



Title	ノルム環ト Segalノ定理ニツイテ I
Author(s)	岩澤, 健吉
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 246, p. 1522-1538
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75020
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1088. ノルム環ト Segal / 定理ニツイテ I

岩澤 健吉 (東京)

I. E. Segal ハサキニ任意ノ *locally compact, separable* ナ群 G ニ對シ *group ring* $R(G)$ ヲ定義シ、特ニ G ガ *abel* 群又ハ *compact* 群ナル場合ニ種々ノ興味ナル結果ヲ得マシタ。¹⁾ ソノ *compact* 群ニ關スル主ナル結果ハ深宮氏ニヨリテ簡便ナ証明ガ得ヘラレマシタ。²⁾

コノデハ G ガ一般ニ *locally compact* ナル場合ヲ考ヘ、特ニ G ノ表現ト $R(G)$ ノ表現トノ關係ヲ述ベテ見ヨウト思ヒマス。ソレハ Segalノ論文ニ於ケル定理3ノ

1) I. E. Segal, The group ring of a locally compact group, I, Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A. 27 (1940)

2) 深宮政範; Bicomact ナ群ノ群環ニツイテ, 全國紙上談話會, 第240号

擴張ニ増ルヲケデスガ我々ハ $R(G)$ ヨリ $L(G)$ ヲ
 目標ニシテ進ミマシタ(後述)。然レ *Legal* ノ証明ハ知
 ル由モアリマセンガ惡テク以下述ベルモノト大同小異ナモ
 ノデアリマセウカラ、以下ノ結果モ亦既知ノモノト思
 ハレマス。

I. ノルム環ニ関スル注意

§1. 我々ハ *Gelfand* ノノルム環³⁾ヲ用ヒテ
*gelfand, Raikov*⁴⁾ガ *abel* 群ノ場合ニ用ヒタ方
 法ニ從フコトニシマスノデ始めニ一般ノ非可換ノノルム環
 ニツイテ若干ノ簡單ノ注意ヲ述ベルコトニシマス。勿論非
 可換ノルム環ノ一般論ト云フヌヲナモノデアリマ
 セン。

先ツ一般ノノルム環 R ヲ *Gelfand, N. R.*, §1ニ
 ヲリ定義シマス。但レコノ際乘法ノ可換性ハ假定シマセ
 ン。可換性ハナクとも *N. R.*ニ於ケル代數的ナ定理ノ多
 クハ成立スルコトガ容易ニ確カメラレマス。逆元⁵⁾ト
 云フトキ左逆元ト右逆元トヲ區別セネバナラヌコト、及ビ

3) I. Gelfand; *normierte Ringe*, *Rec. Math.*, 51

(1941). コノ論文ヲ以下 *N. R.* トスル。

4) I. Gelfand and D. Raikov, *C.R. Acad. Sci. URSS*,

28(1940)

$Ideal$ = ツイテモ左- $Ideal$, 右- $Ideal$, 両側- $Ideal$
 ノ別ヲ考ヘネバトラスコト等ヲ注意スレバヨイワケデ, ソ
 ノマヲト点ヲ考慮=入レサヘスレバ N.R. / §1—§5ノ
 定理ハ凡テソノマ、成立シマス。

特 $= I_L$ ヲ任意ノ閉チク左- $Ideal$ トスレバ R/I_L ハ
 一般ニ環デハアリマセンガ必モ角 Banach 空間デ R ノ
 各元 x ハソノ (左カラノ) Operator ト考ヘラレ $x \in R$,
 $Y \in R/I_L$ = 對シ $\|xY\| \leq \|x\| \|Y\|$ トナリマス. (N.R.,
 Hilfssatz 4) 然シ可換ト場合ト本質的=異ナル点ハ單
 純ノルム環ガ必ズシモ族素数体 (或ハソノ上ノ有限次ノ
 Algebra) トトラスコトデ, コノタメ R ヲ maximal
 $Ideal$ デ割ツタ R/I ノ様子ガワカラヌコトデス。

§2. ヨツテ我々ハ先ヅ一番簡單ト有限次元ノノルム
 環ヲ調べテ見ルコトニシマス。

族素数体 K 上ノ n 次ノ全行列環ヲ K_n トカクコト
 =シ

$$x \in K_n, x = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} e_{i,j}, \quad \alpha_{i,j} \in K,$$

