



Title	核心群列ノ一擴張ニツイテ
Author(s)	岩澤, 健吉
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 246, p. 1555-1563
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75021
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1089. 核心群列ノ一擴張ニツイテ

岩澤 健吉 (東京)

1. 任意ノ群 G が與ヘラレタトキ G ノ核心 (Zentrum) ヲ Z_1 ノ剩餘群 G/Z_1 ノ核心ヲ Z_2/Z_1 ノ剩餘群 G/Z_2 ノ核心ヲ Z_3/Z_2 , ----- トスルトキ

$$(1) \quad 1 = Z_0 \leq Z_1 \leq Z_2 \leq Z_3 \leq \dots$$

ナル G ノ部分群列ヲ昇核心群列 (aufsteigende Zentralreihe) ト呼ビ、又 $G = Z_1$, $(G, Z_1) = Z_2$, $(G, Z_2) = Z_3$, ----- トスルトキ

$$(2) \quad G = Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq Z_3 \supseteq \dots$$

ナル部分群列ヲ降核心群列 (absteigende Zentralreihe) ト呼ブコトハヨク知ラレテキマス。但シコゝ (G, Z_i) ハ

G の Z_i は交換子群, 即ち $g \in G, z_i \in Z_i$ とき
 $(g, z_i) = gz_i g^{-1} z_i^{-1}$ 全体から生成される G の部分群であり得る。⁽¹⁾

又 (1) 上の列が有限回で切れて G の自身に達する場合、
 (2) 上の列が有限回で切れて単位群に達する場合、ハ等値
 であり得る。而してこのとき (1), (2) 上の系列の G から L に到る
 “長さ” が一致する。これが即ち G が零巾 (nilpotent)
 と呼ばれる場合であり得る。⁽²⁾

以下に於てハ上ノ如キ性質が失ハレナイモノニ核心群
 列ノ概念ヲ拡張シ、ソノニ三ノ例ト應用トヲ述ベテ見ツ
 ス。

2. $\Omega, \mathfrak{L}, L$ が G の部分群トシ L ハ $\mathfrak{L}$ の不変
 部分群, 且 $\mathfrak{L}, L$ ハ Ω の要素ヲ不変トシマス。即ち凡テ
 $a \in \Omega$ に対して

$$a \mathfrak{L} a^{-1} = \mathfrak{L}, \quad a L a^{-1} = L$$

ヨツテ a が transform する場合トモヨリ $\mathfrak{L}/L$ は一
 定ノ自己同型が與ヘラレマスが、ソノモノヲ変換テ a が
 Ω の凡テノ要素ヲ動かトキ常ニ fix されるモノヲ $\mathfrak{L}/L$
 ノ要素全体ハ明カニ $\mathfrak{L}/L$ ノ部分群ヲツクリマスが、コノ
 部分群ニ含マレル最大ノ $\mathfrak{L}/L$ ノ不変部分群ヲ $\mathfrak{L}^*/L$

(1) H. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie

I, (1937) S. 118. 参照。

(2) 註(1)ニ於ケル S. 105 参照。

トシマス。即チ $\mathfrak{L}^*$ ハ $\mathfrak{L}$ ノ性質ヲ有スル $\mathfrak{L}$ ノ部分群デヌ
ソレニヨツテ特徴付ケラレマス。

(i) $\mathfrak{L}^*$ ハ $\mathfrak{L}$ ノ不変部分群デアール。

(ii) $(\mathfrak{O}, \mathfrak{L}^*) \subseteq \mathfrak{L}$ 。

(iii) $\mathfrak{L}$ ノ不変部分群 $\mathfrak{A}$ ガ $(\mathfrak{O}, \mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{L}$ デアルナ
ラバ $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{L}^*$ 。

ユノ $\mathfrak{L}^* \in \mathfrak{O}$ ニモ $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}$ リ不変トナリマス。ユノ $\mathfrak{L}^*$ ガ

$$\mathfrak{L}^* = (\mathfrak{O}; \mathfrak{L}, \mathfrak{L})$$

ト書リコトニシマス。

次ニ $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{L}$ ヲ矢張り $\mathfrak{O}$ ノ部分群トシ $\mathfrak{L}$ ハ又 $\mathfrak{O} =$
 $\mathfrak{O}$ リ不変トシマス。

