



Title	前談話1078ノ訂正 及ビ 積分可能ナ函數環ニツイテ
Author(s)	深宮, 政範
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 245, p. 1476-1486
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75015
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1083. 前談話 / 訂正 及び 積分可能な
函数環ニツイテ

深 宮 欧 範 (阪大)

1. 前談話 = 於テ commutative topological group G が locally bicomact 且つ separable ナルキニ, G 1 invariant Haar measure ヲ用ヒテ, G 1 上 $L' = L'(G)$, 夫ノ作ル unit ノナル normed ring L ヲ考ヘ, L が N -ring ナルコトヲ証明シタ續リデキマシタガ, 証明ハ筆

者、大抵誤解デ、全クトウセンズ デシタノデ、甚カ悲痛デ
ス、皆様ニお詫言致シ訂正シマス。

誤解ノ点ハ L 、 $C(m)$ へ、寫像ハ $C(m)$ 全体ト
ナルト云フ点デ、 L ハ 單 $= C(m)$ 、sub ring ト代数的
 $= isomorphic$ = トル = 通ガマセヌ。コノ寫像サレタ L ハ
 $C(m)$ テ一様收斂ノ意味ハ 單 $= dense$ = ナル。

夫デ L が N-ring = ナルカドウカ ハ結局分ヲナク
ナリマシタガ、Wiener ノ一般 Tauber 型定理、夫レヲ
 G 、上ヘ拡張スルコトハ別ニ出来ル様ニ思ハレルノデ以下ニ
述ベテ御指正ヲ願ヒタク思ヒマス。

定理1ハ偶然ソコヘ考ヘガ違フ結果ナノデスカ、独立
ニ Segal が証明シタト豫告ヲ出シテオルモノデアルコト
ガ後デ思ヒ附キマシタコトヲ附言イタシマス。然レ Segal
ノハ M 、位相ガ Stone 流 (Gelfand, 第I、位相)
ナリデ茲デハ m 位相 ハ $\bigcup (M_0) = [M / |X_i(M) - X_i(M_0)|$
 $< \varepsilon, i=1, \dots, n]$,

$$X_1, \dots, X_n \in L$$

ノ意味ノ weak topology = ヨツテ定義サレタトシマ
ス。

此ノ場合ハ M ト G 、character group X トノ
對應ハ $M = L'$ ヲ除イテ homeomorph, $X = \text{ideal}$
point ヲ附ケ加ヘテ bicomact = シタトキ = ハ M ト
homeomorph = ナリマス。コノ事實ヲ証明ノ中ニ用
ヒマス。

2. 定理1. $I \neq L$, 任意, closed ideal, I
 $\neq$ 念ム凡スル maximal ideal, 全体 $\neq \mathcal{H} (\subset \mathcal{H})$
 トスレバ, 任意, 開集合 $O \cap \mathcal{H} = \emptyset$ テ

$$I \supset \prod_{M \in O} M.$$

補助定理1. $X \neq G$, character group トスレバ,
 $X =$ 於ケル O の近傍 W_1, W_2 , $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ テ

$$(i) \quad u(x) = 0 \quad x \in W_1, \\ = 1 \quad x \in W_2$$

$$0 \leq u(x) \leq 1, \quad x \in X;$$

$$(ii) \quad \text{且 } u(x) = \int_G v(x) \chi(x) d\chi, \quad v(x) \in L^1 \text{ トル如キ}$$

モノガ存在スル。

証明. $W_1, W_2 = \emptyset$ テ充分小サイ O の近傍 V_1 を選ン
 テ

$$W_2 - V_1 - V_1 \subset W_1$$

トルモノニスル。 $V_2 = W_2 - V_1$ トシ, V_1, V_2 , characteristic function $\neq \varphi_{V_1}, \varphi_{V_2}$ トスレバ

$$u_{W_1, W_2}(x)$$

$$\frac{1}{m_{V_1}} \int_X \varphi_{V_2}(x - x_1) \varphi_{V_1}(x_1) dx_1,$$

トスレバ (i) ハ容易ニ分ル。 (ii) $\neq$ 証明スルタメニハ $\varphi_{V_1}, \varphi_{V_2}$ が X 上ノ L^2 函数ナリ, 従ツテ Parseval 定理 及ビ Plancherel の定理カラ

$$u = \int_G U(x) \chi(x) dx, \quad U(x) \in L^1$$

が合ル。

補助定理2. 任意 $I \cap \mathcal{N} = \emptyset$ 対シテ, $X_0 \in I$, 且ツ

$$X_0(M) \geq 0, \quad X_0(M) \geq \alpha > 0 \quad \text{for all} \\ M \in \mathcal{M} - O$$

