



Title	正ノ量ト實數トニ関スルー考察
Author(s)	南雲, 道夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 246, p. 1499-1509
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75018
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1086. 正ノ量ト實數トニ關スル一考察

高 雲 道 大 (阪大)

一次元的量ト實數トノ關係ハ解析學ト幾何學トノ間ニ於ケル基礎問題デアール。之レニ關シテハ、兩者ヲ殆ソト同一視スル大權把ト立場ト、兩者ヲ隔離シテ別々ニ基礎付ケル立場トノ二ツガアリ、兩者ノ本質的ノ關係ニ深ク考慮ヲ拂フモノガ割ニ少クイヤリデアール。高木先生ハ續數學雜誌(續最近高等數學講座)ノ無理數論ニ於テ:

「連續的の量論ト切りハナシタ無理數論ハ存在理由ヲ缺クモノデアラウ。連續的の量論ヲ確然タル基礎ノ上ニ築キ上げテ、ソレヲ無理數論ノ背景ニスベキコト當然デアール。」

ト言ハレテ、先ヅ連續的ノ量ニ關スル公理ヲ基ニシテ、連續性ノ本質ヲ(切断ニヨル)説明サレ、之レカラ度量、等分ニヨリ有理量(等差ノ假稱)ヲ導キ、進ンテ無理量カ切断ニヨリ規定サレルコトヲ説明サレタ。高木先生ノ此ノ講義ハ、連續的の量ヨリ實數論ヘノ正面大道ヲ示サレテアル。所分(連續的)量ニハ、本來和々大小ノ比較ガ出來ルカ積ハナイ。

$1\text{米} \times 1\text{米} = 1\text{何米}$ トハ無意味デアール。之レニ反シ實數ニハ四則ガ考ヘラレル。茲デハ此ノ本質ヲ問題ニスル。

即ち連続的量ヲ（公理系ニヨリ）與ヘラレタモノトシ、之レニ對スル運算（操作）トシテ實數ヲ定義シテ、四則及ヒ大小ニ關スル法則ヲ導出シテ見ルノデアアル。連続的量ヨリ實數ヘノ一側面觀トシテ御參考トモナラハ幸甚デアアル。

§1. 正ノ量ノ体系 S .

S ナル集合ガ次ノ公理ヲ滿タストキ、 S ヲ正ノ量ノ体系トイフ。

0. $x, y \in S$ ナルトキ、 $x + y \in S$ ガ常ニ一義的ニ定マル。

$$1. \quad x + y = y + x$$

$$2. \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$3. \quad x + y \neq x$$

$$4. \quad x \neq y \text{ ナルトキ、} x + z = y + z \text{ ガ存在スルカ、又ハ } y + z = x + z \text{ ガ存在スル、}$$

(以上)

ミト4トカラ量ノ比較ガ出来ル、即チ

定理1. (i) $x + z = y + z$ ナルトキ、 $x < y$ ト定義スルバ、任意ノ $x, y \in S$ ニツイテ

$$x = y, \quad x < y, \quad y < x$$

ノイザレカ一ツガ成立シ、此ノ三者ハ互ニ相容レナイ。

(ii) $x < y$ 且ツ $y < z$ ナルトキハ、 $x < z$ 。

(ii) $x < y$ ナルトキ, $x + z < y + z$, 逆も成立スル.]

証明ハ簡單カカラ略ス。

尚, $x < y$ ナルトキ, $x + z = y + z$ ハ存在スルガ, 只一ツニカヤル. 此ノトキ $z = y - x$ ト書ク事クコトニスル。

S カ更ラニ次ノ公理ヲ満タストキ, S テ連続的ナリトイフ。

5. S テ丁度ニツノ部分 (空ナラヌ) A, B = 合チ, $x \in A, y \in B$ ナラハ常ニ $x < y$ ナリトスレバ, $x \in A, y \in B$ ナルスベキ x, y ニツキ同特ニ, $x \leq S, y \geq S$ ナル $S \in S$ カ丁度一ツ存在スル. [此ノトキ $S = (A | B)$ ト書ク.]

連続的ナ S = ツイテハ次ノ定理カ成立ツ。

定理 2. $x < y$ ナラハ $x < z < y$ ナル z カ存在ス。

又 S = ハ最大ノ ϵ / ϵ 最小ノ ϵ / $\epsilon + 1$.]

