



Title	Lebesgue Measures ノ Direct Produkt 二就テ
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 245, p. 1492-1498
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75017
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1085. Lebesgue Measures / direct Produkt = 就テ

中野 赤五郎 (東京)

今年、十月、年會、特別講演トシテ、角谷君が *measure* / アル *Boolean Algebra* ハ可附番個、*Lebesgue measures* - / *direct Produkt* / *direct sum* デアルコトヲ述ベラレタ。其ノトキ最モ興味ノ中心タル *Maharam* ノ証明=ツイテハ何等フレナカッタが 角谷君カラ直接聞クトフロニヨルト中々面倒デアリマス。此ノ証明ハ次ノ如クニ考ヘルト比較的簡單ニナルノデハナイカト思フノデ以下述ベテ見ヌンウ。

ニツノ *measure* / アル *Boolean Algebra* オトルトガアルトキ、 α ノ *Basis* $\{a_\alpha\}$ 、 β ノ *Basis* $\{b_\beta\}$ ト、間=一對一、對應 $a_\alpha \longleftrightarrow b_\beta$ ガアリ、此ノ對應=於テ、 $a_\alpha \geq a_\beta$ +ラバ、 $b_\alpha \geq b_\beta$; $a_\alpha a_\beta = 0$ +ラバ $b_\alpha b_\beta = 0$ 。逆モ亦成立シ、然カモ $ma_\alpha = mb_\alpha$ +レバ α ト β ハ *isomorph* トナリマス。故ニ α ト β ノ *isomorph* ヲ証明スル、ニ二通りノ方法ガアリマス。即チ α ノ *Basis* $\{a_\alpha\}$ =對シテ、以上ノ如クナ $\{b_\alpha\}$ ヲ求メル方法ト、 $\{b_\alpha\}$ =對シテ $\{a_\alpha\}$ ヲ求メル方法デアリマス。

今、 β *Lebesgue measures* / 直積 α *abstrakt + measure* / アル *Boolean Algebra*

トスルトキ, Maharam 1 方法ハ, ω / Basis $\{b_n\}$
 = 對シテ $\{a_n\}$ ヲ求メル方法デアリマス。ソレ = 反シテ此
 処ヲ述ベマスノハ, $\{a_n\}$ = 對シテ $\{b_n\}$ ヲ求メルト云フ方
 法デアリマス。

先ヅ解リマスルタメ = separabel / 場合ヲ考
 ヘテミマセウ。 $\mathcal{O}$ ヲ可附番個 / Basisヲ有ス atomic
 デナイ measure / 7ル Boolean Algebra
 $\mathcal{O}$ ヲ $(0, 1)$ = 於ケル Lebesgue measure トシマ
 ス。 $(0, 1)$ ヲ二等分シ, 更ニソレヲ二等分シテ得ラレル
 可附番個 / 區間ハ確カニ ω / Basis $\{b_n\}$ デアリマス。
 其レニ對スル $\mathcal{O}$ ノ要素 $\overset{0}{|} \overset{1}{|} \overset{1}{|}$ ヲ求メルニ, 先ヅ
 $m a = \frac{1}{2}$ ($m 1 = 1$ トシマス)ナル $a \in \mathcal{O}$ ノ存在ヲ trans-
 finite Inductionヲ求メマス。

以下同様ニシテ $\{b_n\}$ = 對應スル $\{a_n\}$ ヲ求メテ行
 キマスガ, コノマウニシテ得ラレル $\{a_n\}$ ハ $\mathcal{O}$ ノ Basis
 デアルトハ云ハレマセウ。(コレガ Freudenthal /
 証明ノ不完全ナトコロデアリマス)。然レコノ方法ハ $\mathcal{O}$ ノ
 Basisガ可附番個以上ノ場合ニハ Maharam / 様ニ
 成功スル / デアリマス。此ノ Freudenthal / 証明
 ノ不完全ヲ補フタメニ私ハ次ノマウニ致シマシク。即チ
 $\mathcal{O}$ ノ Basis $\{a_n\}$ カテ dyadisch + 形ノ Basis
 $1, a_{i_1}, a_{i_1 i_2}, \dots (i = 0, 1)$ ヲツクリ, $m a_{i_1 i_2 \dots i_n}$
 = 對シテ其ノ長サノ區間ヲ $(0, 1)$ 間ニ取ツテ行ク / デア
 リマス。コノ様ニシテ得ラレタ $\{b_n\}$ ハ ω / Basisト

