



Title	可換デナイ Operator Ring ノスペクトル分解ニ就イ テ, II
Author(s)	小平, 邦彦
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 247, p. 1620-1650
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75027
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1095. 可換デナイ Operator Ring / スペクトル分解 = 就イテ, II

小平 邦彦 (東京文理大)

§2. $\mathcal{H}_f$, $\mathcal{M}$ 及 $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ の間ノ關係

2.1. $\mathcal{H}$ ノ $\mathcal{S}$ デハ $\mathcal{M}$ ノ commutator $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ ノ $\mathcal{C}\mathcal{M}$ 或ハ $\mathcal{M}^{\mathcal{C}}$ ト書クコト = スル. — $\mathcal{H}_f$ bounded operator A_j ($j=1, 2, \dots$) が任意ニ與ヘラレテキルトシ, $\mathcal{U}$ ノトキ

$$\begin{cases} Q(f, g) = (f, g) + \sum_{j=1}^{\infty} (A_j f, A_j g), \\ \mathcal{U} = \{f; Q(f, f) < +\infty\} \end{cases}$$

トオケバ, $\mathcal{U}$ ハ $Q(f, g)$ ノ内積トスル Hilbert 空間ヲ作ル。

$\|g\| \leq \sqrt{Q(g, g)}$ デアルカラ, $f \in \mathcal{H}_f$ ノ固定シテ (f, g) ノ $g \in \mathcal{U}$, linear functional ト考ヘレバ Riesz ノ定理カラ明カナル如ク,

$$(f, g) = Q(Bf, g), \quad f \in \mathcal{H}_f, \quad g \in \mathcal{U}$$

ナル operator B が定マル. B ハ $(f, Bf) = Q(Bf, Bf)$ カラ明テカナル如ク bounded hermitian positive semi-definit デアルヲ $\mathcal{H}_f - \mathcal{U} = \{f; Bf = 0\}$ デアルカラ

$$[\text{Range } B] = [\mathcal{U}]$$

が成立ツ。ユノトキ

Lemma 1.1. $\mathcal{R} = \text{Range } \sqrt{B}$ テアツテ, $f, g \in [\mathcal{R}] = \mathcal{R}$ 対シテハ

$$Q(\sqrt{B} f, \sqrt{B} g) = (f, g)$$

が成立スル。¹⁾

証明. $f \in [\mathcal{R}]$ ヲ任意ニトル. スルト $[\mathcal{R}] = [\text{Range } \sqrt{B}]$ テアツルカラ $f = \lim_j \sqrt{B} f_j + \sqrt{B} f_j$ が

存在スル. 従ツテ

$$Q(B f_j - B f_k, B f_j - B f_k) = \|\sqrt{B} f_j - \sqrt{B} f_k\|^2$$

カカラ $B f_j$ ハ Q = ヲイテ 収斂スル. ソコデ $\lim_j B f_j = f^0$ トスル: $f^0 = \lim_j^{(Q)} B f_j = f^0 \in \mathcal{R}$ 然ル
トキハ明ク $f^0 = \lim_j B f_j = f^0$ テアツルカラ $\sqrt{B} f = \lim_j \sqrt{B} f_j = f^0 \in \mathcal{R}$. スハ $\mathcal{R} \subseteq \text{Range } \sqrt{B} \subseteq \mathcal{R}$ テア
ル。

従ツテ又, 他ニ $g \in [\mathcal{R}]$ ヲ任意ニトツテ $g = \lim_j \sqrt{B} g_j$ トスルベ

$$Q(\sqrt{B} f, \sqrt{B} g) = \lim_j Q(B f_j, B g_j)$$

1) コノ Lemma 1.1 ト次ノ Lemma 1.2 ハ F. J. Murray
及 J. v. Neumann: On Rings of Operators.
Annals 39 (1936), Chap. 9, Lemma 9.1.1—9.
1.5 = 他ノテタイガ念ノタメ 証明ノ要點ヲ繰返スコトニシタ。

$$= \lim_j (\sqrt{B} f_j, \sqrt{B} g_j) = (f, g).$$

コレヨリ又, $\text{Range } \sqrt{B}$ の内ヲ Q -closed とル
コトガナル. 然ルニ今 $g \in \mathcal{O}$ 7 $Q(\sqrt{B} f, g) = 0$,
 $f \in \mathcal{H}_f$, 与ル元トスレバ, 任意ノ $h \in \mathcal{H}_f$ = 對シテ
 $(h, g) = Q(Bh, g) = 0$; 從ツテ $g = 0$ デアル.
故ニ $\mathcal{O} = \text{Range } \sqrt{B}$ デナケレバナラナイ.