$e_{i,j}$ ハ行列ノ單位

=對シテ

$$(1) \|x\|^* = \left(\sum_{i,j} |\alpha_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

トオケバコノ norm =ヨリ K_n ガノルム環トナルコトハ明

カデス。(但シ $\|e\|^* = 1$ = ハナツテキナイ) ヨツテ K_n
ノ部分環ハ矢張りスベテ上ノ $norm$ = ヨリノルム環トナ
リマスガ實ハ有限次元ノノルム環ハコレ以下ニハ存在シナ
イコトガ証明サレマス。ソノ爲ニ先ヅ

補助定理 1.⁶⁾ M ヲレツノ有限 K -加群トシソノ Basis
ヲ $u_1, u_2, \dots, u_n$ トスル。 B ハ Banach 空間デ K -
加群トシテ M = 念マレテキルモノトスレバ B = 於ケル $norm$
 $\|x\|$ ハ M = 於テ定義サレル $norm$

$$\|x\|^* = \|\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n\|^* = (|\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\alpha_i \in K$$

ト等値デアイル。即チ適當ニ $C_1, C_2 > 0$ ヲトレバ B = 屬スル
任意ノ x ニ對シテ

$$C_1 \|x\|^* \leq \|x\| \leq C_2 \|x\|^*$$

トナル。

証明. $B = M$ ノトキハ

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq |\alpha_1| \|u_1\| + \dots + |\alpha_n| \|u_n\| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = C_2 \|x\|^* \end{aligned}$$

ナル故 $\|x\|^*$ カラ $\|x\|$ へノ寫像ハ連続トナリコレハ明
白デス。

一般ニハ B ノ K -Basis $v_1, v_2, \dots, v_m$ ヲト

5) コンナコトハ周知ノコトデアリマセリガ一應証明シテオキマス。

リコレヲ補充シテ M ノ Basis $v_1, v_2, \dots, v_m, w_1, \dots, w_{n-m}$
ヲツクリマス,

$$x \in M, x = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m + \beta_{m+1} w_1 + \dots + \beta_n w_{n-m}$$

ナルトキ

$$\|x\|^{**} = (|\beta_1|^2 + \dots + |\beta_m|^2 + |\beta_{m+1}|^2 + \dots + |\beta_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

トオケバ $B=M$ ナルトキノ結果ニヨリ $\|x\|^*$ ト $\|x\|^{**}$ トハ等値、特ニ
 x ガ B ニ含マレテ居レバ $\beta_{m+1} = \dots = \beta_n = 0$ デ $\|x\|^{**}$ ハ B ニ於ケル
 $\|x\|$ ノ $norm$ テ支ヘマスガ 再ビ $B=M$ ナルトキノ結果ヲ用ヒレバ
 $\|x\|$ ハ B ニ於ケル $\|x\|$ ト等値 ヨツテ結局 $norm \|x\|$ ハ
 B 内ニ $induce$ サレタ $norm \|x\|^*$ ト等値ニナリ 定理
ハ証明サレマシタ。

サテ 任意ノ有限次元ノノルム環ハ環トシテハ如論行
列環ノ部分環トナリマスカラ上ノ補助定理ニヨリ直ニ
次ノ定理が得ラレマス。

定理1. 有限次元ノノルム環ハ (1)ナル $norm$
ニ關スル全行列環 K_n ノナル部分環ト一致スル。

コノ定理ニヨリ有限次元ノノルム環ノ様子ハワカッ
タワケデスガ 尚後ヲ用ヒル定理ヲコノデ証明シテオキ
マス。

定理2. $R=K_n$ ニ於テ $\sqrt[n]{\|x^n\|} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ ナル爲
メニ必要且ツ十分ナル條件ハ環中元ナルコトデア
ル。

証明 十分ノ方ハ明白デス。ヨッテ x ガ零巾デナイ
トスレバ適當ニ y ヲトリ標準型

$$z = yxy^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & p_n \end{pmatrix}$$

ヲツクツストキ p_i ノ 0 デハアリマセン。

$$\text{コレヲ } p_k \neq 0 \text{ トスレバ } \|z^n\|^* \geq |p_k|^n$$

$$\text{ヨッテ } \lim \sqrt[n]{\|z^n\|^*} \geq |p_k| > 0 \quad \text{即チ } \lim \sqrt[n]{\|z^n\|^*} \neq 0.$$

