デアル。

証明. m が純粹 = 無限デアルトシ, $m_z = E$ トオ
ク. m ハ無限デアルカラ

$$m = m_0 \oplus \psi, \quad m_0 \sim m, \quad \psi \neq 0$$

ナル分解が可能デアル。Lemma 2.2. ヲ用ヒレバ容易
ニ知ラレル如ク, コノ様ト分解ノ内 ψ_z が最大トモノ分存
在スル. ψ ヲ ψ_z が最大トモヤク = トリ $(1 - \psi_z)m$ ヲ作
レバ, ψ_z が最大トモコトカラ, $(1 - \psi_z)m = \psi$ イテハ上
ノ如キ分解が不可能トナル。

スナハチ $(1 - \psi_z)m$ ハ有限トナル。故ニ $(1 - \psi_z)m = 0$
故ニ $\psi_z = E$ デナケレバナラヌ. サテ ψ ヲカクノ如ク定メ
テオイテ, $m \sim m_0$ ノ對蹠ヲ用ヒテ $m = m_0 \oplus \psi$ ナル分解ヲ
= 寫ス. 然ルトキハ

$$m = m_0 \oplus \psi_1 \oplus \psi, \quad m_0 \sim m, \quad \psi_1 \sim \psi$$

コレヲ續ケテ行ケバ遂ニハ

$$m = m_0 \oplus \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i, \quad \psi_i \sim \psi$$

ニ達スル。

一方 $\psi_z = E = n_z$ ナルコト = 注意スレバ Lemma
2.4 ノ証明ニ於ケルト同様ニシテ, Lemma 2.3
カラ

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{\infty} \oplus \mathcal{L}_j, \quad \mathcal{L}_j \lesssim \mathcal{L}$$

上の分解が導き出される。コレト $\mathcal{M}$ の分解と比較レベル直
 $\mathcal{L} \sim \mathcal{M}$ と $\mathcal{L}$ と $\mathcal{M}$ の関係ハ
 対称であるから、 $\mathcal{L} \sim \mathcal{M}$ であることが示される。(証明了)

この節の初めは述べた如く、 $\mathcal{L}$ は projection E の
 measure space Ω 上の可測集合 Γ 上で $E = E(\Gamma)$ と
 現れる。スル $\mathcal{L}$ は含みレベル bounded operator A は Ω 上の
 有界可測函数 $\alpha(\lambda)$ を用いて

$$A = \int_{\Omega} \alpha(\lambda) E(d\lambda)$$

と現はされる。 $\alpha(\lambda)$ は測度 0 の集合を除けば A はユニークに
 定まる。以下 Ω 上の可測集合或は可測函数を考へる
 場合ニハ、零集合を除いて一致スルモノハ一般ニ同じモノト
 見做スコトスル。——

定義 2.5. $\mathbb{M}$ は属スル各 $\mathcal{M}$ に対して Ω 上の有界
 可測函数 $D(\lambda; \mathcal{M})$ が定義サレテ居テ、コレが次
 の四つの条件ヲ満足スルトキ、 $D(\lambda; \mathcal{M})$ を $\mathbb{M}$ に関
 スル dimension functional と名付ケ、 $D_{\mathbb{M}}(\lambda; \mathcal{M})$
 代表ス。

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{i)} \quad \mathcal{M} \sim \mathcal{L}(\mathbb{M}) \text{ ならば } D(\lambda; \mathcal{M}) = D(\lambda; \mathcal{L}), \\ \text{ii)} \quad \mathcal{M} \gg_{\Gamma} 0 \text{ ならば } \lambda \in \Gamma \text{ とき } D(\lambda; \mathcal{M}) > 0, \\ \text{iii)} \quad \mathcal{M} \text{ が有界ならば } D(\lambda; \mathcal{M}) < +\infty, \\ \text{iv)} \quad D(\lambda; \mathcal{M} \oplus \mathcal{L}) = D(\lambda; \mathcal{M}) + D(\lambda; \mathcal{L}). \end{array} \right.$$

コノトキ又 $D_M(\lambda; \mathcal{M}) \approx \mathcal{M}$, relative dimension
トヨブ,

$D_M(\lambda; \mathcal{M}) =$ 対シテ形式的 =

$$D_M(\mathcal{M}) = \int_{\Omega} D_M(\lambda; \mathcal{M}) E(d\lambda)$$

ヲ作レバ, $\mathcal{M}$ が有限ノ場合ニハ $D_M(\mathcal{M})$ ハ " $\mathbb{Z}$ = 属スル " self adjoint operator トナル. $\mathcal{M}$ が無限ノ場合
ニハ $D_M(\lambda; \mathcal{M})$ ハ ∞ トナルコトガアルカラ, 真ノ意味
デハ $D_M(\mathcal{M})$ ヲ operator トヨブコトハ出来ナイガ, 然レ
コノ場合ニモ形式的ニ $D_M(\mathcal{M})$ ハ $\mathbb{Z}$ = 属スル self adjoint
operator デアルト言ッテヨイデアヲウ. コノ様ナ言ヒ方
ヲ使ヘバ, $D_M(\mathcal{M})$ ハ次ノ様ニ定義セラレル.