Lemma 1.2. 上ノ Lemma = 於テ $A_j \in \mathbb{M}$
($j = 1, 2, \dots$) 7 ラバ $\sqrt{B} \in \mathbb{M}$ デアル.

証明. $A_j \in \mathbb{M}$ 7 与トキハ任意ノ $A' \in \mathbb{M}^C$ = 對シ
テ $A' \mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}$ デアルツテ, $f, g \in \mathcal{O}$ 7 与トキ $Q(A' f, g)$
 $= Q(f, A'^* g)$ デアル. 從ツテ $h \in \mathcal{H}_f$ = 對シテ
 $Q(A' B h, g) = Q(B h, A'^* g) = (h, A'^* g)$
 $= (A' h, g)$ が成立スル. 故ニ $A' B = B A'$, 又ナハテ $B \in$
 $\mathbb{M}$.

從ツテ $\sqrt{B} \in \mathbb{M}$ デアル.

以上ノ結果ヲ用ヒテ次ノ基本的ナ Lemma が証明サ
レル.

Lemma 1.3. $g_0 \in [\mathbb{M} f_0]^{2)}$ 7 ラバ $[\mathbb{M}^C g_0]$
 $\cong [\mathbb{M}^C f_0] (\mathbb{M})$

2) $[\mathbb{M} f_0]$ 7 $(A f_0; A \in \mathbb{M})$, 張ル linear closed
manifold ヲ表ハス. $[\mathbb{M} f_0]$ 7 $\mathbb{M}^C$ 7 与ルコトハ
明カデアル.

証明.³⁾ $g_0 \in [M f_0]$ デアルカラ $g_0 \wedge X f_0, X \in M$, limit トシテ表ハサレル. ソコデ $X_j \in M$ $\|g_0 - X_j f_0\| < \frac{1}{2^j}$ + 此様ニトツテ $A_j = \sqrt{2}^j (X_j - X_{j-1})$ トオキ, A_j カラ 上記ノ $\mathcal{O}$ 及ビ $\sqrt{B}$ ノ作ル. 然ルトキハ 容易ニ確カメラレル如ク $f_0 \in \mathcal{O}$ デアツテ, Lemma 1.2 カラ $V \in M$ デアル. 従ツテ又 $\mathcal{O} = \text{Range } \sqrt{B}$ デアルカラ, $[\mathcal{O}] = [\text{Range } \sqrt{B}]$ η M デアル. $f_0 \wedge h_0 \in [\mathcal{O}]$ η 同ヒテ $f_0 = \sqrt{B} h_0$ ト表ハサレル. コノコトカラ

$$\begin{aligned} [M^c f_0] &= [M^c \sqrt{B} h_0] = [\sqrt{B} M^c h_0] \\ &= [\text{Range } \sqrt{B} P [M^c h_0]] \\ &\sim h_y - (f; \sqrt{B} P [M^c h_0] f = 0) \\ &= h_y - (f; P[\mathcal{O}] P [M^c h_0] f = 0) \\ &\sim [\text{Range } P[\mathcal{O}] P [M^c h_0]] \\ &= [P[\mathcal{O}] M^c h_0] = [M^c P[\mathcal{O}] h_0] = [M^c h_0] \end{aligned}$$

ガ出ル. 然ルニ Lemma 1.1 = ヲレハ $f \in h_y =$ 對シテ

$$\|(X_j - X_{j-1}) \sqrt{B} f\| \leq \frac{1}{2^j} Q(\sqrt{B} f, \sqrt{B} f)$$

3) Lemma 1.3 $\wedge$ Murray & Neumann: Rings of Operators, Lemma 9.3.1 = 相當スル. 証明ハ Murray & Neumann, 証明カラ unbounded operator η 消去シタ形ニナツテキル.