ナル X_0 が存在スル。

証明. 假定ニヨリ任意 $M_i \in \overline{\mathcal{N}} = \emptyset$ 対シテ

$$X_{M_i} \in I, \quad X_{M_i}(M_i) \neq 0$$

ナル X_{M_i} が存在スル。 $\mathcal{M} - O$ は closed, 且各 $X_{M_i}(M) \in C(\mathcal{M})$

ナル適当ナ有限箇ノ点 $M_1, M_2, \dots, M_n \in \mathcal{M} - O$ ヲ

トレバ

$$X_0 = \sum_{i=1}^n X_{M_i} X_{M_i}^* \in I,$$

$$\text{且 } X_0(M) \geq 0, \quad X_0(M) \geq \alpha > 0 \quad (M \in \mathcal{M} - O)$$

ナル様ニデキル。

定理ノ証明。

(a) $\mathcal{N}$ が one-point set $(\mathcal{M}) = (L)$ ノ場合,

$\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{N}$ ノ場合

O ヲ與ヘラレタ $\mathcal{N}$ ヲ含ム open set トシ, $Z \in \Pi \mathcal{M}$

トスルト $Z(M) \equiv 0$ for $M \in C$.

補助定理2 ニヨツテ $X_0 \in I$ ヲ定義スルバ

$$\frac{Z(M)}{X_0(M)} \in C(M)$$

$m - \bar{O} = W_2$ トシ, $W_1 \cap W_2$ +ルヤウ = 選ンデ補助定理

$1 =$ ヨツテ定義サレル函数 $U_{W_1, W_2}(X)$ フ用フレバ

$$v_0 = 1 - U_{W_1, W_2} (\equiv 1 - U_{W_1, W_2}(X)) \in L,$$

$$v_0(M) \equiv 0, \quad M \in O', \quad \text{且} \quad \geq 0 \quad (M \in M),$$

而 $\in W_1$ ヲ適當ニ選ンデ

$$v_0(M) + X_0(M) > 0 \quad \text{for all } M \in M$$

ナラシメルコトガ出来ル。

$$\text{従ツテ} \quad \frac{1}{v_0 + X_0} \in L,$$

然ルニ

$$\frac{Z(M)}{X_0(M)} = \frac{Z(M)}{v_0(M) + X_0(M)} \quad (M \in M)$$

$$\text{デアルカラ} \quad v(M) = \frac{Z(M)}{X_0(M)} + \text{ル様} + v \in L. \quad (1)$$

従ツテ $X_0 \in I$ カラ

$$Z = X_0 \cdot v \in I$$

(b) N が one-point set $(M_0) + (L')$ +ル場合

(a) 1 場合ト同様, 但シ $v_0(M)$ トシテハ直接ニ

$U_{W_1, W_2}(X + X_0)$ フトレバヨイ, 但シ X_0 ハ M_0 = 對應スル character.

(c) N が任意ノ集合+ル場合.

$\bar{N}$ 1 各点 M , 及ビツノ任意ノ近傍 $O_M =$ 對シテ (a) スハ

(b) デ行ッタ如キ函数 v_{0M} が存在スル。各 $0_M \in 0 + \mathcal{M}$
 様ニトツテオイテ、 $\overline{\mathcal{M}}$ ノ閉集合ナルコトカラ有限ケノ $M_1, \dots, M_n \in \overline{\mathcal{M}}$ フトツテ

$$\sum_{i=1}^n v_{0_{M_i}}^{(M)} + X_0(M) > 0 \text{ for all } M \in \mathcal{M}$$