定義. $M =$ 属スル各 $\mathcal{M}$ ニ對シテ $\mathbb{Z}$ = 属スル
formal self adjoint operator $D(\mathcal{M})$ が定義サレテ
キテ之レが四ツノ條件:

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{i)} \quad \mathcal{M} \sim \mathcal{N} \quad \text{ナラバ} \quad D(\mathcal{M}) = D(\mathcal{N}), \\ \text{ii)} \quad \mathcal{M} \geq 0 \quad \text{ナラバ} \quad E h_{\mathcal{M}} \neq E D(\mathcal{M}) > 0 \\ \text{iii)} \quad \text{有限ノ} \mathcal{M} = \text{對シテハ} \quad D(\mathcal{M}) \text{ ハ真ノ self adjoint} \\ \quad \text{operator デアル.} \\ \text{iv)} \quad D(\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}) = D(\mathcal{M}) \oplus D(\mathcal{N}) \end{array} \right.$$

ヲ満足スルトキ, $D(\mathcal{M})$ ヲ $M =$ 属スル dimension
functional ト名付ケ $D_M(\mathcal{M})$ デ表ハス.

定理 1 = ヨレバ $h_{\mathcal{M}}$ ハ $h_{\mathcal{M}} = h_{\mathcal{M}_I} \oplus h_{\mathcal{M}_{II}} \oplus h_{\mathcal{M}_{III}}$

解セラレル. Dimension functional ヲ

$\Rightarrow$ 明らか = 各 h_{α_N} を別々 = 扱へばよい。ソコで先づ h_{α}
 から始メレコトとし、 $h_{\alpha} = h_{\alpha}$ とおく。⁽¹²⁾ スルと定義カラ h_{α}
 デハ $M = \text{閉シテ } 1 = \text{於テ最小ナ } h_{\alpha}^{\circ} \text{ が存在スル。コノ様ナ}$
 h_{α}° ヲ一ツ定メテオイテ、任意ノ $h_{\alpha} \in M$ ト $h_{\alpha}^{\circ} = \text{閉シテ}$
 Lemma 2.4 を適用スル。然ルトキハ、 h_{α}° が最小ナルコト
 カラ、 $0 \ll h_{\alpha} \text{ ナル } 0 \text{ ハスベテ } 0 \text{ トナラネバナラヌ。故ニ}$

$\text{Lemma 2.4.} = \text{ヨル分解ハ}$

$$1 = \sum_{0 \leq n \leq \infty} E_n, \quad E_n E_m = 0 \quad (n \neq m);$$

$$E_n h_{\alpha} = \sum_{0 \leq n \leq \infty} \oplus \psi_n^i, \quad \psi_n^i \sim E_n h_{\alpha}^{\circ} (M)$$

ナル形ヲトル。番々ハ $D_M(h_{\alpha})$ を、コノ分解 = 表ハレヌ E_n
 を用ヒテ

$$D_M(h_{\alpha}) = \sum_{0 \leq n \leq \infty} n E$$

ト定義スル。然ルトキハ $D_M(h_{\alpha})$ が dimension
 functional 1個ツノ條件ヲ満足シテキレコトハ容易ニ確
 トラレルデアラウ。

次ニ h_{α} を考へル。先ツ次、 Lemma を証明レヨウ。

$\text{Lemma 2.6. } h_{\alpha}$ デハ有限ナ h_{α} ハ

$$h_{\alpha} = \psi \oplus 0, \quad \psi \sim 0 (M)$$

ナル形 = 分解セラレル。⁽¹³⁾

⁽¹²⁾ h_{α} が h_{α} にヨリ成リト考へル。

⁽¹³⁾ コノ $\text{lemma} = \text{ヨツヲ } M \text{ が既約ノ場合} = \pm \text{ dimension } 1 \text{ 構}$
 成ハ著シク簡單ナル。

証明. M は最小デハナイカラ $M_Z = M$, $Z \subset M$
 デ $M \neq M + Z$ (7M) が存在スル. コノ様ナ Z ヲ一
 ツツテ

$$M = Z \oplus L$$

トオキ, Z ト $L = \text{Lemma 2.}$ ヲ適用スル. スルト
 $E + F = 1$ デ

$$\begin{cases} E L = L_1 \oplus M_1^{(E)}, & L_1 \sim E Z; \\ F Z = Z_1 \oplus M_1^{(F)}, & Z_1 \sim F; \\ (M_1^{(E)})_Z \subseteq E, & (M_1^{(F)})_Z \subseteq F \end{cases}$$

ナル $\mathbb{Z}$ 上 projection E, F が存在スルコトガ分ル. ソ
 コデ

$$\psi_1 = E Z \oplus Z_1, \quad \phi_1 = L_1 \oplus F L$$

トオク. 然ルトキハ $\psi_1 \sim \phi_1$ ナルコトハ明カラアツルガ,
 $\psi_1 \sim \phi_1 \neq 0$ ガ成立ツ. 何トナレバ $\psi_1 = \phi_1 = 0$ トスレバ
 $Z = F Z$, $L = E L$ トナルカラ, $M_Z = M_Z$ カラ $F \supseteq M_Z$ ナ
 得, 従ツテ $L = 0$ デナケレバナラナイコトニナル. 故ニ
 $M_1 = M_1^{(E)} \oplus M_1^{(F)}$ トオケル

$$M = \psi_1 \oplus \phi_1 \oplus M_1, \quad \psi_1 \sim \phi_1 \neq 0$$

M_1 = ツイテニ同ジコトヲ行ツテ

$$M_1 = \psi_2 \oplus \phi_2 \oplus M_2, \quad \psi_2 \sim \phi_2 \neq 0$$

ノ形ニ分解シ, 更ニ M_2 ヲ分解スル; コノコトヲ無限回
 繰テ使ツテ無限ニ繰返セバ, M ハ separable デアル
 カラ可附着回デ $M_Z = 0$ トナリ

