



Title	汎函数列ノ擴張ニツイテ
Author(s)	中村, 正弘; 角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 247, p. 1603-1611
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75025
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1093. 汎函数列ノ擴張ニツイテ

中 村 正 弘
角 谷 静 夫 (阪大)

初メハツマラナイ問題ダッタノデス。

Pettisノ定理——コウ云ツテイ、ノカドウカ知リマセンガ——¹⁾ヲ証明シヨウトシタノが事ノ始マリダッタノデス。洲之内——中村ノ証明²⁾が長キヤルト思ツタノデ、著者ノ一人(中村)ガコレヲ Gelfandノ compactness criterionヲ用ヒテミヨウトイフ氣ニナツタノデス。ソレハ Boolean algebra $B_\lambda = \{e_\lambda\}$ ニ完全加法測度ガ定義シレテキタトキ、 $|e| \rightarrow 0$ ニ對シテ $X(e) \rightarrow 0$ (弱)ガ判ツテキルノデスカラ $S = \{X(e) | e \in B\}$ ガ B -空間中デ compactトイフコトヲ云ヘバ充分ダト云フコトハ判リ切ツタ節デスカラ……

トコロデ Gelfandノ定理³⁾ハコウ書イテアツタノデス。

B 空間 E ノ 点集合 S ガ compactデアラルクメ、必要充分條件ハ任意ノ 0 ニ非收斂スル汎函数列(勿論線型デス。以下同様) $\{f_n\}$ ニ對シテ $\{f_n(x) | x \in S\}$ ガ S 上デ一樣收斂スルコトデアアル。

ソコデ出来タト思ツタノデス。Vitali-Hahn-Saksノ定理⁴⁾ニヨレバ $f_n X(e)$ ハ実数値ノ函数トシテ一樣收

録 + / デスカラ, トコロボソケハ問屋ガ下シテクレズ,

Gelfand ノ 定理ニハ空間 E / 可分性ガ落テキタ / ガス。⁵⁾

コノ = 至ッテ問題ガ変ッテシマッタ / デス。 $X(e)$ / 値域ガ可分トハ限リマセンカラ Gelfand-Phillips / 定理ヲソノマニハ使ヘ + イワケデス。ソコデ $|e_n| \rightarrow 0$ / 取り出シテ, $\{X(e_n)\}$ / 張ラレル可分部分空間 E' = 對シテ定理ヲ用ヒヨウトイフコトニナッタ / デス。ソコガ $\{f'_n\}$ / $E'^* \rightarrow E'$ / 共軛空間 $\rightarrow$ カラ $f'_n \rightarrow 0$ (弱) / トイフ條件付ガ取り出シタトキ f'_n / 各ノガ E = 拡張サレテ f_n / トナリ, $f_n \rightarrow 0$ (弱) / ガ成立ッナラバ, Vitali-Idahn-Saks / $\{f_n X(e_m)\}$ / ガ $\{e_m\}$ / ニテ一様収斂シテ $\{X(e_m)\}$ / ガ compact / ガ云ヘルダラウトイフ想像ガッタ / デス。

コウシテ問題ガ $\rightarrow$ 単純ナ一補題, 所デ呈出サレタ / デス。

B 空間 E / 部分空間 E' 上テ定義サレタ 0 = 弱収斂スル汎函数 $\{f'_n\}$ / ハ, E = 同シ性質ヲ保存シタマニ拡張出来ルカ?

