



Title	淡中氏ノHauptgeschlechtssatz im Minimalen ニツイ テノー注意
Author(s)	中山, 正
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 247, p. 1596-1602
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75024
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1092. 淡中氏ノ Hauptgeschlechtssatz
im Minimalen = ツイテノ一注意

中山 正(名大)

淡中氏ハ談話 1046 = オイテ, 大変興味アル Haupt-
geschlechtssatz im Minimalen (Noether
トハ違ツタ所!) ヲ証明シテ居ラレマス。即チ $\mathbb{F}$ 進数体
 $\mathbb{F}$ 上ノ ある 拡大 $K/\mathbb{F}$, ソコノ因子圏 α_{σ}, τ デ
對應スル接合積ガ多元体ニナルヤウナモノヲ考ヘル。ソ
ノトキ $K/\mathbb{F}$ (A) = / + 元 A ハ常ニ $\mathbb{F}^{\times}$ ノ形
ノ元イクツカ, $\alpha_{\sigma}, \tau / \alpha_{\tau}, \sigma$ ナル形ノ元イクツカノ積ニ
ナル (逆ニ成立ツ) トイフノガ淡中氏ノ定理デアリマ
ス。

以下コレノ $K/\mathbb{F}$ ガ一般ノ ある 拡大デアール場合ハ
ノ拡張ヲ考ヘヨット思ヒマス。但シ上記定理ノ拡張ヲス
ルトスレバ, 淡中氏ノ指摘シテ居ラレマスヤウニ, 交換
子群ノオニツイテイタスノガ意味ノアル拡張デアリマセウ
ガ, 以下ハ少シ形式的ナ單ニ因子圏ニツイテノ興味カラ
ノ拡張デアリマス。

先ヅ因子圏ハ以下デハ淡中氏ノト係數ノ左右ヲカヘ
テ, 従ツテ

$$\alpha_{\rho, \sigma \tau} \alpha_{\sigma, \tau} = \alpha_{\rho \sigma, \tau} \alpha_{\rho, \sigma}^{\tau}$$

ノ形ニトツテオキマス。サテ

L ヲ p 進数体, K/L ヲ p ガ r 回拡大デソノ r 回ある
群 $\mathcal{O}_f$, $\alpha_{\sigma, \tau}$ ヲ K/L ノ因子団デ對應スル接合積が
多元体ニ $\tau \in \mathcal{O}_f$ トスル。シカラバ $N_{K/L}(A) = 1$ ナル
元 A ハ $\tau =$

$$L^{1-p} \quad (L \in K, p \in \mathcal{O}_f)$$

ナル形ノイクツカノ元, ソレカラ

$$\frac{b_{\sigma, \tau}}{b_{\tau, \sigma}} \left(\begin{array}{l} \sigma, \tau \in \mathcal{O}_f, \text{シカシテ } (b) \wedge (a) = \\ \text{同伴: } (b) \sim (a) \text{デアリ, シカシ} \\ \text{テ} \\ b_{\sigma, \tau} / b_{\tau, \sigma} = 1 \end{array} \right)$$

ナル形ノ元イクツカ, ノ積トシテ表ハサレル, 逆モ成
立ツ。

トイフノガ証明シヨウトスル拡張デアリマス。(コ

$\tau = b_{\sigma, \tau} \prod_{p \in \mathcal{O}_f} b_{\sigma, p}$ ノ略記)。特ニモシ $\mathcal{O}_f$ があ

ーベリ的ナラバ上ノ括弧ノ中ノ最後ノ附帯條件ハ $\tau = 1$
久サレテ居リ, マタ $(b) \sim (a)$ ナルトキハ

$$b_{\sigma, \tau} = a_{\sigma, \tau} l_{\sigma}^{\tau} l_{\tau} / l_{\sigma \tau}$$

デ(又ハ $\mathcal{O}_f$ があーベリトシテ)

$$\frac{b_{\sigma, \tau} / b_{\tau, \sigma}}{a_{\sigma, \tau} / a_{\tau, \sigma}} = \frac{l_{\tau}^{1-\sigma}}{l_{\sigma}^{1-\tau}}$$

トナツテ、コノ比ハ $b^{1-\lambda}$ 、方ニ吸収サレマスカラ (a)
ト同伴ナモ、ヲ色々採ル必要ハナク、(a)ノミデヨク、從
ツテ淡中氏ノ定理ノ形ニナルヲケデアリマス。

ナホ、(一般ノガリある場合ニモドツテ) 上記ノ括弧
ノ中ノ附帶條件ハタゞあへばある時ニ常ニミクスレテホル
コトガ眼ニ見ヘル形ニカイタスデアリマシテ、

$$b_{p, \sigma} b_{\sigma, \sigma} = b_{p\sigma, \sigma} b_{p, \sigma}$$

(ノ p, σ フソレダレ σ, p ニカヘタ式) オテ直チニワカ
ル

$$N_{K/E} (b_{p, \sigma} / b_{\sigma, p}) = b_{\sigma p, \sigma} / b_{p\sigma, \sigma}$$