$$= \frac{1}{2j} \| P_{[a]} f \|^2 \leq \frac{1}{2j} \| f \|^2$$

だから, $X_j \sqrt{B}$ は uniform topology で収斂する。

$$\lim_{j \rightarrow \infty} X_j \sqrt{B} = A$$

トオケバ $A \in M$ であって, $A h_0 = \lim A_j f_0 = g_0$

である。従って

$$[M^c g_0] = [M^c A h_0] = [\text{Range } A P_{[M^c h_0]}]$$

$$\sim h_f - (f; A P_{[M^c h_0]} f = 0)$$

$$\leq h_f - (f; P_{[M^c h_0]} f = 0)$$

$$= [M^c h_0]$$

故に $[M^c g_0] \leq [M^c f_0]$ である。

Lemma 1.4. $[M^c g_0] \leq [M^c f_0] \quad (M)$

ならば

$$[M g_0] \leq [M f_0] \quad (M^c)$$

である。⁴⁾

証明. 假定 = $\exists \psi \quad [M^c g_0] = \psi [M^c f_0] + \nu$

M , partially isometric operator ψ が存在する。故に $g_0 \in [M^c \psi f_0]$ 。

故に Lemma 1.3 = $\exists \psi \quad [M g_0] \leq [M \psi f_0]$

4) Murray & Heamann: Rings of Operators,

Lemma 9.3.2

$\subseteq [M f_0]$ デアル。

Lemma 1.5. $\mathcal{M} \sim [M^C f_0] (M)$,
 $\mathcal{N} \sim [M f_0] (M^C)$ ナルトキハ, $\mathcal{M} = [M^C g_0]$
 $\mathcal{N} = [M g_0]$ ナル g_0 が存在スル。⁵⁾

証明. 假定 = コ ヲテ $\mathcal{U}_W = \mathcal{M}$, $\mathcal{U}_W = [M^C f_0]$ ナル
 M / partially isometric operator W 及ビ
 $\mathcal{U}_V = \mathcal{N}$, $\mathcal{U}_V = [M f_0]$ ナル M^C / partially iso-
 metric operator V が存在スル。コノ W ト V ノ両ニテ
 $g_0 = W V f_0$ ト オク。然ルトキハ

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= W [M^C f_0] = [M^C W f_0] \\ &\supseteq [M^C V W f_0] = [M^C g_0]\end{aligned}$$

然ルニ, $f_0 = V^* V f_0$ デアルカラ

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= W [M^C f_0] = [M^C W V^* V f_0] \\ &\subseteq [M^C W V f_0] = [M^C g_0]\end{aligned}$$

故ニ $\mathcal{M} = [M^C g_0]$ デアル。同様ニシテ $\mathcal{N} = [M g_0]$

が証明サレル。

Lemma 1.6. $\mathcal{M}_j \sim [M^C f_j] (M)$, $\mathcal{M}_j \perp \mathcal{M}_k$
 $(j \neq k)$; $\mathcal{N}_j \sim [M f_j] (M^C)$, $\mathcal{N}_j \perp \mathcal{N}_k (j \neq k)$
 ナルトキハ

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} \oplus \mathcal{M}_j = [M^C g_0], \\ \sum_{j=1}^{\infty} \oplus \mathcal{N}_j = [M g_0] \end{cases}$$

⁵⁾ Rings of Operators, Lemma 10.1.3.

ナル g_0 が存在スル。⁶⁾

証明. $\mathcal{M}_j = [M^C g_j]$, $\mathcal{N}_j = [M g_j]$ ナル g_j ナ

$\sum_{j=1}^{\infty} \|g_j\| < +\infty$ ナルヤウニ選ンデ $g_0 = \sum_{j=1}^{\infty} g_j$ トオク 然

ルトキハ明ラカ $= [M^C g_0] \subseteq \Sigma \oplus \mathcal{M}_j$ デアル. 一方 =
於テ $g_j = P_{[M g_j]} g_0$ デアルカラ

$$\mathcal{M}_j = [M^C g_j] = [M^C P_{[M g_j]} g_0] \subseteq [M^C g_0]$$

故ニ $\Sigma \oplus \mathcal{M}_j = [M^C g_0]$ デアル. $\Sigma \oplus \mathcal{N}_j = [M g_0]$

ニ同様ニ証明サレヌ.