結局

$$\pi = \sum_{j=1}^{\infty} \oplus (\psi_j \oplus \phi_j), \quad \psi_j \sim \phi_j$$

トナ、故ニ $\psi = \sum \oplus \psi_j, \quad \phi = \sum \oplus \phi_j$ トナケル

$$\pi = \psi \oplus \phi, \quad \psi \sim \phi (M)$$

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_\infty$ トナク。¹⁴⁾ スルト $\mathcal{H}$ デハ $\mathcal{H}_\infty = 1$ ナル有限ナ $\mathcal{H}$ が存在スル。任意ノ $\pi (M)$ トコノ様ナ $\mathcal{H} = \cup \mathcal{H}_n$ ナ

Lemma 2.4 ナ適用シ、

$$\begin{cases} I = \sum_{0 \leq n < \infty} E_n, & E_n \in \mathbb{Z}, \quad E_n E_m = 0 \quad (n \neq m) \\ E_n \pi = \sum_{1 \leq j \leq n} \oplus \psi_n^j \oplus \phi_n, & \psi_n^j \sim E_n \pi, \\ & \phi_n \subseteq \sum_{k=1}^n E_k \pi \end{cases}$$

ナル E_n ナ定メ

$$[\pi: \pi] = \int_{\mathcal{R}} [\lambda; \pi: \pi] E(d\lambda) = \sum_{0 \leq n < \infty} n E_n$$

ニヨッテ $[\pi: \pi], [\lambda; \pi: \pi]$ ナ定義スル。 $[\pi: \pi]$ ナ
次ノ性質ヲ有スル:

$$\begin{cases} i) \quad \pi \sim \psi & \text{ナラバ} \quad [\pi: \pi] = [\psi: \pi]. \\ ii) \quad E[\pi: \pi] = 0 & \text{ナラバ} \quad \pi \subseteq \pi. \\ iii) \quad \pi \text{ が有限ナラバ} \quad [\lambda; \pi: \pi] < +\infty \\ iv) \quad [\pi: \pi] \oplus [\psi: \pi] \leq [\pi \oplus \psi: \pi] \\ & \leq [\pi: \pi] \oplus [\psi: \pi] + 1. \\ v) \quad \pi = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}_1, \quad \mathcal{L} \sim \mathcal{L}_1 & \text{ナルトキハ} \end{cases}$$

$$2[\pi: \pi] \leq [\pi: \mathcal{L}] \leq 2[\pi: \pi] + 1$$

¹⁴⁾ $\mathcal{H}$ が $\mathcal{H}_\infty$ ノミヨリ成ルト考ヘル。

何トナレバ ii) ハ 既チ $\sim$ 既ニナレバ ψ デ置換ヘテモ E_n カ変ラ

タイコトカラ明ラカデアル。 iii) $E[mz: \lambda] = 0$ ナレバ

$E \subseteq E_0$ デナケレバトラス。故ニ $E[mz] = E[mz_0] \subseteq \lambda$ 。

iii) ハ明ラカデアル。 iv) 7 証明スレタメニ $\psi = \psi$ シテ作ツタ

E_n, ψ_m^j, σ_n 7 夫々 $\bar{E}_n, \bar{\psi}_m^j, \bar{\sigma}_n$ ト表ハスコトトシ,

$F = E_m \bar{E}_n$ トオク。 $F \sigma_m \oplus F \bar{\sigma}_n$ ト $F \lambda = \text{Lemma 2.4}$

7 適用シ, Lemma 1.5 = 注意スレバ, $F \sigma_m \subseteq \lambda$,

$F \bar{\sigma}_n \subseteq \lambda$ ナルコトカラ, F ハニツノ部分 F_0 ト F_1 = 分解

サレテ

$$\begin{cases} F_0 \sigma_m \oplus F_0 \bar{\sigma}_n = \sigma_{mn0}, & \sigma_{mn0} \subseteq_{F_0} \lambda \\ F_1 \sigma_m \oplus F_1 \bar{\sigma}_n = \psi_{mn} \oplus \sigma_{mn1}, & \psi_{mn} \sim F_1 \lambda, \\ & \sigma_{mn1} \subseteq_{F_1} \lambda \end{cases}$$

