



Title	Fréchet束ソノ他ニ関スル二三ノ注意
Author(s)	小笠原, 藤次郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 247, p. 1612-1619
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75026
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1094. Fréchet 束ソノ他ニ関スルニニノ注意

小笠原 藤次郎(廣島文理大)

Fréchet 束ソノ他ニツイテ書キモラシタニニノ注意ヲ述べルノが目的デアル。

§1. Banach 束トナル條件

Banach 空間ガ、一方ニ於テベクトル束デアルトキ Banach 束トナル様ニノルムガ導入サレルカ否カニ就イテ次ノ定理ガ成立ツ。

定理1. ベクトル束 X ガ Banach 空間ノトキ、位相ヲ変ヘナイマツニ必要アラバ新シイノルムノ導入ニヨツテ Banach 束トナル條件ハ、ノルムニヨル収歟ト相對一樣(*)収歟ガ同義トナレコトデアイル。

(証) Birkhoff, Lattice theory, 定理 7.21⁽⁴⁾ニヨリ條件ガ必要ナルコトハスグ判ル。以下充分ナルコトノ証明、 X ノ典ヘラレタノルムヲ $\|x\|$ デ表シ $\|x\| = l.u. \{ \|x'\|; |x'| \leq |x|, x' \in X \}$ ト定メルト、次ノ (1) - (5) ガ成立ツ。

$$(1) \quad 0 \leq \|x\|, \leq +\infty, x=0 \text{ ノトキニ限リ } \|x\| = 0$$

$$(2) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad \alpha \text{ ハ } 0 \text{ デナイ実数}$$

(1) ノルムニヨル収歟ト相對一樣(*)収歟ノ同義ヲ述バタメノデアイル。F-束ニツイテハ、小笠原藤次郎、紙数誌、243号、Fréchet 束ニ就テ、§1、補題5参照。

$$(3) \quad \|x+y\|, \leq \|x\| + \|y\|,$$

$$(4) \quad \|x\| \leq \|x\|,$$

$$(5) \quad \text{任意ノ正数 } \varepsilon \text{ニ對シ, 正数 } \delta \text{ガ存在シ, } \|x\| \leq \delta \\ \text{ノトキ常ニ } \|x\|, \leq \varepsilon$$

コノうち (1), (2), (4) ハ自明. (3) ハ, $|z| \leq |x+y| + |x|$
 任意ノ z ニ對シ, x', y' ヲ $z'_+ = z_+ \wedge |x|$, $z'_- = z_- \wedge |x|$;
 $y' = z - x'$ ト選バト $\|z\| \leq \|x'\| + \|y'\| \leq \|x\| + \|y\|$, カラス
 ガ判ル. (5)ハ, アル正数 ε ニ對シ, $\|x_n\| \downarrow 0$, $\|x_n\|, > \varepsilon$
 トスレバ $|x_{i_n}| \leq \lambda_n$ ニ, $\lambda_n \downarrow 0$ ナル正要素 λ 及ビ正数列
 $\{\lambda_n\}$ ガ存在スル. $\|x'_{i_n}\| > \varepsilon$, $|x'_{i_n}| \leq |x_{i_n}| + |x'_{i_n}|$
 ガ存在スルカラ $|x'_{i_n}| \leq \lambda_n$ ニトナリ $\|x'_{i_n}\| \rightarrow 0$ トナリ,
 $\|x'_{i_n}\| > \varepsilon$ ニ反スル.

(5)ノ成立カラ $\|x\|, < +\infty$ トナリ, $\|x\|, =$ ヨッテ X
 ハ Banach 束トナリ 且ツ $\|x\| =$ ヨル Banach 空間ト
 考ヘタ X ト Banachノ意味ヲ同型ニナル.

(注意) ベクトル束ハ, 如何ナル方法ニヨッテ Banach
 束ニナッテモ, Banachノ意味ヲ同型デアル.

同シ論法ヲ F 型空間ニ適用スルト次ノ定理ヲ得
 ル.