最初コレハ何ノ困難ニ + イ問題ガト思ヒ, ソケナク証明シテシマシタガ, 著者ノ一人カラ誤ッテキルエトガ示サレテシマシタ。数物ノトキ中村ガシマベツタトキコノ状態デシタ。

ソノ線型問題ハ否定的=解カレマシタ。ユノ談話ハ
ソノ証明デス。

X X X

カナリ長い前置が始マリマス。(m)ト(C)ヲ各々有界
数列, の極限=モル数列ノ作る空間デ, ノルムヲ
 $\|X\| = \sup_i |X_i|$ デ定義シマス。解答ハ (C) 上テ弱収斂スル
汎函数列デ, ソノ拡張が (m) 上テハ収斂シタイモノガ
存在スルト云フコトヲ示スコト=ヨッテ與ヘタイノデス。
ソノタメ=シバテタ(m)ノ共軛空間 $(m)^*$ = ヱイテ, ソノ
表現ヲ論ビナケレバナリマセヨ。

$\check{Cech}$ / compactification ヲ使ツテ⁶⁾, dis-
crete + topology ヲツケタ自然数全体 N ヲ compact-
ly $\check{C}$, embed シス空間ヲ Ω , $\Omega - N$ ヲ Ω' トシマス。
今 (m) ヲ N 上ノ連続函数ト考ヘレバ, $\check{Cech}$ / 定理ヲ
(m) ノ元 $X = \{X_n\}$ ハ唯一通り = Ω ノ連続函数 $X(\omega)$
= 拡張サレルワケデス。逆 = Ω ノ連続函数ハ N 上テ
(m) ノ元ヲ指定シマスカラ Ω ノ連続函数全体 $C(\Omega)$ ト (m)
トハ一致シマス。面倒デスカラ以下 $C(\Omega)$ ト書カズ = (m)
デ Ω ノ連続函数ヲ示シマス。

所デ Ω ハ compact space デスカラ Markhoff
ノ定理⁷⁾ = ヱッテ (m) ノ共軛空間 $(m)^*$ ノ任意ノ元 f ハ
完全加法測度 μ = ヱッテ

$$f(x) = \int_{\Omega} X(\omega) d\mu$$

ト表サレ $\|f\| = \int (d\mu)^{10)}$ が成立ちマス。

Banach, generalized limit $\lim (x_n)$ 汎
函数デスカ⁸⁾ 今コノ積分ノ値ヲ $\lim x_n$ ($x = \{x_n\}$)
ヲ表ハセバ,

1°. $\lim (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \lim x_n + \beta \lim y_n$
が成立チマス。今更ニ

$$2°. x_n \geq 0 \rightarrow \lim x_n \geq 0$$

トイフ條件ハ

$$2'. \mu \text{ が positive テアル。}$$

トイフコトハ同等デアリ,

$$3°. \lim 1 = 1$$

ハ 3'. μ が normalize サレテアル。

トイフコトハ同等デス。更ニ

$$4°. \lim x_n = \lim x_{n+1}$$

ハ 4'. μ ハ N 上デ 0 デアル, 又ハ μ 1 マスハ Ω_0 上ニ
分布シテアル。

トイフコトデス。更ニ條件ヲカヘテ

$$5°. \lim x_n y_n = (\lim x_n)(\lim y_n)$$

ヲ入レレバ, Gelfand, normed ring, 理論
ハ

$$5'. \mu \text{ 1 マスハ } \Omega, \text{ 一気ニ集ムテアル。}$$

コトが結論サレマス。

ユノ X は Banach limit の Čech compactification と密接な関係ヲ持ッてゐますが、特ニ
積 $\mathcal{B}'$ と N と上ニカケテヤレバ

$$(1) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n + \int_{\mathcal{B}'} X(\omega) d\mu$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < +\infty$$

又ハ

$$(1') \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n + \lambda \lim x_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < +\infty$$

ノ形デ表サレマス。ユノ後者ノ表現ハ Cohen-Dunford⁹⁾
ニヨツテ得テレタモノデスガ、Čech compactification
デモ上ノ様ニシテ求ムル事カ出来ルワケデス。

X X X

マ如前推ガ続キマス。モリ少シ $\mathcal{B}$ ノ性質ヲ調ベテ置
キタイノデス。マダ $\mathcal{B}$ ハ totally-disconnected デアルコ
トハ明ラカデス。我々ハ N ハ充分ニ知ツテキマスカラ $\mathcal{B}'$ ノ
構造ヲ少しばかり知リタイノデス。