任意ノ $norm$ ハ $\|x\|^*$ ト等値ナル故 $\lim \sqrt[n]{\|z^n\|} \neq 0$

ヨッテ $\lim \sqrt[n]{\|x^n\|} \neq 0$. ($norm$ ガ規準化サレテア

レバ $\|z^n\| = \|y x^n y^{-1}\| \leq \|y\| \|x^n\| \|y^{-1}\|$ ナル故)

§3. 前節ノ結果ヲ用ヒテノルム環ノ表現ニツイテ注
意ヲ述ベテオキマス。但シコノ表現トハ普通ノ n ヲニ
ノルム環 R カラ有限次ノ行列 n ノ K 上ノ環トシテ、準同型
寫像ヲ云フモノトシマス。一般ニ表現ヲ

$$(2) \quad x \rightarrow T(x) = \{t_{ij}(x)\} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

トシ、ソノ核即チ $T(x) = 0$ ナル如キ x ノツクル両側
 $Ideal$ ヲ M_T ト書クコトニシマス。

$\{T(x)\}$ 全体ハ行列環トシテ又 n ノノルム環ト考ヘラ
レマス。コノトキ(2)ナル寫像ガ連続ナラバ M_T ハ R デ
閉カタ $Ideal$ トナリマスガコノ逆ニ成立シマス。何トナ
レバ M_T ガ閉カテキレバ N.R. Hilfsatz 4ノ方法デ
 $R/M_T \simeq \{T(x)\} = norm \|X\|$ ヲ入レコバコノ $norm$

= 對シテハ (2) の明カ = 連続寫像トナリマス。然ルニ定理 1 = ヨレバ $\{T(x)\}$ の norm ハスベテ等値デスカラ $\|x\|$ カラ $\|T(x)\|^*$ へノ寫像モ連続トナリマス。即チ適當 = 常数 $C > 0$ フトレバ

$$(3) \quad \|x\| \geq \|X\| \geq \frac{1}{C} \|T(x)\|^*$$

特ニ

$$(4) \quad C\|x\| \geq |t_{ij}(c)|^0$$

マトメテ云ヘバ

定理 3. ノルム環 R ノ表現 (2) が連続ナルタメニ必要且ツ十分ナル條件ハ核 M_T が R デ閉ナルキルコトデアール。コノトキ R ノ任意ノ x = 對シ適當 = 常数 $C > 0$ フトレバ (4) が成立スル。

§4. 一般ノノルム環デハトテモ手が出ナイノデ以下我々ハ端ニ次ノ如キ假定ヲオイテ進ムコトニシマス。

假定 A. $I_L, I_R \nabla R$ ノ任意ノ maximal 左-乃至右-Ideal トスレバ $R/I_L, R/I_R$ ハ端 = 有限次元デアール。

サウスレバ先ガ

定理 4. 假定 A が満足サレテオレバ R ノ任意ノ maximal 両側-Ideal I = 對シ R/I = 亦端 = 有限次元, 従ツテソレハ K 上ノ全行列環 = 同型デアール。

$$(5) \quad R/I \simeq K_n$$

証明. I を含む maximal 左-Ideal I_L をと
 せよ. 假定により R/I_L は有限次元カソレハ R の元が左-
 operator として有スルカラ R の表現和群ト考ヘラレマ
 ス. コノ表現が ϕ = 対応スル両側 Ideal I' トスレバ明
 か = $I' \supset I$ デスカ I は maximal ナル故 $I = I'$
 $R/I = R/I'$ が有限次元ナルコトハコレカラワカリマス
 カソレハ K 上ノ単純環デスカラ $R/I \simeq K_n$.

コノ証明カラ又直チニ次ノコトがワカリマス.

定理5. 假定 A のモトニ任意ノ maximal 左-Ideal
 I_L ハアル maximal 両側-Ideal I を含む. maximal
 右-Ideal I_r ニ関シテモ同様.

(注意) R = 於テ定理5が成立シテキテモ必ズシニ逆 = A

が満足サレテハキマセン. (サウ云フ実例ヲツクル
 コトが出来マス) 又定理5ヲ云フニハ假定 A のウチ
 I_L カ I_r カ ドチラカダケガ成立シテキレバ十分デ
 スガ、ソレヲノ條件ガ果シテ独立ナモノカドウカハ
 ヲクワカリマセン。

定理6. 假定 A のモトニ R の元 x ノ左逆元ハ又 x ノ右
 逆元ガアリ逆モ成立スル. ヨツテコノ唯一ノ逆元ヲ x^{-1} ト
 カクコトが出来ル.