即チ $a \in \mathfrak{O} = \mathfrak{L}$ ナラバ $a \mathfrak{L} a^{-1} = \mathfrak{L}$ 。コノトキ明カニ
 $(\mathfrak{O}, \mathfrak{L})$ ハ $\mathfrak{L}$ ノ部分群トナリマスガ一般ニハ不変部分
群デハアリマセン。ヨツテ $\mathfrak{L} =$ 於テ $(\mathfrak{O}, \mathfrak{L})$ ガ生成サ
レタ $\mathfrak{L}$ ノ不変部分群ヲ

$$[\mathfrak{O}, \mathfrak{L}]$$

ト書クコトニシマス。即チ $[\mathfrak{O}, \mathfrak{L}]$ ハ $\mathfrak{L}$ ガ $\mathfrak{O}$ ニヨリ不
変ナルトキニ限り意味ヲ有シ且ツソレハ $\mathfrak{L}$ ノ不変部分群
デアリマス。特ニ例ヘバ $\mathfrak{O}, \mathfrak{L}$ ガイザレモ $\mathfrak{O}$ ノ不変部
分群デアルマヨリナ場合ハ $[\mathfrak{O}, \mathfrak{L}]$ ハ $(\mathfrak{O}, \mathfrak{L})$ ト一致シ
マス。

サデ $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ ヲ $\mathfrak{O}$ ノ部分群トシ且ツ $\mathfrak{L}_1$ ガ $\mathfrak{L}_2$ ノ各要
素ニヨリ不変ナルトキ $\mathfrak{L}_1$ ノ $\mathfrak{L}_2$ -核心群列 ヲ次ノ如クニ

定義シマス。

定義. $f_0 = 1$, $f_1 = (\mathcal{N}; h_1, f_0)$, $f_2 = (\mathcal{N}; h_2, f_1)$,

----- トスルトキ

$$(3) \quad f_0 = 1 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$$

ヲ h_1 , $\mathcal{N}$ -昇核心群列ト呼ビ $f_1 = h_1$, $f_2 = [\mathcal{N}, f_1]$, $f_3 = [\mathcal{N}, f_2]$, ----- トスルトキ

$$(4) \quad f_1 = h_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \dots$$

ヲ h_1 , $\mathcal{N}$ -降核心群列ト呼ブ。

又系列

$$(5) \quad h_1 = h_1 \geq h_2 \geq h_3 \geq \dots$$

ガ $[\mathcal{N}, h_i] \leq h_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots$)ヲ満足スル時
之ヲ $\mathcal{N}$ -核心群列ト呼ブ。

f_i, g_i ハ何レモ h_1 ノ不変部分群デ且ツ $\mathcal{N}$ ニヨリ不変
デスカラ定義ガツダケラレルノデアリマス。ソコデ次ノ定
理ガ成立シマス。

定理1. h_1 ノ $\mathcal{N}$ -昇核心群列 (3)ガ有限回ノ後 $h_1 =$
達スルコト $\mathcal{N}$ -降核心群列 (4)ガ有限回ノ後単位群
1ニ達スルコトハ等値デアッテ両モコノトキ両系
列ノ長サハ相等シクナル。コノトキ h_1 ヲ $\mathcal{N}$ -環巾 ($\mathcal{N}$ -
nilpotent)ト呼ブ。

コノ (3)ヌハ (4)ノ長サトハ $f_{c+1} \neq h_1$, $f_c = h_1 + \mathcal{N}C$
或ヒハ $f_c \neq 1$, $f_{c+1} = 1 + \mathcal{N}C$ ヲ云フノデス。証明ハ普

通、場合ト全ク同様デスカラ省略シマス。⁽³⁾

又 $\mathcal{G}$ 7 $\mathcal{H}$ デ不変ナル $\mathcal{H}_i$ / 任意、部分群トスレバ

$$g_i(\mathcal{G}) \leq g_i(\mathcal{H}_i),$$

特ニ $\mathcal{G}$ が $\mathcal{H}_i$ / 不変部分群ナラバ

$$g_i(\mathcal{H}_i/\mathcal{G}) = g_i(\mathcal{H}_i) \mathcal{G}/\mathcal{G}$$

ナルコトモ明カデス。ソノ他 $\mathcal{H}_i$, $\mathcal{H}_j$ 等ニ若干ノ制限ヲ
オケバ Zassenhaus / 教科書ニアルヤウナコトハ
大抵成立シマス。

3. 特ニ $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}$ トオケバ $\mathcal{G}$ / 任意、部分群 $\mathcal{H}$ =
對シ上記核心群列ヲツクルコトが出来マス。今 $\mathcal{H}$ トシ
テ $\mathcal{G}$ / 一ツノ p -Sylow 群ヲトッテ考ヘルコトニシマ
ス: $\mathcal{H} = \mathcal{P}$. p -Sylow 群ハ凡テ互ニ共軛デス
カラ容易ニ知ラル、如ク、ドノ p -Sylow 群ヲトッテモ
出来ル。