今 S ヲ N ノ部分集合デ有限デイトシマス。ソコデ

$$n \in S \rightarrow x_n = 1, \quad n \notin S \rightarrow x_n = 0$$

で定義される (m) の元 X を $\Omega =$ 拡張スレバ Ω_0 にして
 また f 取ル 函数 $X(\omega) \xrightarrow{\omega \in \Omega} f$ シテ 連続 $\rightarrow$ スル コト が
 出来マス。ソコデ $\{\omega \mid X(\omega) = 1\} = S'$ トスレバ、 $X(\omega)$
 の連続性カラ S' は Ω' の開且閉部分集合ニナリマス。即チ
 N の中ノ $S =$ 對シテ 1 -operation デ Ω' の開且閉部分集
 合 S' が意志的ニ指定サレマス。

逆ニ、今 Ω' 上ニ開且閉集合 S' 7 與ハレバ $X'(\omega)$ 7

$$\omega \in S' \rightarrow X'(\omega) = 1, \quad \omega \in S' \rightarrow X'(\omega) = 0$$

で定メテ 全空間ニ拡張スレバ

$$0 \leq Y(\omega) \leq 1$$

トイフ Ω の連続函数 $X(\omega)$ が得ラレマス。今 $Y(\omega)$ の中
 $0 < \omega < 1$ = 分布シテ キル 値ヲ

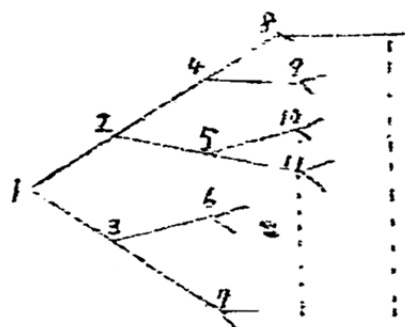
$$Y(\omega) \geq 1/2 \rightarrow X(\omega) = 1, \quad Y(\omega) < 1/2 \rightarrow X(\omega) = 0$$

ト直シテ $X(\omega)$ 7 定メ $S = \{\omega \mid X(\omega) = 1\} \cap N$ で定義スレ
 ば、 S は有限デハナイ N の部分列トナリマス。⁽¹¹⁾ コウシテ S'
 カラ指定サレル S は高々有限箇ノ差ヲ除イテ一致スルワケ
 デス。

言ヒカヘレバ、 Ω' の総テノ開且閉部分集合 N のスベ
 テノ部分列、 N の総ベテノ有限集合等ノ作ル Boole 代数
 7 ソレバレバ、 Ω トスレバ、⁽¹²⁾ Ω へ $\Omega/\mathcal{C}$ = 同型デア
 ル。

我々ハコノ結論ヲ使ツテ、 Ω' の中ニ開且閉デ互ニ素ナ
 部分集合が $2^{\aleph_0}$ 以上アルコトヲ示シタイノデス。コノ事

ハ上ノ結果ヲ使ヘバ、《 N ノ部分列ノ族ノ中デ、有限
箇以外ハ互ニ素デ、ノ列ノ数が $2^{\aleph_0}$ 以上存在スルモノガア
ルカ?》ト云フコトヲス。コレハ、自然数ヲ



ト並ベテ、 $(1, 2, 4, 8, \dots)$ トイ
フヨリナ枝ヲ列トスル様ナ族ヲ考
ヘレバヨイワケデス。コレ等ハ互
ニ有限箇デケシカ共有シマセンカ
ラ。

