



Title	無限分解可能ナル分布法則ノ集合ガ正規族ヲナス為ノ條件
Author(s)	伊藤, 清
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 246, p. 1510-1522
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75019
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1087. 無限分解可能ナル分布法則ノ集合ガ 正規族ヲナス爲ノ條件

伊 藤 清 (統計局)

§ 1. G ヲ實數空間ノ上ノ確率分布法則 (以後之ヲ
單ニ分布法則ト呼ブ)ノ集合トスル。

G ガ正規族ヲナスタメノ條件=ツイテハ次ノ P. Lévy
ノ定理ガアル。

定理 (P. Lévy: *Théorie de l'addition des
variables aléatoires* p. 63)

G ガ正規族ヲナス爲ノ必要充分條件ハ

$$(1) \lim_{l \rightarrow \infty} \sup_{F \in G} \int_{|x| \geq l} F(dx) = 0$$

ナルコトアル。

今 G ガ無限分解可能ナル分布法則ノミノ集合デアル
時、 G ガ正規族ヲナスタメノ必要充分條件ヲ別ニ形ヲ求
メテ見タイ。

先ハ無限分解可能ナル確率法則ニハ P. Lévyノ定理
ニヨレバ、次ノ標準形ヲ表ハサレル。即チ $\varphi_L(z)$ ヲ L ノ
特性函数トスレバ

$$(2) \varphi_L(z) = \exp \left\{ imz - \frac{\sigma^2}{2} z^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{izx} - 1 - \frac{izx}{1+x^2} \right) n(dx) \right\}$$

$$(但し \int_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^{-0} + \int_{+0}^{+\infty})$$

茲ニ

(3) m ハ實數

(4) $\sigma \geq 0$

(5) m ハ實數空間ノ上ノ (必ずシモ有界 + ラザル) 測度ナ

$$(5.A) \quad \int_{|u| \geq 1} m(du) < \infty$$

$$(5.B) \quad \int_{|u| \leq 1} u^2 m(du) < \infty$$

而モ上ノ (4) — (5.B) ナ満ス (m, σ, n) ト無限分解可能ナル分布法測 L トノ間ニハ一對一ノ關係ガアル。コノ m, σ, n ナ L ノ三要素ト呼ビ、 m_L, σ_L, n_L ナ表ハスコトニスル。

ソコデ G ナ無限分解可能ナル分布法則ノ集合トスルトキ、 G ガ正規族ヲナスタメノ條件ナ、コノ法則ノ三要素ニ關スル條件ニ表ハスコトガ本稿ノ目的デアリ。結論ヲ先ニイフト

定理. 無限分解可能ナル分布法則ノ集合 G ガ正規族ヲナス爲ノ必要充分條件ハ

$$(6) \quad \sup_{L \in G} |m_L| < \infty$$

$$(9) \quad \sup_{L \in G} |\sigma_L| < \infty$$

$$(8.A) \quad \sup_{L \in G} \int_{|u| \geq a} n_L(du) < \infty \quad \text{for } a > 0$$

$$(8.B) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \sup_{L \in G} \int_{|u| \geq a} n_L(du) = 0$$

$$(9) \quad \sup_{L \in G} \int_{|u| \geq 1} u^2 n_L(du) < \infty$$

が同時ニ成立スルコトデアル。

§2. 先ツ最初ニ G が正規族ヲナストイフ假定カラ
(8.B) が成立スルコトヲ証明シヨウ。

若シモ (8.B) が成立シナイデ、コノ極限值 (ソノ存在ハ
明ラカ) が正数 η ナリトセヨ。

而シモ任意ノ整数 k ニ對シテ $L_k \in G$ が存在シテ、 L_k
ノ三要素 m_k, σ_k, n_k ハ

$$\int_{|u| \geq k} n_k(du) > \frac{2\eta}{3}$$

$$\text{即チ} \quad \int_k^\infty n_k(du) > \frac{\eta}{3} \quad \text{又ハ} \quad \int_{-\infty}^{-k} n_k(du) > \frac{\eta}{3}$$