ナルコトハ明テカデアリマス。此ノ方法デ一般ノ場合ヲ証明
シマセウ。

補助定理. $\mathcal{I}$ ヲ *measure space*. 之ヲ
Lebesgue measure 1ヲ *Interval* $(0,1)$ トシ
マス。直積 $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$ ノ一組ノ *Basis* トシテ決メヤウナ
ガアリマス。 $0 \leq \alpha \leq 1$ 一対シテ, $\mathcal{I}$ デ *measurable* ナ
函数 $f_\alpha(x)$ ガ對應シ

$$1) \quad \alpha = \int_{\mathcal{I}} f_\alpha(x) dx$$

$$2) \quad \alpha < \beta \text{ 十ラバ } 0 \leq f_\alpha(x) \leq f_\beta(x) \leq 1$$

$$3) \quad \alpha \rightarrow \beta = 0 \text{ 十ラバ } f_\alpha(x) \wedge \mathcal{I} = \text{テ一様} = f_0(x)$$

= 收斂スルトキハ $\mathcal{I}$ 任意ノ *measurable set* T 一対
シ

$$A_\alpha(T): (x, y) \quad x \in T, \quad 0 \leq y \leq f_\alpha(x)$$

ナル点集合 A_α ハ $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$ ノ *Basis* デアリマス。

証明. $0 \leq \alpha_0 < 1$ ナル任意ノ α_0 一対シ

$$A' \quad (x, y): x \in T \quad 0 \leq y \leq \alpha_0$$

ガ、以上ノ A_α カラ可附番個ノ和, 差, 積ニヨリ *measure*
Zero ヲ除イテ得ラレルコトヲ証明スレバ充分デアリ
マス。

之ヲ充分小ナル任意ノ正数トシマス。然ルトキハ 3) ノ
假定ニヨリ可附番個ノ順序数 $1, 2, \dots, \omega, \dots$
ニ對シテ $1 = \alpha_1 > \alpha_2 > \dots \rightarrow 0$ ヲ適當ニ定メ
テ

$$f_{\alpha_\lambda}(x) \geq f_{\alpha_{\lambda+1}}(x) \geq f_{\alpha_\lambda}(x) - \varepsilon$$

＋ラシメルコトが出来ス。然ルトキハ *measure zero* ヲ
除イテ

$$A' = \sum_{\lambda} A'(A_{\alpha_\lambda} - A_{\alpha_{\lambda+1}}).$$

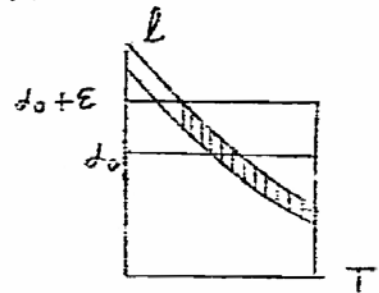
$$\text{又, } T_\lambda = E[x; f_{\alpha_\lambda}(x) \leq \alpha_0 + \varepsilon]$$

$$B_\lambda: (x, y) : x \in T_\lambda, f_{\alpha_{\lambda+1}}(x) < y \leq f_{\alpha_\lambda}(x)$$

$$\text{トスレバ } B_\lambda = A_{\alpha_\lambda}(T_\lambda) - T_{\alpha_{\lambda+1}}(T_\lambda)$$

デ、而カモ

$$A'(A_{\alpha_\lambda} - A_{\alpha_{\lambda+1}}) \subset B_\lambda$$



デアリマス。又

$$A'': (x, y) \quad x \in T, \quad 0 \leq y \leq \alpha_0 + \varepsilon$$

ニ對シテハ

$$B_\lambda \subset A''$$

故 = *measure zero* ヲ除イテ

$$A' \subset \sum_{\lambda} B_\lambda \subset A''$$

デアリマス。然ルニ $m A'' = m A' + \varepsilon$ デアリマスカラ

measure zero ヲ除イテ

$$A' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sum_{\lambda} B_\lambda \right)$$

故ニ証明サレマシタ。

故テ $\mu =$ 本定理ヲ証明シマセウ。即チ $\mathcal{O}$ ヲ *measure*
 ノアル *Boolean Algebra*. 然ラザラ然 *complete*
 デアリマス。又 $\mathcal{O}$ ノ *character* $\leq \aleph_0$ 、 $\mathcal{O}$ ハ
homogeneous トシマス。 $\mathcal{O}$ ノ *Basis* $\gamma a_1, a_2, \dots$
 $\dots, a_\lambda, \dots$ トシマス。 *Transfinite Induction*
 ヲ用ヒマス。 $\{a_\lambda\} (\lambda < \lambda_0)$ $\gamma a_1, a_2, \dots$ カラ *gene-*
rate サレタ $\mathcal{O}$ ノ *complete* + 部分 *Boolean Algebra*
 トシマス。 $\{a_\lambda\}$ ハ *Lebesgue measure* ノ直積 $\mathcal{I}$ ト
isomorph トシマス。