定理2. ベクトル束ガ F 型空間ノトキ, 位相ヲ変ヘナ
 イヤウニ必要アラバ新シイ計量ノ導入ニヨッテ F -束ニナ
 ル條件ハ計量ニヨル收斂ト相對ニ様(米)收斂ガ同義トナル
 コトデアル.

(注意) ベクトル束が F -束トシテノ計量ハ, Banach
ノ意味ノ同型トイフコト以外ニハ一意ニ定マル。

次ノ節デハ, K_0 型"正則"ベクトル束が Banach
束トイルトキハ, K -空間 (Kantorovitch 空間) トナル
コトヲ使フ。

§2. Orlicz ノ空間

$M(u)$ フスベテノ実数 $u \geq 0$ ニ對シ定義サレタ凸函数デ
次ノ $1^\circ - 4^\circ$ フ満足スルモノトス。(Banach ノ本,
227 頁)

$$1^\circ. M(-u) = M(u)$$

$$2^\circ. \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} M(u) = 0$$

$$3^\circ. \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u} M(u) = +\infty$$

$$4^\circ. \overline{\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{M(u)} M(2u)} < +\infty$$

コノ $M(u) = \int_0^u N(t) dt$, $N(u) \geq 0$ ノトキ

$$N(u) = \max_{0 < v < +\infty} [uv - M(v)], \quad u > 0 \quad \text{トキ} \quad N(u) =$$

$N(-u)$ ト定ムルト $N(u)$ ハ凸函数デ $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ が成立ツ
カ一般ニハ 4° ハ成立シナイ。

$[0, 1]$ 上ノ可測函数 f フ $\int_0^1 M(x|f|) dx < +\infty$ ナル
モノ, 全体ヲ (O) デ表シ, $x \in (O)$ ノノルムヲ

$$\|x\| = \text{l.u.b.} \left(\int_0^1 x(t) \omega(t) dt; \int_0^1 N(\omega(t)) \omega(t) dt \leq 1 \right)$$

ヲ定ムルトキ (0) ハ Banach 束ニナル。 (証明ハ例ヘバ

Zygmund, Trigonometrical series, 96-97)

(0) ヲ定義スルニ, $M(u)$ が 4° ヲ更ニツヨクシテ

$M(2u) \leq CM(u)$ ヲ満足スルモノトシテヨイ。 (Orlicz,

Studia, Math. 5 (1934), 128). 従ッテ (0) ハ K_0 型

正則"ベクトル束デアール。小笠原, Fréchet 束ニ就
イテ (III), 紙数誌 245?)

故ニ Banach 束トシテ (0) 空間ハ K -空間ニナル。

$N(u)$ が 4° ヲ満足スルトキ, (0) 空間, 共軛空間ハ K -空間

トナリ (0)-空間ハ Banach 空間トシテ正則 (regular, reflexive) デアール。

$$(4^\circ) \text{ノ代リニ, } \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{M(u)} M(2u) < +\infty \text{ ヲ満足スルト}$$

キ $\sum_1^\infty M(\varepsilon_n) < +\infty$ ナル $x = \{\varepsilon_n\}$ 全体ヲ (0) デ表シ,

$$\|x\| = \text{l.u.b.} \left(\sum \varepsilon_n \omega_n; \sum N(\omega_n) \leq 1 \right)$$

トスルトキ (0) ハ K -空間ニナル。特ニ $N(u)$ が

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} N(u) = 0 \text{ ヲ満足スルトキハ (0) ハ Banach 空間}$$

トシテ正則デアール。 (Banach ノ本, 240 頁ニ4参照)

$(-\infty, +\infty)$ ノ上ニ論ズルニハ, $M(u)$ が 4° ノ代リニ

$M(2u) \leq CM(u)$ ヲ満足スル場合ヲ考ヘル。コノトキ $(-\infty,$

$+\infty$ 上、可測函数 $x(t)$ 1 中デ、 $\int_{-\infty}^{+\infty} M(x(t)) dt < +\infty + \nu$

ε 1, 全体ハ $\|x\| = l.u.b. \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \omega(t) dt ; \right.$

$\left. \int_{-\infty}^{+\infty} N(\nu(t)) dt \leq 1 \right) = \exists$ 1 Banach 束トナリ, K -空間

間 $= +\nu$. $N(u)$ ハ $N(2u) \leq C_1 N(u)$ ヲ満足スルトキ,

コノ空間ハ Banach 束トシテ正則 $= +\nu$.