此ノ前半ハ S / 稠密性 デアル. (証明ハ高木先生ノ註参照) 後半ハ, $x < x + \epsilon$, 及ビ之レカラ $x < y < x + \epsilon$ ナル y カ存在スル. $y - x = \epsilon < \epsilon$ = ヨツテ明ラキ。

次ニ Archimedes ノ原則. 先ツ

$$\underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ 個}} = n \cdot x$$

ト書クコトニスレバ

定理3. $x, y \in S$ + ルトキ, $n x > y$ + ル自然数
が存在スル。」

(証明ニハ高木先生雅談参照)

定理4. n ヲ與ヘラレタ自然数, $x \in S$ トスレバ
 $n y < x$ + ル $y \in S$ が存在スル。」(上記雅談, 等分可
能, 部分参照)

§2. S = 對スル操作ノ体系 $\mathbb{Z}$.

S ノ量 x ニ對シ, S ノ量 x' ヲ對應サセル操作 $x' =$
 $\lambda(x)$ (函数) ヲ特ニ

$$(0) \quad \lambda(x+y) = \lambda(x) + \lambda(y)$$

+ ル λ ヲ考ヘル。カニル λ ノ全体ヲ $\mathbb{Z}$ ト名付ケル。

$\lambda(x) = n \cdot x$ (n 自然数) トスレバ, $\lambda \in \mathbb{Z}$ ナ
リル。

定理5. $\lambda \in \mathbb{Z}$, $x < y$ + ルバ, $\lambda(x) < \lambda(y)$.
逆ニ成立ス。」

定理6. $\lambda(n \cdot x) = n \cdot \lambda(x)$ (n ハ自然数).」

証明ハイツレニ容易,

尚 $\lambda_1 + \lambda_2$, $\lambda_1 \lambda_2$ ヲバ次ノ如ク定義スレバ之ニ $\mathbb{Z} =$
属スル。(証明略)

$$\lambda_1(x) + \lambda_2(x) = [\lambda_1 + \lambda_2](x),$$

$$\lambda_1(\lambda_2(x)) = \lambda_1 \lambda_2(x).$$

定理7. $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 + \lambda_1, (\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_3 = \lambda_1 + (\lambda_2 + \lambda_3).$

$$\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3) = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3.$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \lambda_3 = \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3.$$

$$(\lambda_1 \lambda_2) \lambda_3 = \lambda_1 (\lambda_2 \lambda_3). \quad \text{「証明容易」}$$

($\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_2 \lambda_1$ については後で証明する.)

次 = λ , 大小比較 = ヲキ

定理8. 或る $a \in S$ へ $\lambda_1(a) < \lambda_2(a) + \epsilon$ へ, S 全体へ $\lambda_1(x) < \lambda_2(x)$.」

(証) 若し $b \in S$ へ

$$(1) \quad \lambda_1(b) \geq \lambda_2(b)$$

ならば, 矛盾となることを示す. $\lambda_1(a) < \lambda_2(a)$ へ

$$(2) \quad m\{\lambda_2(a) - \lambda_1(a)\} > \lambda_1(b)$$

へ自然数 m へある. 従って $m \cdot \lambda_2(a) > \lambda_1(b)$.

故 =

$$(3) \quad \begin{cases} \text{且つ} & m \lambda_1(b) < m \lambda_2(a) \\ & (n+1) \lambda_1(b) \geq m \lambda_2(a) \end{cases}$$

へ自然数 n へある. (3) へ下へ式へ (2) へ加へ,

$$(n+1) \lambda_1(b) > \lambda_1(b) + m \lambda_1(a). \quad \text{故} = \lambda_1(n \cdot b)$$

$$> \lambda_1(m \cdot a). \quad \text{故} =$$

$$n \cdot b > m \cdot a$$

所へ (3) へ上へ式へ (1) へ加へ $n \cdot \lambda_2(b) < m \lambda_2(a)$.