ナラシナル様ニデキル。而モ

$$\sum_{i=1}^n v_{0_{M_i}}(M) + X_0(M) = X_0(M) \text{ for all } M \in 0$$

依ッテ同様ニシテ

$$\left(\sum_{i=1}^n v_{0_{M_i}} + X_0 \right)^{-1} \in L$$

且ツ $X_0 \cdot v = Z$ ナルコトガ云ヘル。(定理, 証明了)

3. Wiener ノ一般 Tauber 型定理ノ場合ハ特ニ $\mathcal{M}$
 ガ one-point set (L_1) ガケノ場合デ、而モ特ニ簡單ノ
 場合ハ $K(x) \in L$, 且ツ

$$h(u) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{iux} dx \neq 0 \text{ for all}$$

$$u (-\infty < u < \infty)$$

ノ場合デス。コノ最後ノ場合ハ補助定理 2 ガ導ラナクテ X_0
 $= K \circ K^*$ フトレバヨリマケデス。

参考文献

- (1) *subring* = 読スル同様ノ問題ハ Krein ガ彼ノ証明シテキ
 ル。例ハ Krein, C. R. J. R. S. S., 30-1, p. 9.

$\mathcal{L}$ が one-point set (L_1) だけの場合、 $\mathcal{L}$ を含む $\mathcal{L}$ 上の open set $O = \mathcal{L}$ である。

$$\prod_0 M$$

を含む最小の closed ideal I^* が $L_1 = I^*$ であることが次同様である。即ち

補助定理 3. 任意の $K(g) \in L_1$ 及び $\varepsilon > 0$ に対して

$$\iint |K(g-h)F(h) - K(g)| dg < \varepsilon.$$

となる $F(h) \in \prod_0 M$ 、及び O が存在する。

証明 $W_1 \subset W_2 \subset \dots$ を X -空間 (character-space) の近傍系列で、 $m W_n < \infty$ 、 $\sum W_n = X$ となるようにとる。

$$F_n(g) = \left| \frac{1}{m W_n} \int_{W_n} \chi(g) d\mu \right|^2$$

これに補助定理 1 を用いて同様にして、 $F_n(g)$

$\in \prod_0 M$ となる O_n が存在する。

$P(z)$ を z -多項式とし $P(0) = 0$ とすれば $P(F_n(g))$

$\in \prod_0 M$ である。

L_1 は step-function の dense subset であり、含め定理の step-function φ_A 、且つ $m A < \infty$ となる A 特 = 証明される。

Lebesgue 定理から

$$\int \left| \frac{1}{mV} \int_V \varphi_A(g-h) dh - \varphi(g) \right| dg < \varepsilon.$$

for all $V \subset V_\varepsilon$

＋ル様ナリ、近傍 V_ε が存在スル。

V = 對シテ n ，及ビ P ヲ適當ニトツテ

$$V_n = E_h [F_n(h) > 1 - \varepsilon] \subset V,$$

$$E_n(h) = P(F_n(h)) \in L,$$

$$\frac{1}{mV_n} \int_{V_n} |E_n(h) - 1| dh < \varepsilon,$$

$$\int_{G-V_n} |E_n(h)| dh < \varepsilon \cdot mV_n$$

＋ル様ニ出来テ，從ツテ

$$\int_G \left| \frac{1}{mV_n} \int_{V_n} \varphi_A(g-h) dh - \frac{1}{mV_n} \int_{V_n} \varphi_A(g-h) E_n(h) dh \right| dg$$

$$< 2\varepsilon \cdot mA$$

が簡單ニ余ル。從ツテ

$$\int \left| \frac{1}{mV_n} \int_G \varphi_A(g-h) E_n(h) dh - \varphi_A(g) \right| dg < C \cdot \varepsilon$$

＋ラシメウル。

補助定理3 = ヲツテ Wiener, 一般 Tauber 型定理が群 G / 上デ証明サレタコトニナル。但シ Krein / 証明シタ Plancherel 及ビ Parseval 定理ヲ途中デ用ヒタコトヲ注意シタイ。補助定理3ハ全ク formal ナモノデアルト思ヒマスガ、念ノタメ証明シマシタ。