Lemma 1.7. $[M^C f]_Z = [M f]_Z = [f]_Z$ デ
アル.⁷⁾

証明. $E \in Z$ ニ對シテ $E[M^C f] = [M^C E f]$,
 $E[M f] = [M E f]$ ナルコトカラ明ラカデアル.

Lemma 1.8. $E \in Z$ トスル. コノトキ $[M^C f]$
ガ E ニ於テ M ニ關シ最小ナラバ $[M f]$ ハ E ニ於テ
 M^C ニ關シ最小デアル⁸⁾

証明. $[M f]_Z = E$ ハ既ニ証明サレタナル. $\mathcal{M}$ デ
 $\mathcal{M} \subseteq [M f]$; $\mathcal{M} \cap M^C$, $\mathcal{M}_Z = E$ ナル closed linear

6) Rings of Operators, Lemma 10.1 4.

7) コノデ初メテ既約ナ ringニ見ラレナイ現象ガ表ハ
レヌ.

8) 次頁ニ

manifold トスル. 則 $\eta = \eta^c$ ハ $\eta = P_{\eta} [M f] = [M P_{\eta} f]$ ト表ハサレル. 故ニ $\eta \subseteq [M f]$ ナルコトカラ Lemma 1.4ニヨツテ $[M^c P_{\eta} f] \subseteq [M^c f] (M)$,
 又 Lemma 1.7カラ $[M^c P_{\eta} f]_{\mathbb{Z}} = \eta_{\mathbb{Z}} = E$ ナル,
 故ニ $[M^c f]$ ハ最小デアルカラ $[M^c P_{\eta} f] \sim [M^c f] (M)$, 従ツテ再び Lemma 1.4ニヨツテ

$$\eta = [M P_{\eta} f] \sim [M f] (M^c)$$

デナケレバナラス. 故ニ今 M^c ニ関シテ定理 I ノ適用シテ $E_I^c, E_{II}^c, E_{III}^c$ ヲ各 E_N^c $h_N =$ 於テ $E_N^c M^c$ ガ夫々 N 型ニ属スルヤリニ定メレバ, $\eta \subseteq [M f]$, $\eta_{\mathbb{Z}} = E$ ナル
 η M^c ガスベテ $\sim [M f]$ ナルコトカラ, $E_I^c [M f]$
 ハ $E \cdot E_I^c$ デ最小デ, $E E_{II}^c = 0$ デナケレバナラナイコト
 ガ分ル. 故ニ $E E_{III}^c = 0$ ヲ示セバ Lemmaハ証明セラレ
 ル.

$E E_{III}^c = 0$ ヲ示スタメニ $h = E E_{III}^c h$ ト考ヘル. 然
 ルトキハ M^c ハ III 型ニ属スルカラ $[M g]_{\mathbb{Z}} = [M k]_{\mathbb{Z}}$

2) ニレハ Rings of Operators, Lemma 5.1.4ニ一般
 ナ場合ニ拡張シタメ, デアルカ, 証明ノ原理ハ少シク
 変ナレル. Rings of Operators: 証明ハ h ガ複素
 Hilbert 空間ナルコトヲ利用シテキルガ要々, 証明ハ
 real ナ Hilbert 空間デモ成立スル.

+ ラベ $[Mg] \sim [Mh] (M^c)$ デアル。故 = Lemma 1.4
 =ヨリ $[M^c g]_Z = [M^c h]_Z$ + ラベ $[M^c g] \sim [M^c h]$
 (M) が成立ッ。従ッテ $[M^c f] = h_g$ デナケレバ + ラナ
 イコト = ナル。何トナレバ $h_g - [M^c f]$ が 0 + ラザル g
 フ含ンデキストシ, $h = f + g$ トオケバ, $[M^c h]_Z = 1$ ト
 ナレカラ