故 =

$$n \cdot b < m \cdot a$$

之ハ矛盾ナル。(証了)

系. $\lambda_1(a) > \lambda_2(a) + \epsilon$ ンバ, $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{Z}_+$

定理9. 或ル $a \in S$ テ $\lambda_1(a) = \lambda_2(a) + \epsilon$ ンバ
 S 全体 テ $\lambda_1(x) = \lambda_2(x)$ 」

(証) 定理8カラ容易.

定理10. $\lambda_1 \lambda_2(x) = \lambda_2 \lambda_1(x)$ 」

(証) 定理9ヨリ, $\lambda_1 \lambda_2(a) = \lambda_2 \lambda_1(a) + \epsilon$ ンバ ヨシ,
 n_0 ンバ, $a < n_0 \lambda_1(a)$, $a < n_0 \lambda_2(a)$ ナル自然数 =
トレバ, $n \geq n_0$ ナル任意ノ自然数ニ對シ,

$$(4) \quad \begin{cases} m \cdot a \leq n \lambda_1(a) < (m+1)a \\ m' \cdot a \leq n \lambda_2(a) < (m'+1)a \end{cases}$$

ナル m, m' ガ決定スル. 定理8, 9 = ヨリ, a ハ任意ノ x
テ置キカヘラレルカラ(両辺同特=), 結局

$$m m' a \leq n^2 \lambda_1 \lambda_2(a) < (m+1)(m'+1)a,$$

$$m m' a \leq n^2 \lambda_2 \lambda_1(a) < (m+1)(m'+1)a$$

ソコテ若シモ $\lambda_1 \lambda_2(a) > \lambda_2 \lambda_1(a) + \epsilon$ ンバ, 之カラ

$$\begin{aligned} (m+1)(m'+1) \cdot a - m m' \cdot a &> n^2 \lambda_1 \lambda_2(a) \\ &\quad - n^2 \lambda_2 \lambda_1(a). \end{aligned}$$

従ツテ

$$(m + m' + 1) \cdot a > n^2 \{ \lambda_1 \lambda_2(a) - \lambda_2 \lambda_1(a) \}$$

所テ(4)カラ

$$n \cdot \{\lambda_1(a) + \lambda_2(a) + a\} \geq (n + n' + 1) \cdot a.$$

故 =

$$n \{\lambda_1(a) + \lambda_2(a) + a\} > n^2 \{\lambda_1 \lambda_2(a) - \lambda_2 \lambda_1(a)\}$$

従ッテ

$$\lambda_1(a) + \lambda_2(a) + a > n \cdot \{\lambda_1 \lambda_2(a) - \lambda_2 \lambda_1(a)\}.$$

左辺ハ n ヲ含スル, n ハイクラアモ大キクトレルカラ,

Archimedes ノ原則 = 反スル. 故 = $\lambda_1 \lambda_2(a) - \lambda_2 \lambda_1(a)$

= 0 アナケレバナラヌ. (証了)

以上ハスルテ S カ正ノ量ヲ, λ ハ (0) ナル運算ナルコトト S カ *Archimedes* ノ原則 = 従フコトノミ = ヨツテ証明サレタ.

§3. S ト $\mathbb{Z}$ トノ同型性, ソノ他

前節ノ諸定理ハ S カ連続性ヨリ弱イ *Archimedes* ノ原則 = 従フコトノミカラ証明サレタ. 次ニハ $\mathbb{Z}$ ノ各 λ = ハソノ逆カ存在スルコト, 及ビ加法 (従ツテ大小) ニツイテ S ト $\mathbb{Z}$ トカ同型ナルコトヲ証明スル. 之ニハ連続ノ公理カ本質的ノ役割ヲ持ツ.

定理 11. $\lambda \in \mathbb{Z}$ = ハソノ逆 λ^{-1} カ存在スル.

(証) $y \in S$ ナル任意ノ y ヲトル.

$\lambda(x') \leq y + \lambda x'$ ノ全体ヲ A , $\lambda(x'') > y + \lambda x''$ ノ全体ヲ B トスルハ, $S = A + B$. 且ツ $x' \in A, x'' \in B$ ナラバ $x' < x''$. 故ニソノ切断 $\alpha = (A|B)$ カキマル.