証明. x が左(右)-逆元ヲ有スルタメニ必要且ツ十
 分ナル條件ハ x が任意ノ maximal 左(右)-Ideal =

含マレスコトデアリマス。(N. R. Satz 6) 定理2ニ
ヨレバソレハ又任意, maximal 両側 Ideal I フト
ルトキ x が R/I ニ於テ maximal 左(右)-Ideal =
含マレスコト、同ジデスガ $R/I \cong K_n$ デハソレハ又
maximal 右(左) Ideal = 含マレスコト、等値(即
チ K_n ニ於テ行列式が0デナク逆元ヲ有スルコト) デスカ
ラコレデヨイワケデス。

サテ可換ノ場合ト同様ニ $\sqrt{\|x^n\|} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ ナ
ル R ノ元 x ノコトヲ一般零中元ト呼バコトニスレバ次ノ定
理ガ成立シマス。⁶⁾

定理7. 假定 A ノモトニ x ガ一般零中元ナルタメニ必
要且ツ十分ナル条件ハ R ノ任意ノ maximal 両側
Ideal I フトツタトキ x ガ R/I ニ於テ普通ノ意味デ零中ト
ナルコトデアイル。

証明. maximal 両側 Ideal I フトツタトキ (5)
ニヨル R/I ノ既約表現ノ一ツテ $T_I(x)$ トカクコトニ
シマス。maximal Idealハ閉チテキマスガ定理3ニ
ヨリ $T_I(x)$ ハ連続表現デス。

サテ任意, $x \in R$ ニ對シ

$$\|x^n\| \geq \|T_I(x^n)\| = \|T_I(x)^n\|$$

ナル故 $T_I(x)$ ガ零中ナルコト, 即チ x ガ R/I デ零中ナルコ
トハ必要條件デアリマス。逆ニ $T_I(x)$ ガ零中デアレバ任意

6) N. R. Satz 8.

$\lambda \in K =$ 對シ $T_I(\lambda x) = \lambda T_I(x)$ 也亦零中ナル故 m ヲ十分大キクトリバ $(\lambda x)^m \in I$. コレカラ $e - \lambda x$ ハ決シテ *maximal* 左-Ideal, $I_\ell =$ 含マレヲコトガ証明サレマス。

何トナレバ $e - \lambda x \in I_\ell$ トスレバ定理 2 = ヨリ

$I_\ell \supset I$ ナル *maximal* 両側-Ideal I ヲトリ $(\lambda x)^m \in I$ トシマス。サウスレバ $(\lambda x)^{m-1}(e - \lambda x) = (\lambda x)^{m-1} - (\lambda x)^m \in I_\ell$ カラ $(\lambda x)^{m-1} \in I_\ell$ ヲ得同様ニシテ $(\lambda x)^{m-2}, \dots, (\lambda x), e \in I_\ell$ トナリコレハ不合理。故ニ $e - \lambda x \notin I_\ell$. 従ッテ $e - \lambda x$ ハ左逆元ヲ有シマスが定理 6 = ヨリ

$$(e - \lambda x)^{-1}$$

ハ凡テ $\lambda \in K =$ 對シ存在スルコトニナリマス。コレカラハ可換環ノ場合ト全ク同様デ $(e - \lambda x)^{-1}$ ガ λ ノ整函数ナルコトカラ展開。

$$(e - \lambda x)^{-1} = e + \lambda x + \lambda^2 x^2 + \dots$$

$$= \text{於テ } \|\lambda^n x^n\| \rightarrow 0$$

$$\text{ヨッテ } \lim \sqrt[n]{\|x^n\|} \leq \frac{1}{|\lambda|}$$

λ ハ任意ナルカラ

$$\lim \sqrt[n]{\|x^n\|} = 0$$

トナリマス。

サテ再々可換環ノ場合ト同様ニ $R =$ 於ケル凡ベテノ *Maximal* 両側-Ideal ノ共通-Ideal ヲ R ノ根基 (*Radikal*) ト呼ブトニスレバ上ノ一般零中元ノ全