以上ハ, abstract set 1 上デ測度函数が與ヘラレテイル場合 $= \varepsilon$, 上ノ所論 $=$ 並行シテ, 所論ヲ拡張スルコトが出来ル。反覆シテ論カルコトハ煩ハシイカテ略スル。

§ 3. Kantorovitch 空間 $=$ 對スル $=$ 1 注意.

共範 Banach 束ハ K -空間 $=$ ナル充分條件ニツイテ紙数誌 240 / 雑誌 1060, § 5 / 所論 / 一部ヲ拡張スル。

定理 1: Banach 束 $X =$ 於テ, 1 ルムデ有界ナ集合カラ弱位相デ, 基本列ガトリ出セルトキ, $\overline{X}$ ハ K -空間デアアル。

(証) $\overline{X}$ が K -空間トナルコトヲ云フニハ, $f_n \downarrow 0$. $f_n \in \overline{X}$ 1 トキ $\|f_n\| \rightarrow 0$ ヲ云ヘバヨイ。 $\|f_n\| > \delta > 0$, $n = 1, 2, \dots$ トスレバ, $f_n(x_n) > \delta$, $x_n > 0$, $\|x_n\| = 1$ ナル X カラノ列 $\{x_n\}$ ガアル。假定ニヨリ $\{x_n\}$ ハ弱位相ニヨル基本列ヲ作レトシテ差ハナリ。 $\xi(f) = \lim f(x_n)$

ト定義スル $\varepsilon(f) \in \overline{X}$ 、 (0) -連続線型汎函数デアル。
 (談話 1060, ε 5 ト同論法デ)。明カ $= \varepsilon(f_n) \geq \delta$ 。
 然ル $= \lim_n \varepsilon(f_n) = 0$ トル故 $=$ 矛盾カ起ル。

定理2. Banach 束 X ニ於テ, $\overline{X}$ ノ任意ノ要素
 α ガ X ノ要素列ノ弱極限トシテ表サレルトキ $\overline{X}$ ハ K -空
 間デアル。

(証) 定理1ト同ジ考ヘ方デ (ε トシテ $\{x_n\}$ ノ弱收
 積点ノ一ツトスレバヨイ)。

定理3. X ヲ Banach 束トスル。 $\overline{X}$ ノ任意ノ可
 分部分 Banach 束ガ σ -完全ナルトキ $=$ 限リ $\overline{X}$ ハ K -空
 間デアル。

(証) 定理1ノ証明法ヲ少シ修正シテ。

§4 可測函数族ニヨルアル種ノベクトル束ノ表現

$[0, 1]$ 上ノアル可測函数族ノベクトル束 $=$ ヨリ表現サ
 レルベクトル束 $=$ ツイテ考ヘル。

X ヲ可分 K -空間又ハ K -空間トセヨ。 X ノ可分カラ
 X ハ単位ヲエツ。之レヲ e トスル。 X ガ K -空間ナルコト
 カラ, $\overline{X}$ ニ単位 $\overline{e}$ ヲエツ。 $\overline{e}$ ヲ $\overline{e}(e) = 1$ トル如ク選ブ。
 X ノ表現 σ -空間 Ω ヲ考ヘ, e ヲ恒等的 $= 1$ トスル様
 X ヲ Ω ノ第一種集合上ヲ除イテ有限値ヲトル Ω 上ノ連続
 函数ノベクトル束デ表現スル。 Ω ノ基本開集合 (開且ツ
 閉集合, コト) ト第一種集合ヲ法トシテ $=$ 致スル集合 $E =$

對ツ、 Σ ノ基本開集合ノ特性函数ヲ表現函数トスル $\times$ ノ要素 (e ニ關スル特性要素トナツテキル)ヲ $\mu(E)$ ヲ表ハス。 $\mu(E)$ ハ完全加法的デアール。 $m(E) = \overline{e}(\mu(E))$ ト置クト、 $m(E)$ ハ $\int \Sigma$ ノ完全加法的測度函数トナリ、 $m(E) = 0$ ト E ガ第一種集合トハ同義デアール。