$\langle$ 假し A, B が空デ + イコトハ; $\lambda(a) < n \cdot y + n$ ト
 $r, n x_1 < a + n x_1$ トトレバ (定理4), $\lambda(n \cdot x_1)$
 $< n \cdot y$. 之レカラ $\lambda(x_1) < y$. 故 = $x_1 \in A$.
 又 $n \lambda(a) > y + n$ トトレバ, $n \cdot a \in B$.] $\lambda(z) = y$
 デ + ケレバ + ラヌ。

若し $\lambda(z) < y + 1$ バ, $y - \lambda(z) > \lambda(z') + n z'$
 が存在スル. (上ノ A が空 + ラサル証明ト同様 = シテ).
 之レカラ $y > \lambda(z + z')$. 故 = $z + z' \in A$. $z + z' > z$.
 ガカラ不合理。

又若し $\lambda(z) > y + 1$ バ, $\lambda(z) - y > \lambda(z') +$
 $n z'$ が存在スル. 之レヨリ $\lambda(z) > \lambda(z')$ 従ッテ $z > z'$.
 故 =

$\lambda(z) = \lambda(z - z') + \lambda(z')$. ヨッテ $\lambda(z) - y > \lambda(z')$
 カラ $\lambda(z - z') > y$. 故 = $z - z' \in B$. $z - z' < z$.
 ガカラ不合理。

故 = $y \in S$ = 對シ, 常 = $\lambda(z) = y, z \in S$ が存在
 スル. カ = ル z ハ 只一ツデアル (定理5 = ヨル). ソコデ
 $z_i = \lambda^{-1}(y_i)$ トスルトキ, $\lambda(z_1 + z_2) = y_1 + y_2$
 = ヨリ, $\lambda^{-1}(y_1 + y_2) = \lambda^{-1}(y_1) + \lambda^{-1}(y_2)$. 故 =
 $\lambda^{-1} \in \mathbb{Z}$. (証了)

最後 = S ト $\mathbb{Z}$ トガ (和 = ツキ) 同型 + ルコトヲ示サ
 シ. 之レ = ハ e ヲ S = 於ケル或ル一定ノ要素トシ, $a \in S$
 + ル任意ノ a = 對シ $\lambda(e) = a + n \lambda \in \mathbb{Z}$ ガ一義

的 = 存在スル事ヲ示セバヨイ事ガツカル。ヨツテ

定理12. $e, a \in S$ トラバ $\lambda(e) = a$ ナル $\lambda \in \mathbb{Z}$ ガ
丁度一ツ存在スル。」

(註) 只一ツナルコトハ定理9カラ明カデアール。

$\mathbb{Z}$ トラバ、次の様ニシテ $\mathbb{Z} = \mathbb{U} + \mathbb{V}$ ニ分ケル。

$\lambda(e) \leq a$ トラバ $\lambda \in \mathbb{U}$, $\lambda(e) > a$ トラバ $\lambda \in \mathbb{V}$.

シカラバ、 $\lambda \in \mathbb{U}$, $\lambda' \in \mathbb{V}$ ナルトキ、 $\lambda(x) < \lambda'(x)$

(定理8ニヨル) 今 x_1 ヲ一定ニ考ヘレバ、スベテノ

$\lambda \in \mathbb{U}$, $\lambda' \in \mathbb{V}$ ニツキ同時ニ $\lambda(x_1) \leq y_1 \leq \lambda'(x_2)$

トナル x_2 ナ $y_1 (\in S)$ ガ丁度一ツ存在スルコトヲ示サ
ウ。

即チ $y_1 \geq \lambda'(x_1)$, $\lambda' \in \mathbb{V}$ トナリ得ル y_1 全体ヲ
 B トシテ、 A トスレバ、 (A, B) ハ空ヲ含ミ、 $y_1 = (A|B)$
ガ定マル。 $\lambda' \in \mathbb{V}$ トスレバ、 $\lambda'(x_1) \in B$ デアルカラ、
 $y_1 \leq \lambda'(x_1)$ 。又 $\lambda \in \mathbb{U}$ トスレバ、 $\lambda(x_1) \leq y_1$ トナ
ル。(若シ $\lambda(x_1) > y_1$ トラバ $\lambda(x_1) \in B$ 故ニ $\lambda(x_1) \geq \lambda'(x_1)$ ナル $\lambda' \in \mathbb{V}$ ガ存在スル。之ハ矛盾)。カクテ
上記ノ様ニ y_1 ガ存在スル事ガツカツタ。次ニカナル y_1 ガ
只一ツナル事ヲ示サウ。