ナド關係ガ示ス如ク、單ニ $N_{K/E} (b_{\sigma, \sigma} / b_{\sigma, \sigma}) = 1$

ナル如キ $b_{\sigma, \sigma} / b_{\sigma, \sigma}$ ト云フコトニスギマセソ。從ツテ

定理ノ逆ノ方ハ勿論自明デアリマス。

サテ、定理ノ証明ハ、大体淡中氏ノ証明ノ容易ナ旋
張ニスギマセソ。タゞ先ツ、淡中氏ハ K/E ガ *Zyklus-*
lisch ナル如キ中間体 K 、ヲトツテ居ラレマスガ、
 K/E ガ *Zykluslisch* ナル如キ K 、ヲトツテモ大体似タキ
ヲニテ証明サレルコトニ注目シマス。(ソレヲカウシ
マス、例ノの互ニ類群ト因子群ノ關係ハ *Zykluslisch*
ニオガラナイ一般ノ場合ヲ使ハネバナラナイ代リニ、
Chevalley ノ定理ハ使ハナイデ済ミマスカラ幾分

簡単デアルトモイヘマセウ。

シカシ、のるむ類群ト因子-圏ノ関係ノ定理ノ証明
 = Chevalley, ノ定理ヲ使フノデスカラ勿論結局同
 ジコトデセウガ。ソノヤウニ考ヘテ、ソシテソレヲ上ノ
 如ク一般ガリある抗大ノ場合ニマデ拡張シマス。

証明ハ、先ツ $K/\mathbb{C}$ ヨリ低イ次数ノ拡大ニ対シ
 ハ我々ノ主張ガ成立ツト假定シマス。而シテ θ ハ可
 解デアルカタ、 $K \supset \mathbb{C} \supset \mathbb{C} + \mathbb{C}$ 巡回抗大 $\mathbb{C}/\mathbb{C}$ ヲトル。
 $\mathbb{C}$ = 對應スル不変部分群ヲ云、ソシテ

$$\theta = \theta + \theta \zeta + \theta \zeta^2 + \dots + \theta \zeta^{m-1}$$

トスル。

サテ $N_{K/\mathbb{C}}(A) = 1$ トスル。シカラハ $N_{K/\mathbb{C}}(A)$,
 $N_{\mathbb{C}/\mathbb{C}}$ ハ1デカタ

$$(1) \quad N_{K/\mathbb{C}}(A) = \mathbb{C}^{1-\zeta} \quad (\zeta \in \mathbb{C})$$

トナル。然ルニ $(a) \theta$ ハ $K/\mathbb{C}$ = 於ケル多元体 = 對
 應スル因子圏デカタ、因子圏トのるむ類群トノ関係ノ定
 理 (秋月, 中山 Annalen 112) ヨリ適當ニ $\theta \in \theta$
 (mod θ' デキマル) ヲトレバ

$$\mathbb{C} \equiv a_{\mu, \theta} \pmod{N_{K/\mathbb{C}}^*}$$

即チ

$$(2) \quad \mathbb{C} = a_{\mu, \theta} N_{K/\mathbb{C}}(c) \quad c \in K$$

デアル。従って

$$(3) \quad z^{1-\zeta} = a_{\mu, \zeta}^{1-\zeta} \cdot N_{K/\mathbb{Z}}(c^{1-\zeta})$$

デアル。然るに

$$\begin{aligned} a_{\mu, \zeta}^{1-\zeta} &= a_{\mu, \zeta} / a_{\mu, \zeta}^{\zeta} = \prod_{\nu \in \zeta} (a_{\mu, \nu} / a_{\mu, \nu}^{\zeta}) \\ &= \prod_{\nu \in \zeta} (a_{\mu, \nu} / a_{\mu, \nu \zeta} a_{\nu, \zeta} a_{\mu \nu, \zeta}^{-1}) = a_{\mu, \zeta} / a_{\mu, \zeta \zeta} \\ &= \prod_{\nu \in \zeta} (a_{\zeta, \mu, \nu} a_{\zeta, \mu}^{\nu} a_{\zeta, \mu \nu}^{-1} / a_{\mu \zeta, \nu} a_{\mu, \zeta}^{\nu} a_{\zeta, \nu}^{-1}) \\ &= a_{\zeta, \mu, \zeta} a_{\zeta, \mu}^{\zeta} a_{\zeta, \zeta}^{-1} / a_{\mu \zeta, \zeta} a_{\mu, \zeta}^{\zeta} a_{\zeta, \zeta}^{-1} \\ &= N_{K/\mathbb{Z}}(a_{\zeta, \mu} / a_{\mu, \zeta}) \cdot a_{\zeta, \mu, \zeta} / a_{\mu \zeta, \zeta} \end{aligned}$$

デアル。----- (4)

さて (2) = 同伴 + アル因子 (4) を考へル。

$$b_{\sigma, \tau} = a_{\sigma, \tau} \cdot l_{\sigma}^{\tau} l_{\tau} / l_{\sigma \tau}$$