$\mu = \{a_\lambda\} = a_{\lambda_0}$ 及ビ他ノ素クトモ可数個ヲ附ケ加ヘ
 テ $\mathcal{O}_0$ ヲ作り、此レガ $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$ ト *isomorph* デ、然カモ
 $\{a_\lambda\}$ ト $\mathcal{I}$ トノ *isomorphism* が保存サレテキルコ
 トヲ証明スルバ充分デアリマス。 $a \in \{a_\lambda\} =$ 對應スル $\mathcal{I}$
 ノ *measurable set* γA_a トシマス。然ルトキハ
 $a \in \{a_\lambda\} = \text{真}$

$$0 \leq m a_{\lambda_0}, a = F(A_a) \leq 1$$

+ $F(A_a)$ ハ *total additive* デアリマスカラ *Radon-*
Rykedin ノ定理ニヨリ

$$F(A_a) = \int_{A_a} f(x) dx \quad 0 \leq f(x) \leq 1$$

+ $f(x)$ が存在スル。然カモ

$$\mu_0 = \int_{\mathcal{I}} f(x) dx = m a_{\lambda_0}$$

トスルバ、 $0 < \mu_0 < 1$ デアリマス。故ニ $\mu_0 =$ 此ノ $f(x)$

ヲ對應サセマス。次 α_0 ト $1-\alpha_0$ 大ナル方ニ對シ (α_0 が大ナルハ $a_{\lambda_0}\{a_\lambda\}$, $1-\alpha_0$ が大ナルハ $(1-a_{\lambda_0})\{a_\lambda\}$ 。例ハ、 α_0 が大トスルハ b が *homogenous* ナルニヨリ $a_{\lambda_0} > b > 0$ ナ $a_{\lambda_0}\{a\}$ = 属サヌ b が存在シマス。此ノ b = 對シ, $m_b a = F_b(A_a)$ ハ *total additive* ナルニ、*Idahn* ノ定理ニヨリ $A_{a_1} A_{a_2} = 0$, $A_{a_1} + A_{a_2} = I$ ナ

$$F_b(A) \begin{cases} \geq \frac{1}{2} \alpha_0 & \text{in } A_{a_1} \\ \leq \frac{1}{2} \alpha_0 & \text{in } A_{a_2} \end{cases}$$

ナル $A_{a_1}, A_{a_2} \in I$ が存在シマス。 b_{a_1} カ $a_{\lambda_0} - b_{a_2}$ ノ何レカ一方ハ $a_{\lambda_0}\{a\}$ = 属サナリ。故ニソノ属サヌ方ニ對シ例ハ、 b_{a_1} = 對シテ

$$m_{b_{a_1}} a = \int_{A_a} f(x) dx$$

ナル $f(x)$ が前ト同様ニシテ存在シマス。然カモ

$$\frac{1}{2} f_{\alpha_0}(x) \leq f(x) \leq f_{\alpha_0}(x)$$

ニアリマス。以下同様ニシテ可附番個ノ順序数 $0, 1, 2, \dots, \omega, \dots$ ニ對シテ $a'_0 (= a_{a_0})$, $a'_2 (= b_{a_1})$, $a'_2, \dots, a'_{\omega}, \dots$ が定マリ共ニ對應シテ

$$m_{a'_\mu} a = \int_{A_a} f_{\alpha_\mu}(x) dx \quad (a \in \{a_\lambda\})$$

$$\alpha_\mu = \int_I f_{\alpha_\mu}(x) dx \quad (\mu = 1, 2, \dots, \omega, \dots)$$

$$f_{\alpha_\mu}(x) \geq f_{\alpha_\nu}(x) \quad (\alpha_\mu > \alpha_\nu)$$

ナル $f_{\alpha_\mu}(x)$ が存在シ、然カニ $\alpha_\mu = \infty$ ナル

$\alpha_{\mu_1} < \alpha_\mu < \alpha_{\mu_2}$ ナル最大ノ μ_1, μ_2 が存在スルカ、又ハ

$\lim_{\lambda \uparrow \mu} \alpha_\lambda = \alpha_\mu$ ナラバ、前ノ場合ニハ

$$\frac{1}{2} \{ f_{\alpha_{\mu_1}}(x) + f_{\alpha_{\mu_2}}(x) \} \leq f_{\alpha_\mu}(x) \leq f_{\alpha_{\mu_2}}(x)$$

後ノ場合ニハ

$$\lim_{\lambda \uparrow \mu} f_{\alpha_\lambda}(x) = f_{\alpha_\mu}(x)$$

ナル關係ニアリマス。此ノコトカラ $\alpha_{\lambda_1} \leq \alpha_{\lambda_2} \leq \dots \rightarrow \alpha$

ナルトキハ $f_{\alpha_{\lambda_1}}(x) \leq f_{\alpha_{\lambda_2}}(x) \leq \dots$ が一様ニ收斂スルコト

が解リマス。故ニ $\alpha \alpha'_\mu (\alpha \in \{ \alpha_\lambda \}) = \infty$ ナル

$$A_\mu: (\bar{x}, y), x \in A_\alpha, 0 \leq y \leq f_{\alpha_\mu}(x)$$

ヲ對應セシメバ、補定理ニヨリ、 $\{ \alpha_\lambda, \alpha_{\lambda_0}, \alpha'_1, \dots \}$ ト

正メカトが isomorph ナコトが解リマス。