ノ何レガ無限ニ多ク、 k ニ對シテ成立スル。何レデモ同
様デアアルカラ前者ノ場合ヲ考ヘル。即チ $\{k_n\}$ ノ部分列
 $\{k_p\}$ ニ對シテ

$$\int_{k_p}^{\infty} n_{k_p}(du) > \frac{\eta}{3} \quad (p=1, 2, \dots)$$

故に勿論 ($k_p \geq p + 1$ 故)

$$\int_p^{\infty} n_{k_p}(du) > \frac{\eta}{3}$$

L_{k_p} は簡単、又 $L_p = \tau$ 書き + ホシ、ソノ三要素ヲ再
ビ $m_p, \sigma_p, n_p = \tau$ 表ハセバ

$$\int_p^{\infty} n_p(du) > \frac{\eta}{3}$$

$d = \min\left(\frac{\eta}{3}, \log_e 2\right)$ トスルハ勿論

$$(1) \int_p^{\infty} n_p(du) > d > 0 \quad (p=1, 2, \dots)$$

今準備トシテ Lemma を証明スル。

Lemma 1. L, L' が無限分解可能ナル分布法

則チトキ

$$\sigma_L \leq \sigma_{L'} \quad n_L \leq n_{L'}$$

トスルハ

$$Q(L, L) \geq Q(L', L)$$

証明. 次ノ函数 $g(z)$ ハ τ 無限分解可能ナル分布法則 L' ノ特性函数ナリ。

$$\log g(z) = i(m_{L'} - m_L)z - \frac{\sigma_{L'}^2 - \sigma_L^2}{2} z^2$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{izu} - 1 - \frac{izu}{1+u^2} \right) (n_{L'}(du) - n_L(du))$$

而 $\varphi_{L'}(z) = \varphi_L(z) \varphi_{L''}(z)$, 故 $L' = L * L''$

故 = P. Lévy, 定理 = ヨリ (首掲書 p. 90)

$$Q(L', l) \leq Q(L, l) \quad (\text{lemma / 証明終})$$

諸テ

$$(2) \exp \left\{ \int_p^\infty (e^{izu} - 1) n_p(du) \right\} = \text{對應スル分布法}$$

則テ G_p ト $\vee$

$$(3) \exp \left\{ \frac{\alpha}{\int_p^\infty n_p(au)} \int_p^\infty (e^{izu} - 1) n_p(du) \right\} = \text{對}$$

應スル分布法則ヲ H_p トス. 而ラバ上, Lemma 1 = ヨ

リ (尚 (1) 式 = 注意シテ)

$$(4) Q(L_p, l) \leq Q(G_p, l) \leq Q(H_p, l)$$

$$H_p([0, \infty)) = e^{-d}, \quad H_p((-\infty, 0)) = 0,$$

$$H_p((0, p)) = 0,$$

$$H_p((p, \infty)) = 1 - e^{-d}$$

トナラバ

$$Q(L) \leq \max(e^{-d}, 1 - e^{-d}) \leq e^{-d}$$

$$(d \equiv \log_e 2 = \text{注意シテ!!})$$

$$\int_{|\lambda| \geq \ell} L_p(d\lambda) = 1 - \int_{-L+0}^{L-0} L_p(d\lambda) \geq 1 - Q(L_p, 2\ell) \\ \geq 1 - e^{-\alpha} > 0$$

故ニ前掲ノ P. Lévy ノ定理ニヨリ $\{L_p\}$ ハ正規族ヲナ
 サシ。故ニ $G \equiv$ 亦正規族デナシコトニナリ、假定ニ反
 スル。故ニ §1 (8.B) が成立スルヲ要スル。

§3. 次ニ更ニ適ンテ §1 (8.A) ヲ証明スル。今
 (8.A) が成立シナシデ、アル $a(>0)$ ニ對シテ

$$\sup_{L \in G} \int_a^\infty n_L(du) = \infty$$

トキヨ、 $b > a$ トスルバ

$$\sup_{L \in G} \int_a^b n_L(du) + \sup_{L \in G} \int_b^\infty n_L(du) \geq \sup_{L \in G} \int_a^\infty n_L(du) \\ = \infty$$

§2 ニ証明シタ所ニヨルバ充分大キイ b ニ對シテハ上
 ノ第ニ項ハ /ヨリ小サシ。故ニ右ノ b ニ對シテハ

$$\sup_{L \in G} \int_a^b n_L(du) = \infty$$

前ト同様ニ $L_1, L_2, \dots \in G$ ヲ適當ニ選出シテ (n_k
 ヲ上ト同様ニ定義シテ)

$$(i) \quad \int_a^b n_k(du) > k$$

ナラシメ得ルト假定シテヨイ。今

$$(2) \exp \left\{ \int_a^b (e^{izu} - 1) n_k(du) \right\} = \text{對應スル分布法則}$$

布法則ヲ G_k トスルヲラバ, Lemma 1 = ヲリ

$$(3) Q(L_k, l) \leq Q(G_k, l)$$

備テ G_k , 平均値ハ $M_k = \int_a^b u n_k(du)$, 標準偏差ハ

$$D_k = \sqrt{\int_a^b u^2 n_k(du)} \geq a \sqrt{k} \rightarrow 0 \text{ 特性函数, 計}$$