トナルコトガ分ル。

$$\begin{cases} F_0 m = \sum \oplus F_0 \psi_m^j \oplus \sum_{1 \leq k \leq n} \oplus F_0 \psi_n^k \oplus \sigma_{mn0}; \\ F_1 m = \sum_{1 \leq j \leq m} \oplus F_1 \psi_m^j \oplus \sum_{1 \leq k \leq n} \oplus F_1 \psi_n^k \oplus \psi_{mn} \oplus \sigma_{mn1}; \\ F_0 \psi_m^j \sim F_0 \psi_n^k \sim F_0 \lambda, & \sigma_{mn0} \subseteq_{F_0} \lambda; \\ F_1 \psi_m^j \sim F_1 \psi_n^k \sim \psi_{mn} \sim F_1 \lambda, & \sigma_{mn1} \subseteq_{F_1} \lambda. \end{cases}$$

コレヨリ, $F_0 = E_{mn0}$, $F_1 = E_{mn1}$ トオケバ

$$[mz \oplus \psi: \lambda]$$

$$= \sum_m \sum_n \left\{ (m+n) E_{mn0} + (m+n+1) E_{mn1} \right\}$$

トナル。iv) ハコレヲ直チニ算カレル。vi) ノ証明。

$$\psi_n^j \sim E_n \mathcal{L} = E_n \mathcal{L} \oplus E_n \mathcal{L},$$

ノ對應ニヨリテ $\psi_n^j \wedge$

$$\psi_n^j = \psi_{n_0}^j \oplus \psi_{n_1}^j, \quad \psi_{n_0}^j \sim \psi_{n_1}^j \sim E_n \mathcal{L}$$

ノ如ク分解サレル。又 $\sigma_n \vdash E_n \mathcal{L} = \text{Lemma 2.4}$ ノ適用シ

テ, Lemma 1.5 ニ注意スルハ

$$\begin{cases} E_n = E_{n_0} + E_{n_1}, & E_{n_0} \cdot E_{n_1} = 0; \\ E_{n_0} \sigma_n = \sigma_{n_0}, & \sigma_{n_0} \ll_{E_{n_0}} \mathcal{L}; \\ E_{n_1} \sigma_n = \psi_n \oplus \sigma_{n_1}, & \psi_n \sim E_{n_1} \mathcal{L}, \sigma_{n_1} \ll_{E_{n_1}} \mathcal{L} \end{cases}$$

ナルコトが示サレル。故ニ

$$\begin{cases} E_{n_0} \mathcal{M} = \sum_{1 \leq j \leq n} \oplus (E_{n_0} \psi_{n_0}^j \oplus E_{n_0} \psi_{n_1}^j) \oplus \sigma_{n_0}, \\ E_{n_0} \psi_{n_0}^j \sim E_{n_0} \psi_{n_1}^j \sim E_{n_0} \mathcal{L}, & \sigma_{n_0} \ll_{E_{n_0}} \mathcal{L}; \\ E_{n_1} \mathcal{M} = \sum_{1 \leq j \leq n} \oplus (E_{n_1} \psi_{n_0}^j \oplus E_{n_1} \psi_{n_1}^j) \oplus \psi_n \oplus \sigma_{n_1} \\ E_{n_1} \psi_{n_0}^j \sim E_{n_1} \psi_{n_1}^j \sim \psi_n \sim E_{n_1} \mathcal{L}, & \sigma_{n_1} \ll_{E_{n_1}} \mathcal{L} \end{cases}$$

故ニ

$$[\mathcal{M} : \mathcal{L}] = \sum n E_{n_0} + \sum (n+1) E_{n_1} = 2 \sum n E_n + \sum E_{n_1}$$

ナル。 $[\mathcal{M} : \mathcal{L}] = \sum n E_n$ ナルカラ、コレヨリ直チニv) が出ル。

$\mathcal{L}_2 = 1$ ナル有限ナ $\mathcal{L}$ ヲ一定メテコレヲ $\mathcal{L}^0$ トシ、 $\mathcal{L}^0$ カ

ヲ始メテ Lemma 2.6 = ヲツテ

$$\mathcal{H}^{\nu+1} = \mathcal{H}^{\nu} \oplus \mathcal{L}^{\nu}, \quad \mathcal{H}^{\nu} \sim \mathcal{L}^{\nu}$$

ナル $\mathcal{H}^{\nu}$ ノ 順次 = 定メテ行ク。然ルトキハ $\forall$) カラ明ラカ
ナル如ク

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{\nu}} [\lambda; \mathcal{M}; \mathcal{H}^{\nu}] &\leq \frac{1}{2^{\nu+1}} [\lambda; \mathcal{M}; \mathcal{H}^{\nu+1}] \\ &\leq \frac{1}{2^{\nu}} [\mathcal{M}; \mathcal{H}^{\nu}] + \frac{1}{2^{\nu+1}} \end{aligned}$$

故ニ $\nu \rightarrow \infty$ ノトキ $\frac{1}{2^{\nu}} [\lambda; \mathcal{M}; \mathcal{H}^{\nu}]$ ハ 収斂スル。ソコデ
番々ハ

$$D(\lambda; \mathcal{M}) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{\nu}} [\lambda; \mathcal{M}; \mathcal{H}^{\nu}]$$

或ハ記号的ニ

$$D(\mathcal{M}) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{\nu}} [\mathcal{M}; \mathcal{H}^{\nu}]$$