※ ※ ※

コレダケノ前置キヲオイテ問題ノ問題ニ取リカゝリマ
ス。マヅ $E = (m)$, $E' = (C_0)$ トスレバ E' ハ E ノ中ノ閉線
型部分空間デス。今

$$f'_n(x) = x_n$$

トスレバ、 f'_n ハ (C_0) ノ上デ $0 =$ 弱収斂シテオマス。ソ
コデ今 f'_n ヲ何等カノ方法デ $(m) =$ 拡張シタトシマスト、
前ノ(1)ヲ用ヒレバ

$$(2) \quad f_n(x) = x_n + \int_{\Omega'} x(\omega) d\mu_n$$

ヲ得マス。各々、 μ_n ハ完全加法的 $+ \Omega'$ ノ上ノ測度デス
カラ、互ニ素ナ閉且開部分集合ノ中高々デ、 ϵ 以下デ 0 デ
ナ μ 測度ヲ持ツワケデス。云ヒカヘレバ Ω' ノ中ニハ閉且
開デ μ_n ($n = 1, 2, \dots$)ニ關スル測度ガスベテ $0 =$ ナ
ルヤリナ部分集合ガウクトモ一ツ存在スルリケデス。ソコ

デソレヲ S' トシテ, $X(\omega)$ テ S' ノ上デ /, $\Omega' - S'$ デ
 $X(\omega) = 0$ トトルヤウナ連続函数トスレバ, (2) ノ後ノ項
 ノ積分ハイツモ 0 デスカラ, コノ $X = X(\omega) = 0$ シテハ (2)
 ハ

$$(3) \quad \int_n (X) = X_n$$

デス. 所ガ空デナイ S' 上デ /ヲ取ルノデスカラ, $\int_n (X)$ ハ
 決マテ収斂シマセソ。

即チ, (C_0) ノ汎函数列ヲ $(m) = 0$ ヲ擴張シテミテモ,
 0 = 弱収斂サセルコトハ不可能デス. コレデ問題ノ否定的
 解答ガ與ヘラレタワケデス. 然レ亦ガ問題ハ完全ニ終ツテ
 シマツタワケデハナク, デハ《ドウイフ條件ノ下デコノ定
 理ガ成立ツカ?》トイフコトニツイテハ全ク判ツテオマセ
 ソ. 大体ノところ, E カラ E' ヘノ有界ナ射影作用素ノ存在
 スルトキデハナイカト云フノガ豫想ナノデスガ。

- 1) 岡澤, 談話 (193); Kurisawa, Proc. Imp. Acad.,
 16 (1940) 68-72.

定理1 内容ハ $\pi(e)$ ガ完全加法測度ヲモツ Boole 代
 数上ガ定義サレタ抽象値完全加法函数ガ弱絶対連続デ
 アレバ強絶対連続デアリ。

- 2) Nakamura-Sunouchi, Proc. Imp. Acad., 18
 (1942) —. コノ中 §3 ノ証明ハ不必要カクコトガ
 判リマシタ. 後ノ談話ヲ述ベマス。

- 3) Gelfand, Sbornik 6 (1938), p. 268, Teil II §2.

- 4) 国沢氏 / 前出論文参照。
- 5) Phillips, Trans. A.M.S., 48 (1940), 516-541. 定理 3.11 系。
- 6) 角谷, 位相数学 2-2 (1940) p. 17 ff 参照。----- 定理 7 書けば, 完全正則空間 S の對して compact 空間 $\beta(S)$ が存在して (i) $S \subset \beta(S)$, (ii) S は $\beta(S)$ で稠密, (iii) S の 有界連続函数に一應的 $= \beta(S)$ の 連続函数 $=$ 拡張される。
- 7) A. Markhoff, Mat. Sbornik, (193) -
- 8) Bonnach / 本人の角谷, 数論會誌 () p. 参照。
- 9) Cohen - Dunford, Duke Math. Journ., (1939)
- 10) $C(X)^*$ の元を積分表示するコトは Hildebrandt がマッテイマスが, Hildebrandt は μ が有限加法的だと述べています。Čech と Markhoff を使って μ が完全加法的だとイフコトが始めて判るワケです。コト事の後で重要な役割を演じます。
- 11) $\mathcal{H}(W)$ の値は 0 と 1 以外二乗積を保持しません。従って何に $1/2$ を加けたモカマハナイワケです。ソノ差は有限です。
- 12) $\mathcal{H}(W)$ は, ideal であるコトは明らかです。