体が必ずしも根基ト一致スルワケデハアリマセンが (例へば $R = K_n$ の場合ヲ見ればヨイ) 次ノ定理が成立シマス。

定理 8. 假定 A ノモト $= R =$ 於ケル一般零巾元ノ全体ヲ N トスレバ根基 N_0 ハ $N =$ 含マレル最大ノ左(右)-Ideal 従ツテ最大ノ両側 Ideal デアル。

証明. N_0 が $N =$ 含マレルコトハ前定理ニヨリ明カデスカラ $N =$ 含マレル任意ノ左-Ideal I_L が $N_0 =$ 含マレルコトヲ云へバ十分デス。サテ任意ノ maximal 両側 Ideal I ヲトルトキ I_L/I ハ R/I ノ左-Ideal デスカ $I_L \subset N$ ナル假定ニヨリソレハ零巾元ベカリカラ成ルモノヲ従ツテ $I_L \cdot I = I$, $I_L \subset I$. I ハ任意デスカラ $I_L \subset N_0$.

定理 8 ニヨリ特ニ假定 A ノ満足サレテキルノルム場デ一般零巾元が 0 以外ニ存在シナイ場合ニハ $N_0 = 0$, 即チ R ハ準単純環デアルコトが云ヘルワケデス。

§ 5. 以上ノ如ク假定 A ヲ承認スレバノルム環ノ理論ハ代数的ノ部分ニ関スル限リアル程度ヲデ可換ノ場合ト同様ニ進ムコトが出来マスガ、位相的部分、即チ maximal Ideal = Topologie ヲ入レテ論ズルトイフマウナ部

7) $R/I \simeq K_n$ ナル故 R/I Ideal ハ 0 デナケバ idempotent ノ元ヲ含ム。

分ハソノマデハ功ヲ行キマセシ。コレハ特ニ一般ノルム
環ノ表現ノ問題ト因聯シテ今後ニ残サレタ問題デアリト思
ヒマス。

次ニ假定 A = 閉シ少シバカリ注意ヲ述べテ見マス。假
定 A ヲ満足シナイノルム環カ存在スルコトハ Hilbert
空間ニ於ケル有界作用素カラ容易ニソノ例ヲツクルコトガ
出来マス。又假定 A ヲ満足スル場合トシテハ次ノ例が知
ラレテオマス。

1. R が可換ナル場合

2. R/I_0 が有限次元ナル如キ一ツノ両側 Ideal I_0
カ存在シテ I_0 = 含マレル x = 対シテハ $A_x \cdot y = x \cdot y$,
 $A'_x y = yx$ ナル Operator A_x, A'_x が完全
連続ナル場合。

1ハ Gelfand ノ可換ノルム環ノ場合デアツテ, 2ハ
深宮氏が compact 群ノ群環ニ於テ述べラレタ場合デ
アリマス。⁸⁾

一般ニドノヤウナ條件ガアレバ假定 A が満足サレル
カト云フコトハ難カシイ問題デアラウト思ヒマス。

II. 群環 $R(G)$

§1. 群 G ハ locally compact, separable

8) 註2) 参照。ソコデノ証明ハ両側 Ideal ヲ考ヘラレタデ
スカ片側 Ideal デモ同様ニ成立シマス。

トシ μ が G 上、右-invariant + Haar、測度ト
 シマス。⁹⁾ G 上、可測函数ニツイテ L^p ($p \geq 1$)、定義及
 ヒソコニ於ケル norm

$$(6) \quad \|x(g)\|_p = \left\{ \int_G |x(g)|^p dg \right\}^{\frac{1}{p}}$$

ハ習知ノ通り。

$$x(g) \in L^p, \quad g(g) \in L^1 = \text{対シ}$$

$$(7) \quad x \times y(g) = z(g) = \int_G x(gk^{-1}) y(k) dk$$

トオケバ簡單ニ計算ニヨリ¹⁰⁾

$$(8) \quad \|z(g)\|_p \leq \|x(g)\|_p \cdot \|y(g)\|_1$$

即チ $z(g)$ ハ實際存在シテ L^p = 属スルコトが知ラレ
 マス。

$$\text{サテ } L^1 \text{ ト } L^p \text{ } (p \geq 1) \text{ ト、共通部分ヲ } L^{(1,p)} \text{ トシ}$$