今尙早、タメ e ニ關スル原子的特性要素ガ存在シナイトスル。 Σ ノ零測度集合ノ全体ヲ N トシ、可測集合ノ体ヲ M トスレバ、完全アール代数 M/N ハ e ニ關スル特性要素ノアール代数ト同型デアール。 M/N ハヨク知ラレタ方法デ、 $[0, 1]$ 上ノ零測度集合ヲ法トシテ *Lebesgue* 可測集合ノアール代数ト測度ヲ保存スル束同型ニナル。 $(M/N, m(E))$ ニヨリ導入サレタ距離ニ關シ可分空間ヲ作ルコトニ注意)。

從ツテ e ニ關スル特性要素ト零測度集合ヲ法トシテ $[0, 1]$ 上ノ可測集合トハ一對一對應スル。 $[0, 1]$ 上ノ f ハ Σ 上ノ可測函数ハ同値ナ函数ヲ法トシテ *Wecken*ニヨル特性族ニヨリ一寫ニ定ムルカラ、 Σ 上ノ殆シド到ル所有限値ヲトル可測函数、從ツテ第一種集合上ヲ除イテ有限値ヲトル連続函数ノ全体 $\mathcal{L}_\Sigma$ ト $[0, 1]$ 上ノ可測函数ノ S 空間トハベクトル束トシテ同型デアール。

$x \in X$ ノ表現函数ヲ $f_x(\xi)$ 、 ξ ニ對スル S ノ函数ヲ $x(t)$ トスレバ $\overline{e}(x) = \int_\Sigma f_x(\xi) dm = \int_0^1 x(t) dt$ トナリ、

$x(t)$ は $[0, 1]$ 上可積分函数, 空間 L , 要素トナル。即チ
 X は L の部分ベクトル束ヲ表現サレル。 (X が抽象 L_p 空間
 $(1 \leq p < +\infty)$ の場合ニハ, $e, \bar{e}$ ヲ適當ニトリテ, $x(t)$,
 $\bar{x}$ 1 ルムが普通, L_p 空間, 1 ルムトナル)。任意, $\bar{x} \in \bar{X}$
 $\bar{x}$ 表現函数ヲ調べル。 X 1 $\bar{X}$ 1 $\bar{x}$ ヲナ表現ヲ利用シテニ容易
ニ判ルカ, 次ノヤヲニシテニヨイ。 X ト $\bar{X}$ ハ同じ表現
一ル空間ヲモツ。 $\bar{e}$ 恒等的ニ1 トナル $\bar{X}$ / Ω 上ノ表現
ヲ考ヘ, $\bar{x} = f_{\bar{x}}(t)$ が對應スルトスル。之レニ對應スル
 S / 函数ヲ $\bar{x}(t)$ トスレバ

$$\bar{x}(x) = \int_{\Omega} f_x(t) f_{\bar{x}}(t) dm = \int_0^1 x(t) \bar{x}(t) dt$$

トナル。

$\bar{X}$ は S / 部分ベクトル束ヲ表サレル。 X 1 S = 射
如何ナル函数ニアルカトイフニ。 $\rho(x) = \left\| \frac{x}{e+|x|} \right\|$ = ヨツ
テ X / 計量的完備化ヲ考ヘ, 之レヲ X_S トスレバ X_S / 表
現函数ハ L_{Ω} / 全体カタナリ, $[0, 1]$ 上ノ S ト Banach
ノ意味ヲ同型ニナル。

次ニ e = 関スル原子的特性要素が存在スルトキハ, X ヲ
列空間ト上述ノ空間ノ直和トシテ論ズレバヨイ。

要スルニ可分 K -空間, K -空間或ハソノ共軌空間ハ
 $[0, 1]$ / 可測函数或ハ列ニヨル空間, 議論ニ帰結スルコト
ガイヘタリケデアル。