算 = ヲリ $\frac{1}{D_k} (G_k - M_k)$ ハ正規分布ニ近ヅクコトガ分ル。

故 =

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q(G_k, 2D_k) = \theta = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda < 1$$

D_k ハ k ト共ニ限リナク増大スルカラ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q(G_k, 2l) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} Q(G_k, 2D_k) = \theta$$

$$\therefore \lim_{k \rightarrow \infty} G_k([-l, l]) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} Q(G_k, 2l) \leq \theta$$

$$\text{故} = \sup_{l=1}^{\infty} \int_{|u| \geq l} G_k(du) \geq 1 - \theta$$

従ッテ前述ノ Lévy ノ定理ニヨリ $\{G_k\}$ ハ正規族デハナ

イ。従ッテ勿論 G ガ正規族デナクナリ, 假定ニ反スル。

故ニ §1 (8.A) ガ成立スルヲ要スル。

§4. §3ト全ク同様ノ論法ヲ §1. (7), (9) が証明
出来ル。残ル所ハ (6)ノミデアアル。

之ヲ証明スル前ニ §1. (7), (8.A), (8.B), (9) が
成立スルトキ

$$(1) \exp \left\{ -\frac{\sigma_L^2}{2} z^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iz u} - 1 - \frac{iz u}{1+u^2} \right) n_L(du) \right\}$$

= 對應スル分布法則ヲ L' トスルハ, $\{L'; L \in \mathcal{G}\}$ ハ
正規族ヲナスコトヲ証明シヨウ。

(1)ノ $\exp \{ \quad \}$ ノ中ヲ書き換ヘテ

$$(2) \quad i m'_L z - \frac{\sigma_L^2}{2} z^2 + \int_{|u|<1} (e^{iz u} - 1 - iz u) n_L(du) \\ + \int_{u \geq 1} (e^{iz u} - 1) n_L(du) + \int_{u \leq -1} (e^{iz u} - 1) n_L(du)$$

$$\text{茲ニ} = m'_L - \int_{|u|<1} \frac{u^3}{1+u^2} n_L(du) - \int_{|u| \geq 1} \frac{u}{1+u^2} n_L(du)$$

而テハ

$$(3) \quad |m'_L| \leq \int_{|u|<1} u^2 n_L(du) + \int_{|u| \geq 1} n_L(du)$$

右辺ハ 假定ニヨリ有界。故ニ $|m'_L| < C < \infty$ トスル。

次ニ

$$(4) \exp \left\{ -\frac{\sigma_L^2}{2} z^2 + \int_{|u|<1} (e^{iz u} - 1 - iz u) n_L(du) \right\}$$

= 對應スル分布ヲ H_L

$$(5) \exp \left\{ \int_{|u| \geq 1} (e^{i zu} - 1) n_L(du) \right\} = \text{對應スル}$$

ル分布 G_L

$$(6) \exp \left\{ \int_{|u| \leq 1} (e^{i zu} - 1) n_L(du) \right\} = \text{對應スル}$$

分布 G'_L

トスル。

$$(7) L' = m'_L + H_L * G_L * G_L$$

先ツ H_L トル分布ノ平均値ハ 0 デ, ヲノ標準偏差ハ

$$\sigma_L^2 + \int_{|u| \geq 1} u^2 n_L(du) \text{ デアツテ, コレハ } L \text{ が } G \text{ ノ上ヲ動ク}$$

トキハ一様ニ有界デアル。ソノ上限ヲ $C' (< \infty)$ トスル。

$$(8) \int_{|\lambda| \geq l} H_L(d\lambda) \leq \frac{C'}{l^2}$$

$$\text{次} = \int_{|\lambda| \geq l} G_L(d\lambda), \int_{|\lambda| \geq l} G_L(d\lambda) \text{ カ共} = l \rightarrow \infty \text{ ノトキ}$$

$L \in G$) = 関レテ一様ニ 0 = 近ツク ヲトヲ証明スル。

何レデモ同ジコトデアアルカテ簡着ニツイテ証明ヲスル。

$$(9) \sup_{L \in G} \int_{|u| \geq a} n_L(du) = \varphi(a)$$

トスレバ $\varphi(a)$ ハ單調非減少デ $\lim_{a \rightarrow \infty} \varphi(a) = 0$ トル

コトハ §1 ノ條件 (8.A), (8.B) = ヲリ明ラカ。

今 $[1, \infty)$ 上、測度 n を

$$(10) \quad n([a_1, a_2]) = g(a_1) - g(a_2) \\ (1 \leq a_1 < a_2)$$

を定義し

$$(11) \quad \exp \left\{ \int_{u \geq 1} (e^{iz u} - 1) n(du) \right\}$$

に對應スル分布法則 (ソノ存在は $\lim_{a \rightarrow \infty} g(a) = 0$ から出

ル) を得トシヌトキ

$$(12) \quad \int_{|\lambda| \geq l} G_L(d\lambda) \leq \int_{|\lambda| \geq l} G(d\lambda)$$