= ヲツテ $D(\lambda; \mathcal{M})$ 或ハ $D(\mathcal{M})$ ヲ定義スル。然ルトキハ

$$(*) \quad \frac{1}{2^{\nu}} [\mathcal{M}; \mathcal{H}^{\nu}] \leq D(\mathcal{M}) \leq \frac{1}{2^{\nu}} [\mathcal{M}; \mathcal{H}^{\nu}] + \frac{1}{2^{\nu+1}}$$

コノ (*) ヲ用ヒレバ $D(\mathcal{M})$ が dimension functional
ナルコトハ容易ニ示サレル。先ツ $\mathcal{M}$ ハ $\emptyset$ トラバ $D(\mathcal{M}) = D(\emptyset)$
ナルコトハ i) カラ明ラカデアル。 $\mathcal{M} \neq \emptyset$ トラバ $E D(\mathcal{M})$
ガ $E \mathcal{H}_g$ デ > 0 ナルコトヲ示スタメニハ、 $E D(\mathcal{M}) = 0$ トラ
バ $E \mathcal{M} = 0$ ナルコトヲ言ヘバヨイ。然ルニ $E D(\mathcal{M}) = 0$ トス
レバ (*) カラスベテノ $\nu = \nu$ イテ $E [\mathcal{M}; \mathcal{H}^{\nu}] = 0$ トナル。
従ツテ ii) = ヲツテ $E \mathcal{M} \simeq \mathcal{H}^{\nu}$ ガスベテノ $\nu = \nu$ イテ成立スル。
然ルニ

$$\mathcal{H}^0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \oplus \mathcal{H}^{\nu} \oplus \mathcal{L}^{\infty}, \quad \mathcal{L}^{\infty} = \Pi \wedge \mathcal{L}^{\nu}$$

デアルカラ $E \mathcal{H} > 0$ トラバ $\mathcal{H}^0$ ハ無限デナケレバナラナイ。

故 = $E \mathcal{H} = 0$ デアル。 $\mathcal{H}$ が有限トラバ $D(\lambda; \mathcal{H}) < +\infty$

ナレコトハ iii) ト (*) カラ明ラカデアル。

$$D(\mathcal{H} \oplus \psi) = D(\mathcal{H}) \oplus D(\psi)$$

iv) ト (*) カラ証明サレル。

最後 - $\mathcal{H}_{\text{II}}$ を考へル。 $\mathcal{H}_{\text{II}}$ デハ M = 属スル O ナラザ
ル $\mathcal{H}$ ハスベテ純粹 = 無限デアル。故 = Lemma 2.5
/ 示ス如ク, $\mathcal{H} \sim \mathcal{H}$ ハ $\mathcal{H}_Z = \mathcal{H}_Z$ ト一致スル。従ッテコ
ノ場合 = ハ

$$D_M(\mathcal{H}) = \infty \cdot \mathcal{H}_Z$$

トオケバヨイコト明ラカデアラウ。

— 以上デ dimension functional $D_M(\mathcal{H})$
ガ存在スルコトガ分ツタ。次ニソノ一意性ヲ示サウ。先ッ
 $D_M(0) = 0$ ナレコトハ明ラカデアル。次 = $\mathcal{H}$ が純粹 =
無限デアルトスレバ, Lemma 2.5 / 証明デ述べタ
如ク

$$\mathcal{H} = \psi \oplus \mathcal{H}, \quad \mathcal{H} \sim \mathcal{H}, \quad \psi_Z = \mathcal{H}_Z$$

ナレ $\mathcal{H}, \psi$ ガ存在スル。 $\mathcal{H}_Z = E(\Gamma)$ トスレバ

$$D_M(\lambda; \mathcal{H}) = D_M(\lambda; \psi) + D_M(\lambda; \mathcal{H})$$

デアルガ $\lambda \in \Gamma$ デハ $D_M(\lambda; \psi) > 0$, $D_M(\lambda; \mathcal{H}) = D_M(\lambda; \mathcal{H})$

デアル。ユノタメ = ハ $D_M(\lambda; \mathcal{H}) = \infty$ デナケレバナラ

又、故 =

$$D_M(m) = \infty \cdot m_2$$

コレヲ $h_{II} =$ 於ケル一意性ハ証明サレタコト = ナル。 h_I ト

$h_{II} =$ 於ケル一意性ヲ示スタメニ上記ノ方法ヲツクラレタ

$D_M(m)$ ヲ $D_M^{\circ}(m)$ ト書クコト = スル。 h_I テハ m ト n° = 關スル 1 / 分解ヲ $1 = \sum E_n$ トスレバ

$$D_M(m) = \sum n E_n D_M(n)$$

トナル。然ルニ $\sum n E_n = D_M^{\circ}(m)$ ナアルカラ

$$D_M(m) = D_M(n^{\circ}) \cdot D_M^{\circ}(m)$$

スナハテ $D_M(m)$ ハ $D_M(n^{\circ})$ ナル積因子ヲ除ケル一意的

= 定ナルノデアリ。最後ニ h_{II} ヲ考ヘル。 m ト n^{ν} = 關ス

ル 1 / 分解ヲ $1 = \sum E_n$ トスレバ

$$E_n m = \sum_{1 \leq j \leq n} \oplus \psi_n^j \oplus \sigma_n, \quad \psi_n^j \sim E_n n^{\nu},$$

$$\sigma_n \leq_{E_n} n^{\nu}$$

ヨリ、任意ノ $D(m) = D_M(m) = \psi$ イテ

$$[m; n^{\nu}] D(n^{\nu}) \leq D(m) \leq ([m; n^{\nu}] + 1) D(n^{\nu})$$

ガ成立スルコトガ分ル。然ルニ

$$D(n^{\nu}) = \frac{1}{2^{\nu}} D(n^{\circ})$$

デアリ。故ニ

$$D(m) = D(n^{\circ}) \cdot D_M^{\circ}(m)$$

以上ヲ要約シテ;

