



Title	イデアルノー性質
Author(s)	深宮, 政範
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 245, p. 1486-1491
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75016
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1084. イデアルノ一性質

深宮 政範 (阪大)

R を unit を有し, complex number を係数とする abstract ring とする. R , commutativity を仮定し +1.

部分集合 $I \subset R$ が, $x, y \in I \rightarrow x+y \in I$, $x \in I$, $y, z \in R \rightarrow yxz \in R$ と R 上の R ideal と云ふ。
 $I \neq (0)$, $R \neq I$ ならば proper ideal と云ふ。

R が proper ideal を含まないと R simple と云ふ。

proper ideal I を含む proper ideal が I (I 以外) 無し時 I maximal ideal と云ふ。良き知ラレタ方法 = 適当に任意 proper ideal I を含む maximal ideal M が存在スルコトが証明デキル。

M が maximal ideal ならば Res-class-ring R/M は simple デアル。

R 上の maximal ideal M の集合を $\mathcal{M}$ と表ハス。Stone = 従ッテ $\mathcal{M}$ 上に位相ヲ定義スル。任意 subset $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ = 空レテ是上 $M \supset \prod_{M \in \mathcal{A}} M$ の集合ヲ $\overline{\mathcal{A}}$ とスレバ

$$(i) \overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{A}}, \quad (ii) \overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A}} \cup \overline{\mathcal{B}}$$

$$(iii) \mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}, \quad (iv) \overline{\{M\}} = M$$

が成立ッ。従ッテ $\mathcal{M}$ は T_1 -space デアル。

(i), (iii), (iv) は明ラカダカテ (ii) を証明スル。定義カテ $\overline{\mathcal{A}} \cup \overline{\mathcal{B}} \subset \overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}$ は明ラカ。逆 = $\overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} \subset \overline{\mathcal{A}} \cup \overline{\mathcal{B}}$ を証明スレバ良イ。

假リ $M_0 \in \overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}$, 且ッ $M_0 \notin \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{B}}$ ならば M_0 がアツタトスレバ

$$z \notin M_0, z \in \prod_{M \in \mathcal{A}} M;$$

$$z' \notin M_0, \quad z' \in \prod_{\mathcal{L}} M$$

かつ $z, z' \in R$ が存在スル。依ツテ

$$R \cdot z' \cdot R \in \prod_{\mathcal{L}} M, \quad z(Rz'R) \subset \prod_{\mathcal{L}} M, \quad \prod_{\mathcal{L}} M \subset M_0$$

及び $z' \in M_0$ カラ

$$M_0 + R \cdot z' \cdot R = R$$

従ツテ

$$zR = zM_0 + z(Rz'R) \subset M_0 + M_0 = M_0$$

R の unit 1 有ツ故 $z \in M_0$, 假定 = 矛盾スル。

$\mathcal{M}$ は bicomact T_1 空間デアル。 $\{F_\alpha\}$ 任意
箇ノ閉集合 $F_\alpha \subset \mathcal{M}$ / 集合トシ, 任意ノ有限箇 $F_{\alpha_1}, \dots$
 $\dots, F_{\alpha_n} =$ 対シテ, intersection $F_{\alpha_1} \cap F_{\alpha_2} \cap \dots$
 $\dots \cap F_{\alpha_n} \neq \text{leer}$ ト假定スル。各 $F_\alpha =$ 對シテ

$\prod_{N \in F_\alpha} N = I_\alpha$ トシ, 凡スル I_α / 生成スル ideal (即チ凡

スル I_α カラノ元ノ凡スル有限和ノ作ル) πI トスル。 I が
maximal ideal $M_0 =$ 含マレバ, $M_0 \supset I \supset I_\alpha$
 $= \prod_{N \in F_\alpha} N$, 即チ $M_0 \in F_\alpha$, 従ツテ $\{F_\alpha\}$ 全体ニ共通點ガアル

コトガ云ヘル。 $I = R$ デアツタトスレバ定義カラ有限箇 X_i ,
 $i = 1, 2, \dots, n$ が存在シテ, $X_i \in I_{\alpha_i}$,

$$\sum_{i=1}^n X_i = 1, \quad \text{一方 } M \in F_{\alpha_i} \text{ トラバ } M \supset I_{\alpha_i} = \prod_{N \in F_{\alpha_i}} N +$$