若シモカナル y_1 ガ他ニモアツタトシ、之ヲ $y_1' > y_1$
トスル。

任意ノ $\lambda \in \mathbb{U}$, $\lambda' \in \mathbb{V}$ ニ對シ、 $n \cdot (y_1' - y_1) >$
 $\lambda'(x_1) - \lambda(x_1)$ ナル n ヲトレバ、 $n \cdot \{\lambda'(x_1) - \lambda(x_1)\} =$

$\lambda^*(x)$ トスルトキ, $\lambda^* \in \mathbb{Z}$. シカラハ $\lambda(x) < \lambda(x) + \lambda^*(x)$
 $< \dots < \lambda(x) + (i-1)\lambda^*(x) < \lambda(x) + i\lambda^*(x)$
 $< \dots < \lambda'(x) \quad (1 \leq i \leq n). \quad \text{故} =$

$\lambda + (i-1)\lambda^* \in \mathbb{U}, \quad \lambda + i\lambda^* \in \mathbb{V}$
 ナル $i \quad (1 \leq i \leq n)$ カナル. 故 =

$\lambda(x) + (i-1)\lambda^*(x) \leq y_i < y'_i \leq \lambda(x) + i\lambda^*(x)$
 シカラ $y'_i - y_i \leq \lambda^*(x).$

故 = $n \cdot (y'_i - y_i) \leq \lambda'(x) - \lambda(x).$

之ハ矛盾. 故 = 端 = $\lambda(x) \leq y \leq \lambda'(x) + n y$ ハ (x 7
 キメレバ) 丁度一ツ存在スル. 之ヲ $y = \phi(x)$ トスル.

$\lambda(x_i) \leq \phi(x_i) \leq \lambda'(x_i)$ カラ

$$\lambda(x_1 + x_2) \leq \phi(x_1) + \phi(x_2) \leq \lambda'(x_1 + x_2)$$

$$\text{又} \quad \lambda(x_1 + x_2) \leq \phi(x_1 + x_2) \leq \lambda'(x_1 + x_2)$$

$\lambda \in \mathbb{U}, \lambda' \in \mathbb{V}$ ハ任意デアルカラ (上述ノ一意性 =
 $\exists$ ヲ)

$$\phi(x_1 + x_2) = \phi(x_1) + \phi(x_2)$$

故 = $\phi \in \mathbb{Z}$. 尚 $x_1 = e$ 時 $y_i = a + n$ トハ明カデ
 ナルナラ $\phi(e) = a. \quad (\text{証了})$

定理 = 於ケル e 7 一定 = スレバ, $\lambda(e) + n$ 値ト λ
 トハ一対一 = 對應スル. $\lambda(e) = a + n$ トキ, $\lambda = \lambda_a$
 トカケバ, $\lambda_{a+b}(e) = a + b = \lambda_a(e) + \lambda_b(e)$
 従ツテ定理 9 カラ $\lambda_{a+b}(x) = \lambda_a(x) + \lambda_b(x)$. 即
 チ $\mathbb{Z}$ ト S トハ和 = ツイテ同型トナル. 従ツテ 大小ノ関

係を一致スル。故ニ $\mathbb{Z}$ の公理 0, 1, 2, 3, 4, 5ヲ満た
ス正ノ量ノ体系ヲナス。

尚、問題ハ S 及 $\mathbb{Z}$ ニ於テ零及一ノ元ノ導入デア
ルガ、コレハ容易ニ形式的ニ出来ル。カクテ $\mathbb{Z}$ ハ連続
性ト数体(可換)トノ性質ヲ完備スル。残ル所ハカ
ル S ヲ $\mathbb{Z}$ カ本質的ニハ(同型性ヲ一致ト見做スト
キ)一義的ニ存在スルカトイフコトアル。ソレニハ $\mathbb{Z}$
カ無限小数(例ヘバ十進法ヲ)ヲ表ハサレルコトヲ示
セバヨイ。

終リニ識者ノ御教導ヲ切願 シツ、筆ヲ擱ク。