エレ = (4), 右辺, 第一項 = 相消スルモノハ

$$\begin{aligned} b_{\zeta, \mu, \zeta} / b_{\mu \zeta, \zeta} &= (a_{\zeta, \mu, \zeta} l_{\zeta, \mu}^{\zeta} l_{\zeta} / l_{\zeta \zeta}) \\ &\div (a_{\mu \zeta, \zeta} l_{\mu \zeta}^{\zeta} l_{\zeta} / l_{\zeta \zeta}) \\ &= (a_{\zeta, \mu, \zeta} / a_{\mu \zeta, \zeta}) \cdot N_{K/\mathbb{Z}}(l_{\zeta, \mu} / l_{\mu \zeta}) \end{aligned}$$

デアル。今 $\gamma = 1$ 場合ヲ考へル。

(i) $\zeta/\mu = \mu/\zeta$ の場合. この場合 $\sigma \in \Gamma$ (4) の右辺の第二因子は 1 から, $(a_{\sigma, \tau})$ より, $(b_{\sigma, \tau})$ となる

$$(5) \quad b_{\mu, \zeta}^{1-\zeta} = N_{K/\mathbb{Z}}(b_{\zeta, \mu} / b_{\mu, \zeta})$$

が成立ッテキル。

(ii) $\zeta/\mu \neq \mu/\zeta$ の場合. (4), (3), (1) = 3 より

$$a_{\zeta, \mu, \zeta} / a_{\mu, \zeta, \zeta} = N_{K/\mathbb{Z}}(A \cdot c^{\zeta-1} \cdot (a_{\zeta, \mu} / a_{\mu, \zeta})^{-1})$$

即ち, $\sigma \in \Gamma$ $a_{\zeta, \mu, \zeta} / a_{\mu, \zeta, \zeta} = N_{K/\mathbb{Z}}(f)$ ($f \in K$)

であるから $b_{\zeta, \mu} / b_{\mu, \zeta} = f^{-1}$ と μ を σ に (b_{σ}) を τ に

変 (これら 勿論可能), この場合, $b_{\zeta, \mu, \zeta} / b_{\mu, \zeta, \zeta}$

は σ と τ の μ により (5) が成立ッ. μ と σ は Γ の元

である (a) ~ (b) となる $b_{\sigma, \tau}$ は (5) となる σ がある. σ

が上記の σ の類群 Γ の代表元 σ である σ の σ となる σ である

$$(6) \quad Z = b_{\mu, \zeta} N_{K/\mathbb{Z}}(d), \quad d \in K$$

である. σ は (5) と併せて

$$\begin{aligned} (7) \quad N_{K/\mathbb{Z}}(A) &= Z^{1-\zeta} = b_{\mu, \zeta}^{1-\zeta} \cdot N_{K/\mathbb{Z}}(d^{1-\zeta}) \\ &= N_{K/\mathbb{Z}}(b_{\zeta, \mu} / b_{\mu, \zeta} \cdot d^{1-\zeta}) \end{aligned}$$

である。

よって $K/\mathbb{Z} = \sigma$ して我々, 主張が成立ッ σ である

解法ノ假定ニヨリ $A \cdot (b_{\varepsilon, \mu} / b_{\mu, \varepsilon} \cdot d^{1-\varepsilon})^{-1}$ ハ

$b'^{-\lambda} (\lambda \in \mathcal{L})$ ノ如キ形ノ元イッツカ, $b'_{k, \lambda} / b'_{\lambda, k}$

(但シ $(b'_{k, \lambda}) \sim (a)_{\mathcal{L}}$, $b'_{k\lambda, \mathcal{L}} / b'_{\lambda k, \mathcal{L}} = 1$)

ナル如キ形ノ元イッツカノ積トナル. シカレモ $\gamma = (b'_{k, \lambda})$

ハ勿論 $(a_{\sigma, \varepsilon})$ 全体ト同伴ナ $K/\mathbb{Q}$ ノアル因子場 $(b'_{\sigma, \varepsilon})$

ノ $\mathcal{L}$ ノ部分トナルハ明カ. シカレソノ際上,

$N_{K/\mathbb{Q}}(b'_{k, \lambda} / b'_{\lambda, k}) = 1$ ト同値ナ條件カラ勿論

$N_{K/\mathbb{Q}}(\quad) = 1$ トナリ, 即チ $b'_{k\lambda, \sigma} / b'_{\lambda k, \sigma} = 1$

デアイル. 従ツテ全部ノ $N_{K/\mathbb{Q}}$ フトレバ $N_{K/\mathbb{Q}}(b_{\varepsilon, \mu} / b_{\mu, \varepsilon})$

$= 1$ モワカル.

ヨツテ A 自身ガ我々ノ欲シヲキヌメウナ形ニナル.

カクテ定理ガ帰納法ヲ証明サレル.

以上, 前述ノ如クイサカ邪道ナ拡張デアリマスガ
ソシテ容易ナ拡張ニスギマセンガ, 兎ヒツキマシタマフ
御報告イタシマス. 考ヒ違ヒモアルカモ知レマセン. 御叱
正ヲ乞ヒマス.