$x, y \in L^{(1,p)} = \text{対シ } (7) = \text{ヨリ積ヲ定義スレバソレガ環}$
 ニナルコトハ容易ニワカリマス。ソコテ更ニ

$$(9) \quad \|x\| = \text{Max. } (\|x(g)\|_p, \|x(g)\|_1)$$

トオケバ (8) ニヨリ

9) 勿論 G が適當ニ性質ヲ有スル測度ヲ持ツ群デアレバ
locally compact, separable デナクトモヨイノデスが
 簡單、タメニ上ノ如クモテオキマス。

10) *separable, l.c.*

$$(10) \quad \|x \times y\| \leq \|x\| \|y\|$$

デ $L^{(1,p)}$ ハ 単位ヲ 有スル ト云フ 條件ヲ 除ケバ 1ルム 環
他ノ 條件ヲ 凡ベテ 満シマス。ヨツテ $L^{(1,p)}$ = 単位 e ヲ 附
加シテ

$$\lambda e + x(g), \quad \lambda \in K, \quad x(g) \in L^{(1,p)}$$

ナル 全体ヲ ツク レバ コレハ 普通ノ 様ニ シテ 1ルム 環トナリ
マス。コレヲ $R = R^{(1,p)}(G)$ トカク コトニ シマス。 G が
discrete ナ 場合ニハ 既ニ $L^{(1,p)}$ = 単位 e が 存在シ $L^{(1,p)}$
自身 1ルム 環トナル ワケデスガ 我々ハ コレヲ 1 場合ヲ 區別
シタイ コトニ シマス。

Segal ハ $R^{(1,1)}(G)$ ヲ G ノ 群環ト呼ンデ オル
デスガ $R^{(1,p)}(G)$ ハ ムシロ 補助的ノ 意味ヲ モツ モノデ
 $L^{(1,p)}(G)$ ノ 方が (有限群ノ 場合ノ 拡張ト考ヘテ
モ)

群環ノ 名ニ 相應シイノ デハ ナイデセウカ。以下ノ 我
々ノ 考察モ 目標ハ $L^{(1,p)}(G)$ ノ 方ニ 置イテ 進ミタイ ト
思ヒマス。

$R^{(1,p)}(G)$ ノ 中デ 考ヘ レバ $L^{(1,p)}(G)$ ハ $\sim$ ヲ
maximal 両側 Ideal M ヲ ツク リマス。又 $x(g) \in$
 $L^{(1,p)}$, $a \in G$ 対シ

$$(11) \quad ax(g) = x(ga), \quad xa(g) = x(ag)$$

ト 定義 スレバ $ax, xa \in$ 亦 $L^{(1,p)}$ = 属シ 特ニ $\|ax\| =$
 $\|x\|$

§2. 以下ニ於テハ $L^{(1,p)}(G)$ ノ表現ト G ノ表現
 トノ關係ヲ考ヘルコトニシマス。コノ表現トハ普通ノ
 意味ノ有限次行列ニヨル表現ヲ云フワケデスガ特ニ
 G ノ表現トシテ O -表現ヲモ許スコトニシマス。即チ
 G ノ任意ノ元 a, b ニ對シ $D(a)D(b) = D(ab)$ ヲ満足
 スル行列系 $\{D(a)\}$ ハスベテコレヲ G ノ表現ト呼バコト
 ニシ G ノ單位ガ單位行列ニ對應スルト云フコトハ要求シナ
 イコトニシマス。

サテ我々ノ目標ハ次ノ定理デアリマス。

定理9. $L^{(1,p)}(G)$ ノ連續表現 $\alpha(g) \rightarrow T(\alpha)$ ト
 G ノ有界連續表現 $a \rightarrow D(a)$ トハ次ノ如キ意味ニ
 對一ニ對應スル。

i) $L^{(1,p)}(G)$ ノ連續表現 $\alpha(g) \rightarrow T(\alpha)$ ガ與ヘラ
 レタトキ適當ニ G ノ有界連續表現 $a \rightarrow D(a)$ ヲトレ
 バ任意ノ $\alpha(g) \in L^{(1,p)}$ ニ對シ