$[M^c g] \oplus [M^c f] = [M^c h] \sim [M^c f] (M)$
 コレハ $[M^c f]$ が 最小ナルコト = 反スル ———。従ッテ
 h_g ハ M = 閉シテ 最小デアアル。故 = 任意ノ M = 属スル
 元ハ $h_g = h_x$ ト表ハサレル。又ハチ M = 属スル
 projection ハスベテ $\mathbb{Z}$ = 含マレル / デアル, Hermitic
 operator H

$$H = \int h dE(h)$$

ト現ハシクトキ, $H \in M$ + ラベ $E(h) \in M$ デアル。故
 = M = 属スル hermitic operator $\in$ スベテ $\mathbb{Z}$ =
 含マレル。

$\mathcal{M} \subseteq [Mf]$, $\mathcal{M}_Z = 1$ ナル 元 M^c デキ $[Mf]$
 ナル $\in$ / フトリ, $g \in [Mf] - \mathcal{M}$, $g \neq 0$ トスル。 $g \in$
 $[Mf]$ デアルカラ

$$\|A_\nu f - g\| < \frac{1}{2^\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

ナル $A_\nu \in M$ が存在スル。コノ様ナ A_ν フ定メテオイテ

$$H_{\nu\mu} = (A_\nu - A_\mu)^*(A_\nu - A_\mu)$$

トオケバ, $H_{\nu\mu} \in \mathbb{Z}$ テアルカラ

$$H_{\nu\mu} = \int_{\Omega} h_{\nu\mu}(\lambda) E(d\lambda)$$

ト表ハサレル. 時ヲカ $= h_{\nu\mu}(\lambda) \geq 0$ テアッテ

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} h_{\nu\mu}(\lambda) \|E(d\lambda) f\|^2 &= (H_{\nu\mu} f, f) \\ &= \|A_\nu f - A_\mu f\|^2 \end{aligned}$$

従ッテ $\nu \leq \mu$ トキ

$$\int_{\Omega} h_{\nu\mu}(\lambda) \|E(d\lambda) f\|^2 < \frac{1}{2^{\nu-2}}$$

ガ成立スル. Ω ノ可測部分集合 Γ ニ對シテ $m_f(\Gamma)$ ヲ

$$m_f(\Gamma) = \int_{\Gamma} \|E(d\lambda) f\|^2$$

ト定義スル. 然ルトキハ

$$\Gamma_{\nu\mu} = \left\{ \lambda; h_{\nu\mu}(\lambda) \geq \frac{1}{2^\nu} \right\}$$

トオケバ, 上ノ不等式ニヨッテ, $\nu \leq \mu$ トキ

$m_f(\Gamma_{\nu\mu}) < \frac{1}{2^{\nu-2}}$ ガ成立スル. 故ニ

$$\Gamma_k = \sum_{\substack{\nu \geq k \\ \mu \geq k}} \nu \Gamma_{\nu\mu}$$

トオケバ $m_f(\Gamma_k) < \frac{1}{2^{k-4}}$ トナル. $\lambda \notin \Gamma_k =$ 對シテ
 $\Gamma_{\nu, \mu}$ 定義カラ明カナル如ク, $k \leq \nu \leq \mu$ ノトキ
 $h_{\nu, \mu}(\lambda) < \frac{1}{2^\nu}$ ガ成立スル. 故ニ $E_k = E(\Omega - \Gamma_k)$
 トオケバ

$$\|E_k A_\nu - E_k A_\mu\| < \frac{1}{2^\nu} \quad (k \leq \nu \leq \mu)$$

スナハチ $E_k A_\nu$ ハ uniformly 収斂スルヲアヘ.
 $\lim E_k A_\nu = A_k$ トオケバ $\lim A_\nu f = g$ ナルコトカラ,
 明カニ

$$E_k g = A_k f$$

一方ニ於テ, $m_f(\Gamma_k) < \frac{1}{2^{k-4}}$ カラ知テレル如ク

$E(\Gamma_k) f \rightarrow 0$ ナル. 故ニ $[f]_2 = 1$ ト假定シテキル
 ノデアレルカラ, $E(\Gamma_k) \rightarrow 0$, 従ツテ $\lim E_k = 1$ ナ
 リケレバナラス. 故ニ k ヲ充分大キクトツテ $E_k g = g$ ト
 オクナレバ

$$g_0 = A f \in [M f] - \mathcal{N}, \quad A \in M$$

ナル 0 ナラザル g_0 ガ存在スルコトガ分ル. $g_0 \in [M f] - \mathcal{N}$
 ナルコトハ $P_{\mathcal{N}} g_0 = E_k P_{\mathcal{N}} g = 0$ カラ明カ
 ナル.