$\mathcal{P}$ -核心群列ハ同一デアリマス。先ツ $\mathcal{P}$ が $\mathcal{G}$ / 不
変部分群デアル場合ヲ考ヘルコトニスレバ, $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}$,
 $\mathcal{G}_2 = [\mathcal{P}, \mathcal{G}_1] = [\mathcal{P}, \mathcal{G}]$ デアルガ $\mathcal{P}$ ハ不変部分群
デスカラ $\mathcal{G}_2 \leq \mathcal{P}$, コツテ $(\mathcal{P}, \mathcal{G}_2) \leq (\mathcal{P}, \mathcal{P})$ デアリマ
スカ $(\mathcal{P}, \mathcal{P})$ ハ $\mathcal{G}$ / 不変部分群ナル故定義ニヨリ

$\mathcal{G}_3 = [\mathcal{P}, \mathcal{G}_2] \leq (\mathcal{P}, \mathcal{P})$. 同様ニシテ $\mathcal{G}_4 = [\mathcal{P}, \mathcal{G}_3]$
 $\leq (\mathcal{P}, (\mathcal{P}, \mathcal{P}))$, ----- サテ $\mathcal{P}$ ハ p -群, 従ッテ普通ノ

(3) 註(1)参照。

意味が空集中ル故 $(\mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \dots, (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1), \dots))$ ハ イッカ
 /トナル。ヨッテ $\mathcal{F}_1$ モ遂ニ /トナル。即チ $\mathcal{G}$ ハ $\mathcal{F}$ -零
 中デアリマス。

次ニ逆ニ $\mathcal{G}$ が $\mathcal{F}$ -零中デアルトキ $\mathcal{F}$ が $\mathcal{G}$ ノ不変部
 分群デアルコトヲ証明スル。 $\mathcal{G}$ ノ $\mathcal{F}$ -階核心群列ノ長
 サヲ C トシテ C ニ関シテ帰納法ヲ用ヒルコトニシマ
 ス。

先カ $C=1$ ナラバ $\mathcal{F}_2=1$ 。即チ $[\mathcal{F}, \mathcal{G}]=1$ デ $\mathcal{F}$ ハ
 $\mathcal{G}$ ノ核心ニ属スル故コレハ明カデス。ヨッテ $C=1$ ノ時
 成立シタト假定スレバ長サ C ノ場合ニハ $\mathcal{G}/\mathcal{F}_C$; p -Sylow
 群 $\mathcal{F} \cdot \mathcal{F}_C/\mathcal{F}_C$ ハ $\mathcal{G}/\mathcal{F}_C$ ノ不変部分群、従ッテ $\mathcal{F} \cdot \mathcal{F}_C$ ハ $\mathcal{G}$
 ノ不変部分群デアリマスガ $[\mathcal{F}, \mathcal{F}_C]=1$ 、即チ $\mathcal{F}$ ハ $\mathcal{F}_C$ ノ
 各要素ト交換可能、従ッテ $\mathcal{F}$ ハ $\mathcal{F} \cdot \mathcal{F}_C$ ノ不変部分群、
 ヨッテ特性部分群ナル故、ソレハ又 $\mathcal{G}$ ノ不変部分群デア
 リマス。

ヨッテ $\mathcal{G}$ が $\mathcal{F}$ -零中ナルコトヲ又 p -零中ト言フコト
 ニスレバ次ノ定理が成立シマス。

定理2. $\mathcal{G}$ ノ p -Sylow 群 $\mathcal{F}$ が $\mathcal{G}$ ノ不変部分群ナ
 ルケレバ必要且ツ十分ナル條件ハ $\mathcal{G}$ が p -零中ナ
 ルコトデアル。

$\mathcal{G}$ 自身普通ノ意味デ零中ナラバ勿論凡テノ p -對レ p -
 零中トナル故上、定理ニヨリ $\mathcal{G}$ ノスベテノ Sylow 群ハ不
 変部分群デ $\mathcal{G}$ ハソレヲノ直積トナリマス。コレハ良ク知

ラレタ結果デアリマス。⁽⁴⁾

4. 次 = H を任意1群トシ σ の H 上の自己同型群 (又 H の部分群) トシマス。 H ト σ のトカラ所謂 holomorphic の σ -ツクルバ $H_\sigma \in \sigma$ の H 上共 = σ の部分群デ而モ H_σ ハ σ の H 上ヨリ不変トナリマス。ヨツテ H_σ の H 上核心理列 σ -ツクルコトが出来ルワケデス。特ニ H が Abelian 群デアル場合ハ H_σ の H 上昇核心理列ハ、ハッキリシタ意味ヲ有シマス。即チ $\sigma_0 = 1$, σ_1 ハ H の要素デ σ 上属スル自己同型ニヨリ変ラヌモノノ全体, σ_2 ハ H/σ_1 の要素デ σ 上属スル自己同型デアラヌモノノ全体, ----- デアリマス。