ル故,

$$M \in \prod_{i=1}^n F_{\alpha_i} \text{ かつ } M \supset \sum_{i=1}^n I_{\alpha_i} \ni 1, \text{ 従って } \prod_{i=1}^n F_{\alpha_i} = \text{leer}$$

ア + ケ ネ バ + ラ + イ, 之レハ 假定ニタ 有限交又性 = 矛盾
スル。

任意 $x \in R$ = 対シテ $F = \{M / x(M) = 0\}$ ハ m /
閉集合ヲ, F / 補集合 $U = \{M / x(M) \neq 0\}$ + $\mathcal{U}$ 集合全
体ハ m / definierendes System der offenen
Menge 7 作ル。

凡ソ $\mathcal{U}$ maximal ideal / 共通部分ハ ideal
(0) 841 場合 R 7 semi-simple ト云フ。

$\bar{R}$ ハ semi-simple + $\mathcal{U}$ トキ, R ハ $\mathcal{U}$ 上ノ函数
(一般 = 各坐標 / 上ノ値ハ別々 + simple ring / 元ヲ
7 $\mathcal{U}$) / ring へ isomorphic = 表現出来ル。

R / automorphism $x \rightarrow x^*$ カ 7 ッテ

$$\sum_{i=1}^n x_i x_i^* \in M \text{ かつ } x_i \in M \text{ かつ } \mathcal{U} \text{ 7 凡ソ}$$

$M \in \mathcal{M}$ = 対シテ 成立ツ。

時 R 7 Hermitian ト云フ。

定理. R ハ semi-simple, hermitian +
ring トスル

I 7 R / ideal, I 7 含ム 凡ソ $\mathcal{U}$ maximal ideal
ノ集合ヲ $\mathcal{N} (\subset \mathcal{M})$, $\mathcal{N}$ 7 含ム 任意ノ open set 7 O ト
スルバ

$$\prod_{\mathcal{N}} M \supset I \supset \prod_0 M$$

証明. $\mathcal{N}$ は閉集合である。

$\Pi \supset I$ である。 $I \supset \Pi \cap M$ を証明する。

$z \in \Pi \cap M$ ならば $z(M) = 0$ for $M \in O$.

$M - O$ は閉集合, $\phi \in \mathcal{N}$ である。従って任意 $M \in \mathcal{N}$
 に対して

$X_M(M) \neq 0$, $X_M(N) = 0$ for all $N \in M - O$
 なる $X_M \in R$ が存在する。集合 $\{N / X_M(N) \neq 0\}$ は開
 $\phi = \subset O$.

$\mathcal{N}$ は closed である, 有限個 $M_1, \dots, M_n \in \mathcal{N}$ が存
 在して

$$y_1 = \sum_{i=1}^n X_{M_i} X_{M_i}^*$$

が $y_1(N) \neq 0$ for all $N \in O_1 = [O = \emptyset \text{ なら } \mathcal{N} \text{ 含む}$
 $\text{する open set}]$
 $= 0$ for all $N \in M - O$

が満足する。

任意 $M \in \mathcal{N}$ に対して

$$X_M(M) \neq 0, \quad X_M(N) = 0 \quad N \in \mathcal{N}$$

なる $X_M \in I$ が存在する。 $M - O_1$ 上 M を動かして,

$M - O_1$ は closed set となる。再び適當 $M_1, \dots$
 $\dots, M_m \in M - O_1$ をとれば

$$y_2 = \sum_{i=1}^m X_{M_i} X_{M_i}^* \in I$$

が $y_2(N) \neq 0$ for all $N \in \mathcal{M} - 0$,

+ルヤウ = 出来ル。依ッテ $v(y_1 + y_2)v' = 1 + \text{ル } v, v' \in R$

が存在シ, 又 $(y_1 + y_2)(M) = y_2(M)$ for $M \in \mathcal{M} - 0$,

$z(M) = 0$ for $M \in 0$, $z = z \vee y_1 v' + z \vee y_2 v'$

$= z \vee y_2 v' \in I + \text{ルコトが表現, isomorphic + コ}$

トカヲ得ラレル。(終リ)