4. R は (*) 条件 / アル一般 + *normed ring*,
 $\mathcal{M}$ は凡て *maximal ideal* / 集合トスル。

$\mathcal{M}$ の位相 δ_{Stone} = 従って定義スル。即ち $\mathcal{M}$ は任意
 1 部分集合 $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ = 対して closure $\overline{\mathcal{O}}$ は

$$\overline{\mathcal{O}} = \{ M / M \supset \prod_{\mathcal{O}} M \}$$

= ヨって定義シタ *bicompact* T_1 -space トスル。

然ルトキハ R / 任意 / *closed ideal* I = 對シテ,
 I は含ム凡て *maximal ideal* / 集合ヲ $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}$ は
 含ム任意 / 閉集合ヲ 0 トスル。

$$I = \prod_0 M$$

但シ R は *semi-simple* ト假定スル。

$$Z \text{ は任意 / 元 } \in \prod_0 M \text{ トスルバ } Z(M) \equiv 0 \ (M \in 0)$$

$Z \in I$ 云へバヨイ。

$$\overline{\mathcal{N}} \text{ は } \mathcal{N} \text{ の閉包トスルバ } \overline{\mathcal{N}} \in 0^{(1)}$$

$\mathcal{M}-0$ の閉集合がカラ、任意 / $M \in \overline{\mathcal{N}}$ = 對シテ

$$X_M(M) \neq 0, \quad X_M(N) = 0 \ (N \in \mathcal{M}-0)$$

トル元 $X_M \in R$, $X_M X_M^*(N) \neq 0$ トル N / 集合ハ *open*,

且 $\subset 0$, カカラ $\overline{\mathcal{N}}$ / *bicompact* 性カラ適當 + 有限ヶ /

M_i が存在シテ,

$$U_i = \sum_{i=1}^n X_{M_i} X_{M_i}^*$$

が

(1) $\mathcal{N} = \overline{\mathcal{N}}$ ナコトが明カデス。

$$u_1(N) = 0 \quad (N \in \mathcal{M} - O),$$

$$u_1(N) > 0 \quad N \in (\overline{\mathcal{N}} \text{ 含 } \triangle \text{ open set}) O,$$

↑ 様 = 出来ル。 $O_1 \subset O$.

次 = I ト $\overline{\mathcal{N}}$ ト 関係カラ, 任意 $M \in \overline{\mathcal{N}} = \text{対シテ}$

$$y_M(M) \neq 0, \quad y_M(N) = 0 \quad N \in \overline{\mathcal{N}}$$

$$y_M \in I$$

↑ y_M が存在スル。前全様 = , $\mathcal{M} - O$, π bicom pact

↑ 事トカラ適當ナ

$$u_2 = \sum_{i=1}^{\infty} y_{M_i} \cdot y_{M_i}^*$$

= 對シテ

$$u_2(M) > 0 \quad \text{for } M \in \mathcal{M} - O,$$

$$u_2 \in I$$

↑ 様 = 出来ル。依ッテ $u_1 + u_2$ ヲ考ヘルハ

$$(u_1 + u_2)(M) > 0 \quad \text{for all } M \in \mathcal{M}$$

$$(u_1 + u_2)(M) = u_2(M) \quad \text{for all } M \in \mathcal{M} - O$$

従ッテ $(u_1 + u_2)^{-1}$ が存在シテ

$$\frac{Z}{u_1 + u_2}(M) = \frac{Z}{u_2}(M) \quad \text{for all } M \in \mathcal{M}$$

↑ 事トカ容易 = 分ル。 R が semi-simple ↑ 事トカ

$$\text{↑ } u = \frac{Z}{u_1 + u_2} \text{ トスルハ}$$

$$u_2 \cdot u = Z \quad (\text{in } R)$$

が成立ッ, 従ッテ $Z \in I$ (証明了),

以上ハ Segal, 証明シタ定理が 單 = simple + (*) - normed ring = 對シテ拡張テヤルコトヲ証明シタモノデ, G が locally bicompact, commutative + トキハ Segal, 定理ハ出テ来ルヲケデ入。然レコノ証明ノ方法カラ, G が 單 = compact group 1 場合, Segal, 定理, 証明ハ出来ラシイコトハ分レト思ヒマス。

又 G が locally bicompact, commutative group 1 トキ, M 1 = 通りノ位相ハ一致スルヲシク思ハレル。

追加

定理 2 が全然一般 + ring = 對シテ成立ッコトハ後デ分リマシタ。