例ハバ H が Abelsche p -Gruppe トシ σ ハ

$$\sigma: x \rightarrow x^{1+p}, x \in H$$

ナル如キ自己同型 σ カラ生成サレル群トシマス: $\sigma = \{\sigma\}$. 然ラバ容易ニ分ルベク = σ_1 ハ $x^p = 1$ ナル x の全体, σ_2 ハ $x^{p^2} = 1$ ナル x の全体, ----- トナリマス。又コノトキハ

$$(\sigma, x) = x^\sigma x^{-1} = x^p$$

ナル故 σ_2 ハ x^p の全体, σ_3 ハ x^{p^2} の全体, ----- トナリ
特ニ H が有限群ナラバソレハ σ 上昇核心理列ノ意味
モコノ特ニ明カデアリマス。

次 = σ を任意1群, σ の σ -Einselémentヲ有スル

(4) 註1 = 於ケル S. 104 参照。

任意ノ可換環トシ $\mathcal{R}(\mathcal{G})$ ヲソノ上ノ $\mathcal{G}$ ノ群環トシマ
ス。 $\mathcal{R}(\mathcal{G})$ ヲ左 $\mathcal{G}$ -加群ト考ヘタトキ右カラ $\mathcal{G}$ ノ要素ヲ
掛ケルコトニヨリ $\mathcal{R}(\mathcal{G})$ ノ一ツノ作用素同型ガ得ラレマ
ス。 ヨツテ $\mathcal{L}_{\mathcal{G}} = \mathcal{R}(\mathcal{G})$, $\alpha = \mathcal{G}$ ト考ヘテ核心群列ヲ考
ヘルコトガ出来マス。 コノトキ $\mathcal{G}_2$ ハ容易ニ知ラレル如ク

$$x - x\sigma, \quad x \in \mathcal{R}(\mathcal{G}), \quad \sigma \in \mathcal{G}$$

ナル要素全体カラ生成サレタ $\mathcal{R}(\mathcal{G})$ ノ部分群デソレハ群
環ノ要素トシテ

$$y = \sum_{\sigma \in \mathcal{G}} \alpha_{\sigma} \sigma$$

トオクトキ

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{G}} \alpha_{\sigma} = 0$$

トナル如キ y ノ全体デ $\mathcal{R}(\mathcal{G})$ ノ両側-Ideal $\mathcal{I}$ ヲ
ツクリマス。

$$\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}$$

然ルトキ又 $\mathcal{I}_3$ ハ

$$x - x\sigma, \quad x \in \mathcal{I}, \quad \sigma \in \mathcal{G}$$

ノ全体デ容易ニ知ラレルヤ $\mathcal{I} = \mathcal{I}^2$ ト一致シマス。 以下同
様ニシテ $\mathcal{I}_4 = \mathcal{I}^3 \dots$, 即チ $\mathcal{R}(\mathcal{G})$ ノ $\mathcal{G}$ -降核心
群列ハ

$$(6) \quad \mathcal{R}(\mathcal{G}), \mathcal{I}, \mathcal{I}^2, \mathcal{I}^3, \dots$$

トナリマス。

特ニ $\mathcal{G}$ ガ p -群デ $\mathcal{R}$ ガ標数 p ナル有限体デアレ

$\mathcal{R}(G)$ と G と、Isomorphik モ亦 p -群テ、從
 ヲテ零中ナル故 $\mathcal{R}(G)$ ハ G -零中、ヨツテ (b) トル系列
 ハイッカ単位群トナル; $\mathcal{R}^c = 1$. コレカラ直チニ次ノ定
 理が得ラレマス。

定理3. G ヲ p -群, $\mathcal{R}$ ヲ標数 p ナル有限体トシ,
 又群環 $\mathcal{R}(G) =$ 於テ標数ノ和ガ0トナル如キ要
 素全体カラナル両側-Ideal ヲ $\mathcal{R}$ トスレバ $\mathcal{R}$ ハ
 $\mathcal{R}(G)$ ノ根基 (Radikal) ナル。(5)

-
- (5) S. A. Jennings, The structure of the group
 ring of a p -group over a modular field,
 Trans. Amer. Soc. 50, 1941, p. 175-185 参照。