ヲ証明スルハ $\int_{|\lambda| \geq l} G_L(d\lambda)$ が $l \rightarrow \infty$ ノトキ一様 $= 0 =$

近ツクトイヘル。今 $f_L(a)$ を

$$(13) \quad \int_{u \geq a} n(du) = \int_{u \geq f_L(a)} n_L(du)$$

をヨリ定義スル。先づ $a \geq f_L(a)$ (故に $f_L(a) = 1$ ナル

a ノ値——コレヲ " b_L " として表ハス——ヨリ小ナル a = 對

シテハ $f_L(a)$ へ定義ナレトイ) ナルコトニ注意シテ置

カ。猶テ

$$(14) \quad \exp \left\{ \int_{u \geq b_L} (e^{iz u} - 1) n(du) \right\} = \text{對スル分}$$

布ヲ K_L

$$(15) \exp \left\{ \int_{1 \leq u \leq b_L} (e^{iz_u} - 1) n(du) \right\} = \text{對應スル分}$$

布ヲ K'_L

トスル。而ラバ勿論 $G = K_L * K'_L$ 。今 $K_L, K'_L =$ 従
フ互ニ独立ナ確率変数ヲ x, y トスルニ、 $x + y \wedge G =$
従フ。而ニ $x \geq 0, y \geq 0$ 。故ニ

$$(16) \int_{|\lambda| \geq l} G(d\lambda) = p(x + y \geq l) \geq p(x \geq l) \\ = \int_{|\lambda| \geq l} K_L(d\lambda)$$

故ニ

$$(17) \int_{|\lambda| \geq l} K_L(d\lambda) \geq \int_{|\lambda| \geq l} G_L(d\lambda)$$

ヲ証明スルニ、(12) が正シイコトニナル。ソノタメニ *homogeneous differential process* x_t ヲ定義シ

"1" $x_0 = 0$

"2" $x_t \wedge K_L =$ 従フ

"3" $x_t \wedge$ 階段函数デアル。

ヲ示スル。(コノ可能性ノ証明ハ近刊ノ日本数学報ニ
筆者が書イテオキマシタカラ御参照下サイ)。而ラバ區間
(a, a') ($b_L < a < a'$) ニ入ル高サヲ有スル飛躍ノ数ノ
平均ハ $n((a, a'))$ デアル。今 a ナル飛躍ヲ全部 $f_L(a)$
ニ縮小スルトキニ得ラレル process ヲ x'_t トスルト

x_t と x_s と同じ λ の $process$ を 確率 "2" / 代り =

" y_t は G_L = 従フ" コト = ナル。 $0 \leq y_t \leq x_t$ 八 頭ラカ
故 (一般 = " $0 \leq y_t \leq x_t$ " $\in$ 成立スル)

$$\int_{|\lambda| \geq l} G_L(d\lambda) = P(y_t \geq l) \leq P(x_t \geq l)$$

$$= \int_{|\lambda| \geq l} K_L(d\lambda)$$

即チ (17) を得ク。

横テ (7) = ヨリ

$$\int_{|\lambda| > c+3l} L'(d\lambda) < \frac{c'}{l^2} + \int_{|\lambda| \geq l} G(d\lambda) + \int_{|\lambda| \geq l} G'_L(d\lambda)$$

右辺ハ $l \rightarrow \infty$, トキ $L(\in G) =$ 関シテ 一様 $= 0 =$ 近
ツクカラ、前述ノ P. Lévy ノ 定理 = ヨリ $\{L'; L \in G\}$
ハ 正規族ヲナス。

§ 5. 横テ G が 正規族ヲナスヲラバ、§ 2, § 3
= ヨリ § 1 (7) — (9) が 成立スル。而ラバ § 4 = ヨリ
 $\{L'; L \in G\}$ が 正規族ヲナス。故ニ m_L が 一様 = 有
界ヲナイスルト、 G が 正規族ヲナサナコト = ナリ、
矛盾 = 陷ル。即チ § 1 (6) $\in$ 亦 成立シナケレバナ
ラナイ。

逆 = § 1. (6) — (9) が 成立スレバ § 4 = ヨリト、
集合 $\{L; L \in G\}$ が 正規族ヲナシ、§ 1 (6) = ヨリ

G 亦正规族ヲナ。

— 以上 —