定理2. M が任意 / operator ring $\mathcal{H}$ 上, M に関する dimension functional $D_M(\lambda; m)$ が存在スル. Dimension functional の積因子ヲ除ケハ一意的ニ定マル. — λ 上ハチソノ一ツヲ $D_M^0(\lambda; m)$ トスレバ, 他ノ $D_M(\lambda; m)$ ハ $0 < \phi(\lambda) < +\infty$ 上ニ一定ノ可測函数 $\phi(\lambda)$ ヲ用ヒテ

$$D_M(\lambda; m) = \phi(\lambda) D_M^0(\lambda; m)$$

ト現ハサレル. Dimension $D_M(\lambda; m)$ ハ $\mathcal{L}$ 上ニ属スル formal self adjoint operator:

$$D_M(m) = \int_{\Omega} D_M(\lambda; m) E(d\lambda)$$

ヲ用ヒテ表ハサレル.

$D_M(m)$ ノ主要ナ性質ヲ次ニ述ベル. 以下簡単ノタメ $D_M(m)$ ヲ $D(m)$ ト書クコトニスル. 先ツ

定理3. $m \leq n$ 上ニタメノ必要且充分ノ条件ハ $D(m) \leq D(n)$ 上ニコトデアル.

証明. 必要ナルコトハ明ラカデアル. 充分ナルコトヲ示スタメ $D(m) \leq D(n)$ デ $m \leq n$ デアツタトスル. 然ルトキハ $m \geq n$ 上ニ $E \in \mathcal{L}$ が存在スル. 従ツテ

$$E m = \eta \oplus 0, \quad 0_2 = E, \quad \eta \sim E n$$

故ニ

$$E D(m) = E D(n) + D(0_2) \geq E D(n)$$

デナレバナラヌ. コレハ然レバ $D(m) \leq D(n)$ 成スル.

定理4. $D([m, n]) + D(m \wedge n) = D(m) + D(n)$

証明、Lemma 1.2 カラ 時ラ カデア ル。

Lemma 2.7. $\mathcal{M}_j$ ($j = 1, 2, \dots$) が有限,

$$\sum_{j=1}^{\infty} D(\mathcal{M}_j) \leq D(\mathcal{M}) \text{ と トキハ}$$

$$\mathcal{M}_j \sim \mathcal{M}_j, \mathcal{M}_j \perp \mathcal{M}_k (j \neq k), \sum_{j=1}^{\infty} \oplus \mathcal{M}_j \subseteq \mathcal{M}$$

とル $\mathcal{M}_j$ が存在スル。

コレハ $\mathcal{M}$ カラ 順次 = $\mathcal{M}_j \sim \mathcal{M}_j$ とル $\mathcal{M}_j$ を除イテ行
ケバ 容易 = 証明セラレル。コレ Lemma カラ 次ノ 定理が導
カレル。

$$\text{定理5. } D\left(\sum_{j=1}^{\infty} \oplus \mathcal{M}_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} D(\mathcal{M}_j)$$

証明. 先ツ

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} D(\mathcal{M}_j) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n D(\mathcal{M}_j) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} D\left(\sum_{j=1}^n \oplus \mathcal{M}_j\right) \leq D\left(\sum_{j=1}^{\infty} \oplus \mathcal{M}_j\right) \end{aligned}$$

ハ 明ラ カデア ル。故ニ 若シモ 定理が成立シトイトラバ $m(\Gamma)$
 > 0 とル Ω ノ 部分集合 Γ ヲ 適當ニ 選ンデ, $\lambda \in \Gamma$ ニ 於テ
ハ 或ハ $\delta > 0$ ニ ツイテ

$$\sum_{j=1}^{\infty} D(\lambda; \mathcal{M}_j) + \delta \leq D(\lambda; \sum_{j=1}^{\infty} \oplus \mathcal{M}_j)$$

が成立シ, 而モ $\sum_{j=1}^{\infty} D(\lambda; \mathcal{M}_j)$ が 一様收斂スルモノニ 出来

14.

$$D(\lambda; \sum_{j=1}^{\infty} \oplus m_j) = \sum_{j=1}^{m-1} D(\lambda; m_j) + D(\lambda; \sum_{j=m}^{\infty} \oplus m_j)$$

がアルカラ, 上ノ不等式カラハ

$$(a) \quad D(\lambda; \sum_{j=m}^{\infty} \oplus m_j) \geq \delta$$

デナケレバナラナイコトガ余ル. コレカラ矛盾ヲ導クヌメ = h_{γ} ヲ $h_{\gamma I}$, $h_{\gamma II}$, $h_{\gamma III}$ = 余ケテ考ヘル. $h_{\gamma I}$, $h_{\gamma III}$ デハ