$$(1) \quad T(\alpha) = \int_G \alpha(g) D(g) dg$$

トナル。コノ様ニ $D(a)$ ハ $T(\alpha)$ ニヨリ一意ニ定
 マリ、コレヲ $D_T(a)$ トカクコトニスル。

ii) G ノ有界連續表現 $a \rightarrow D(a)$ ガ與ヘラレタトキ(1)
 ニヨリ $T(\alpha)$ ヲツクレバ $\alpha(g) \rightarrow T(\alpha)$ ハ $L^{(1,p)}(G)$
 ノ連續表現ヲ與ヘル。 $D(a)$ ニ對應スルコノ表現ヲ
 $T_D(a)$ トカクコトニスル。

iii) i), ii) の對應ハ互ニ他ノ逆ニナッテキル。即チ任意ノ $T(x), D(a)$ = 對シ

$$T_{D_T} = T, \quad D_{T_D} = D$$

iv) 上ノ對應ヲ等値ノ表現ハ等値ノ表現ニ對應スル。即チ

$$A T_1(x) A^{-1} = T_2(x) \quad \text{ナラバ} \quad A D_{T_1}(a) A^{-1} = D_{T_2}(a)$$

$$\text{又 } B D_1(a) B^{-1} = D_2(a) \quad \text{ナラバ} \quad B T_{D_1}(x) B^{-1} = T_{D_2}(x).$$

証明。各段ニ分ケテ証明シマスガ面倒ナハ i) デケテアトハコレカラ直チニ出マス。

i) $L^{(1,p)}(G)$ ノ表現ヲ $x(t) \rightarrow T(x) = \{t_{ij}(x(g))\}$ トオイテ $t_{ij}(x(g))$ ヲ考ヘテ見マス。

$T(x)$ ハ連續表現ナル故定理 3 = ヨリ $|t_{ij}(x(g))| \leq C \|x(g)\|$ ナル常數 C ガ存在シマス。

特ニ有限ノ測度ヲ有スル集合 E ノ特性函數 $x_E(g)$ ヲトレバ

$$(13) \quad |t_{ij}(x_E(g))| \leq C \|x_E(g)\| = C \max(\mu(E), \mu(E)^{\frac{1}{p}})$$

ヨッテ適當ニ可測函數 $u_{ij}(g)$ ヲトレバⁱⁱ⁾ 上ノ如キ任意ノ E = 對シ

$$(14) \quad t_{ij}(x_E(g)) = \int_E u_{ij}(g) dg = \int_G x_E(g) u_{ij}(g) dg$$

iii) $p=1$ ナラバ $u_{ij}(g)$ ハ有界, $p \geq 2$ ナラバ差常數適當ニ $\mu(E) \leq 2$ ナル

E ガ存在シテ E ノ外デハ $u_{ij}(g)$ ハ有界 E 上デハ $L_E^{\frac{p}{p-1}}(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1) =$

屬スルコトガワカル。實ハコノトキモ $u_{ij}(g)$ ガ有界ナルコトハ以

下ノ証明ニ示ス通りデス。

$t_{ij}(x(g))$ が連続ナルコトヲ用ヒレベルカラー一般
=

$$t_{ij}(x(g)) = \int_G x(g) u_{ij}(g) dg$$

即チ $U(g) = \{u_{ij}(g)\}$ トオケル。

$$(15) \quad T(x) = \int_G x(g) U(g) dg$$

$T(x)$ ハ表現ヲスカテ $L^{(1,p)}(G)$ = 含マレル任意ノ $x(g)$,

$y(g)$ = 對シテ $T(x) T(y) = T(x \times y)$, 即チ

$$\begin{aligned} & \int x(g) U(g) dg \int y(h) U(h) dh \\ &= \int x(g h^{-1}) y(h) U(g) dg dh \end{aligned}$$

$$\text{ヨツテ } \int x(g) y(h) U(g) U(h) dg dh$$

$$= \int x(g) y(h) U(g h) dg dh$$

有限ノ測度ヲ有スル集合ノ特性函数ハ凡テ $L^{(1,p)}(G)$ =

含マレルスカラ上式カラ (g, h) -測度 0 ヲ除キ

$$(16) \quad U(g) U(h) = U(g h)$$

ヲ得マス。ヨツテ適當ニ測度 0 ナル集合 X_0 ヲトレバ

$h \notin X_0$ ナラバ測度 0 ナル集合 X_h ガ定ツテ $g \notin X_h$

= 對シ (16) ガ成立シマス。故ニ $a \notin X_0$ ノトキハ

$$T(a^{-1}x) = \int x(g a^{-1}) U(g) dg = \int x(g) U(g a) dg$$