$\sum_{j=1}^{\infty} D(\lambda; m_j)$ ガ Γ デ一様ニ収斂スルコトハ, 或 m ガアツ

テ $j \geq m$ = 對シテ $E(\Gamma) m_j = 0$ ナルコトヲ意味スル. 故ニ

$E(\Gamma) \sum_{j=m}^{\infty} \oplus m_j = 0$ トナツテ (a) ト矛盾スル. $h_{\gamma II}$ デハ至

ル所 $D(\lambda; \gamma^{\nu}) = \frac{1}{2^{\nu}}$ ナル γ^{ν} が存在スル. 従ツテ m ヲ充
分大キクトツテ

$$\sum_{j=m}^{\infty} D(\lambda; m_j) \leq D(\lambda; \gamma^{\nu}) \quad (\lambda \in \Gamma)$$

ナラシメナケレバ, Lemma 2.7 カラ

$$\gamma_j \sim E(\Gamma) m_j, \quad \sum_{j=m}^{\infty} \oplus \gamma_j \leq \gamma^{\nu}$$

ナル γ_j が存在スル. 故ニ

$$\sum_{j=m}^{\infty} \oplus E(\Gamma) m_j \sim \sum_{j=m}^{\infty} \oplus \gamma_j \leq \gamma^{\nu}$$

故ニ

$$D(\lambda; \sum_{j=m}^{\infty} \oplus m_j) \leq \frac{1}{2^v} \quad (\lambda \in \Gamma)$$

デナケレバナラヌ。 ν ハ 任意デアルカラ, コレハ矢張 (a) ト矛盾スル。

1.3. 吾々ハ既ニ定理 1ニ於テ, h_f ハ M ニ関シ

$$h_f = h_{fI} \oplus h_{fII} \oplus h_{fIII}, \quad h_{fN} = E_N h_f \quad (N=I, II, III)$$

ト如ク分解サレルコトヲ示シタ。コノ中 h_{fI} ト h_{fII} ハ $D_M(m)$ ヲ使ヘバ更ニ細カク分解サレル。以下コレヲ述ベル。

先ヅ h_{fI} ヲ考ヘ, 簡単ノタメ $h_{fI} = h_f, E_I M = M$ トオク。スルト h_f デハ 1ニ於テ最小ノ χ^0 ガ存在スル。 D_M ヲ $D_M(\chi^0) = 1$ タルヤク = *normalize* シテオケバ, $D_M(\lambda; m)$ ハ 0, 1, 2, -----, ∞ ノイヅレカノ値ヲトル。ソコデ $D_M(\lambda; h_f)$ ヲ考ヘ

$$\Omega_n = (\lambda; D_M(\lambda; h_f) = n) \quad (0 \leq n \leq \infty)$$

トオキ,

$$E_n = E(\Omega_n), \quad h_{fn} = E_n h_f, \quad M_n = E_n M$$

ニヨッテ E_n, h_{fn}, M_n ヲ定義スル。 E_n ハ或ハ形式的ニ

$$D_M(h_f) = \sum_{0 \leq n \leq \infty} n E_n$$

ヲ用ヒテモ定義サレル。コノトキ明カニ

$$h_f = \sum_{0 \leq n \leq \infty} \oplus h_{fn}, \quad M = \sum_{0 \leq n \leq \infty} \oplus M_n$$

デアル。

コノ一ツノ h_{fn} ヲトッテ考ヘルバ, $D_{M_n}(\lambda; \chi^0) = 1,$

$D_{M_n}(\lambda; h_f) = n$ デアル。今 $Z_n = E_n \mathbb{Z}$ 1 任意 norm
 が n を越えたり ≥ 0 + formal self adjoint operator
 $H = \sum_{0 \leq m \leq n} m F_m$ が與へられたスル。

然ルトキハ明カラ $D_{M_n}(F_m \chi^0) = F_m$ デアルカラ,
 H ハ

$$H = \sum_{0 \leq j \leq n} D_{M_n} \left(\sum_{0 \leq m \leq j} \oplus F_m \chi^0 \right)$$

ト書カレル。 $H \leq D_{M_n}(h_f)$ デアルカラ, Lemma 2.7 =
 ヲツテ, コノトキ

$$M_j \sim \sum_{0 \leq m \leq j} \oplus F_m \chi^0, \quad \sum \oplus M_j \leq h_{f,n}$$

ナル M_j が存在スル。コノデ

$$M = \sum \oplus M_j$$

トオケバ, 定理5 カラ

$$D_{M_n}(M) = \sum_{0 \leq j \leq n} D_{M_n} \left(\sum_{0 \leq m \leq j} \oplus F_m \chi^0 \right) = H$$

スナハチ $h_{f,n}$ デハ任意, $0 \leq H \leq n$ 〃 整数数, $H \in \mathbb{Z}_n$
 = 對シテ $D_{M_n}(M) = H$ ナル $M \in M_n$ が存在スルノデア
 ル。後ニ示ス如ク M_n ハコノ性質ニヨツテ特徴付ケラ
 レル。

$h_{f,\pi}$ ハニツノ部分ニ分解サレル。簡單, $\forall h_f = h_{f,\pi}$,
 $M = E_\pi M$ トオキ, dimension functional γ Dト書
 ク。 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_\infty$ 7

$$\begin{cases} \Omega_1 = (\lambda; D(\lambda; h_y) < +\infty) \\ \Omega_\infty = (\lambda; D(\lambda; h_y) = \infty) \end{cases}$$

ト定義シ, $E_n = E(\Omega_n)$ ($n=1, \infty$) ナルニテ $h_{y,n} = E_n h_y$,

$M_n = E_n M$ トオケバ, スナハチ

$$h_y = h_{y_1} \oplus h_{y_\infty}, \quad M = M_1 \oplus M_\infty$$

デアル。

h_{y_1} ナル $D(M)$ ナ $D(h_{y_1}) = E_1$ ナ様 = normalize
スルコトが出来ル。コノヤウナ normalization, 下ナ
ハ, 任意ノ $0 \leq H \leq I$ ナ $\mathcal{U}_1 = E_1 \mathcal{U}$, self adjoint
operator H ナルニテ $D(M) = H$ ナ M ナ M_1 ナ存在
スル。コレヲ次ニ証明シヨウ。 Ω_1 ナ $E_1 = E(\Omega_1)$ ナ様 =
在ナテ, H ナ

$$H = \int_{\Omega_1} h(\lambda) E(d\lambda)$$

ノ形ニ表ハシ, $h(\lambda)$ ナ連小数ニ展開シテ

$$h(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e_\nu(\lambda)}{2^\nu}, \quad e_\nu(\lambda) = 0 \quad \lambda \in I$$

トオク。 F_ν ナ

$$F_\nu = \int_{\Omega_1} e_\nu(\lambda) E(d\lambda)$$

ト定義スルバ, スナハチ

$$H = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} F_\nu$$

トナル。一方 $\mathcal{U}^0 = h_{y_1}$ カラ始メテ, $\mathcal{U}^{\nu-1} = \mathcal{U}^\nu \oplus \mathcal{L}^\nu$, $\mathcal{U}^\nu \sim \mathcal{L}^\nu$

ナル関係 = ヨッテ順次 = $\mathcal{H}^\nu$ ヲ定メテ行ク, コレガ可能ナルコトハ Lemma 2.6 カラ 明ラカデアル。然ルトキハ $D(\mathcal{H}^\nu) = \frac{1}{2\nu}$ デアルカラ, $D(F_\nu \mathcal{H}^\nu) = \frac{1}{2\nu} F_\nu$, 従ッテ

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} D(F_\nu \mathcal{H}^\nu) = H$$

トナル。 $H \leq D(\mathcal{H}_I)$ デアルカラ, コノコトカラ Lemma 2.7 = ヨッテ

$$\mathcal{H}_\nu \sim F_\nu \mathcal{H}^\nu, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_\nu \subseteq \mathcal{H}_I$$

ナル $\mathcal{H}_\nu$ が存在スルコトが分ル。故ニ $\mathcal{H} = \sum \oplus \mathcal{H}_\nu$ トオケバ $D(\mathcal{H}) = H$ デアル。

$\mathcal{H}_\infty$ = ツイテモ同様ナ方法デ, $0 \leq H + \text{ル } E_\infty \in \mathbb{Z}$: 任意ノ formal self adjoint operator H = 對シテ $D(\mathcal{H}) = H + \text{ル } \mathcal{H} \in \mathbb{M}_\infty$ が存在スルコトが証明サレル。

以上ノ結果ヲ要約シテ次ノ定理ヲ得ル。

定理 6. $\mathcal{H} \wedge \mathbb{M}$ = 関シテ

$$\mathcal{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_{I_n} \oplus \mathcal{H}_{I_\infty} \oplus \mathcal{H}_{II_1} \oplus \mathcal{H}_{II_\infty} \oplus \mathcal{H}_{III}$$

ノ形ニ分解サレ, コレニ對應シテ $\mathbb{M}$ ハ “両側 ideal” ノ直和ニ分レル:

$$\mathbb{M} = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathbb{M}_{I_n} \oplus \mathbb{M}_{I_\infty} \oplus \mathbb{M}_{II_1} \oplus \mathbb{M}_{II_\infty} \oplus \mathbb{M}_{III}$$

各直和因子ヲ dimension functional ハ、適當 =
normalize シテオケル、夫々次ノ range ヲモツ：

$$\left\{ \begin{array}{ll} I_n : & 0 \leq H \leq n + \text{ル 整固有値, } \text{ミヲモツ } H, \text{ 全体,} \\ I_\infty : & 0 \leq H \leq \infty + \text{ル} \\ II_1 : & 0 \leq H \text{ / } + \text{ル } H, \text{ 全体,} \\ II_\infty : & 0 \leq H \leq \infty + \text{ル } H, \text{ 全体,} \\ III : & 0 \times \text{ハ } \infty \text{ +ル 固有値, } \text{ミヲモツ } H, \text{ 全体.} \end{array} \right.$$

但シコノデ H ハ center , formal self adjoint
operator ヲ表ハスモノトスル。