A ノ canonical decomposition $A = WH$ ト
 シ $F = W^* W$ トオク.

然ルトキハ $g_0 = WHf$ カラ $Ff \in [M g_0]$ ナル事
 ガ知テレル.

故 = $M \subseteq [M f]$ デアルカラ, $F \in \mathbb{Z}$ + ルゴト = ヨ
ツテ

$$F M \subseteq F[M f] = [M F f] \subseteq [M g_0]$$

従ツテ $P_M \in M^C$ デアルカラ

$$F M \subseteq P_M [M g_0] = [M P_M g_0] = 0$$

コレハ $M_Z = 1$ = 反スル。

Lemma 1.9. 任意, closed linear manifold M が與ヘラ レタトキ $f \in M$, $[f]_Z = M_Z +$
ル f が存在スル。

証明. $f \in M$ + 任意 = トツテ $[f]_Z$ ヲ作ツタトキ,
 $[f]_Z \neq M_Z +$ ラバ, $M - [f]_Z$ M カラ異 = $g \neq 0$ ヲ
トツテ $f_1 = f + g$ ヲ作り

$$[f_1]_Z > [f]_Z$$

ナラシタルコトが出来ル。コノ事カラ $[f]_Z = M_Z +$ f_1 存在が超限帰納法 = ヨツテ容易 = 確メラレル。⁹⁾

定理 11. $M =$ 関シテ h_f $h_f = h_{f_I} \oplus h_{f_{II}} \oplus h_{f_{III}}$
ノ形 = 分解シ, 各 h_N = 於テ M が夫々 N 型 = 属スル
メウ = スレバ, $C(M)$ ニ亦 h_N = 於テ N 型 = 属ス
ル。

9) 角谷氏ノ所謂 *methode of exhaustion* デアル。吾
々ハ屢々コノ方法ヲ用ヒルガ, 適當 = エ夫スレバ常 =
超限帰納法ノ使用ヲ避ケルコトが可能デアル。

証明. $C(M) =$ 閉スル分解 $f_y = f_{y_I}^C \oplus f_{y_{II}}^C \oplus f_{y_{III}}^C$

トシ, コレが $M =$ 閉スル分解ト一致スルコトヲ言ハバヨ
イ。先ヤ f_{y_I} ヲ考ヘソノ projection ヲ E_I トスル。然
ルトキハ $E_I =$ 於テハ $M =$ 閉シ最小ナル $\mathcal{N}^0$ が存在スル。
 $\mathcal{N}^0$ ハ Lemma 1.9 =ヨレバ $[f^0]_Z = 1$ ナル f^0 ヲ含
ム。コノ f^0 カラ $[M^C f^0]$ ヲ作レバ $\mathcal{N}^0$ が最小ナルエト
ニヨツテ $[M^C f^0]$ ハ $\mathcal{N}^0$ ト一致シナケレバナラス。スナ
ハチ最小デアル。故ニ Lemma 1.8 =ヨツテ $[M f^0]$ ハ
 $E_I =$ 於テ $M^C =$ 閉シ最小デアル。

従ツテ, M^C ハ f_{y_I} デ I型ニ属スルカラ, $f_{y_I} \subseteq f_{y_I}^C$
デナケレバナラス。故ニ, M ト M^C ヲ入レ直ヘテ考ヘレバ
 $f_{y_I} = f_{y_I}^C$ デアル。

次ニ $f_{y_{II}} \cap f_{y_{III}}^C = 0$ ヲ示サシ。コレが合レバスナハ
チ lemmaハ証明サレタコトニナル。ユノタメニ $f_{y_{II}} \cap$
 $f_{y_{III}}^C$ ノ projection ヲ F トオク。

M^C ハ F デ III型ニ属シテキルカラ, $f, g \in F$ $f_y =$ 對
シテハ $[f]_Z = [g]_Z$ ナラバ $[M f] \sim [M g] (M^C)$ デア
ル。故ニ Lemma 1.4 =ヨツテ

$$[f]_Z = [g]_Z \text{ ナラバ } [M^C f] \sim [M^C g] (M)$$

デナケレバナラナシ。コレハ明カニ M ハ F デ II型ナル事
ニ反スル (証明終)。

M ト $C(M)$ ノ間ニハ 更ニ次ノ如キ關係が成立ス

ル:

定理 8. D_M, D_{CM} が適当 = normalize して
おけば

$$D_M([M^c f]) = D_{CM}([M f])$$

がすべて $f \in \mathcal{H}_f = \mathcal{H}$ に対して成立する。こゝ normalization の下で、 $\mathcal{H}$ の M , $\mathcal{H}^c$ の M^c となる $\mathcal{H}$ が
 $D_M(\mathcal{H}) = D_{CM}(\mathcal{H}^c)$ を満足するならば、 $\mathcal{H}, \mathcal{H}^c$ は共通
の f を用いて

$$\mathcal{H} = [M^c f], \quad \mathcal{H}^c = [M f]$$

と表はされる。

証明. $\mathcal{H} \ni M =$ 関して $\mathcal{H} = \mathcal{H}_I \oplus \mathcal{H}_II \oplus \mathcal{H}_III$ の形に
分解し各 $\mathcal{H}_N$ を別々 = 考へればよいから、始めから

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_I$, $\mathcal{H}_II$ と $\mathcal{H}_III$ を分けておく。 $\mathcal{R}, \mathcal{R}^c$
を

$$\begin{cases} \mathcal{R} = (D_M([M^c f]); f \in \mathcal{H}) \\ \mathcal{R}^c = (D_{CM}([M f]); f \in \mathcal{H}) \end{cases}$$

と定義する。 $\mathcal{R}$ と $\mathcal{R}^c$ は互に写像 ϕ を

$$H = D_M([M^c f]) \text{ に対して } \phi(H) = D_{CM}([M f])$$

によって定義すれば、先の Lemma 1.4 から ϕ は一対一
の面を "順序" を保つことが知られる。 Lemma 1.6
から $H_j \in \mathcal{R}$ を任意にとったとき

$$\sum_{j=1}^{\infty} H_j \in \text{Range } D_M, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \phi(H_j) \in \text{Range } D_{CM}$$

＋ラバ $\sum_{j=1}^{\infty} H_j \in \mathcal{R}, \sum_{j=1}^{\infty} \phi(H_j) \in \mathcal{R}^c$ デア ッテ

$$\phi\left(\sum_{j=1}^{\infty} H_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi(H_j)$$

＋ルコトガ示サレル. $E \in \mathbb{Z}$ = 對シテ, $H \in \mathcal{R}$ ＋ラバ
 $EH \in \mathcal{R}$ デ

$$\phi(EH) = E\phi(H)$$

＋ルコトハ明テカデアラウ. 又 $\mathcal{M} \subseteq [M^c f]$, $\mathcal{M} \cap M$
 ＋ル $\mathcal{M} \cap \mathcal{M} = P_{\mathcal{M}} [M^c f] = [M^c P_{\mathcal{M}} f]$ ト書カレル
 トラ, $H_0 \in \mathcal{R}$ ＋ラバ $H \leq H_0$, $H \in \text{Range } D_{\mathcal{M}}$ ＋ル H
 ハスベテ $\mathcal{R}$ = 含マレル.

$\mathcal{H}_f = \mathcal{H}_f^{\perp}$ / 場合. コノ場合 = ハ前定理, 証明 = 於
 テ述べタ如ク, $[M^c f^0], [M f^0]$ が夫々 / = 於テ最小
 ＋ルヤウト f^0 が存在スル. コノ f^0 テ規準トシテ $D_{\mathcal{M}},$
 $D_{\mathcal{C}\mathcal{M}}$ テ

$$D_{\mathcal{M}}([M^c f^0]) = D_{\mathcal{C}\mathcal{M}}([M f^0]) = /$$

＋ル如ク normalize シテ OK. 然ルトキハ即チ

$$I \in \mathcal{R}, \phi(I) = I \in \mathcal{R}^c$$

デアルカラ 上 = 述べタ如ク, 任意 / $E \in \mathbb{Z}$ - ツイテ

$$E \in \mathcal{R}, \phi(E) = E \in \mathcal{R}^c$$

成立スル. $H \in \text{Range } D_{\mathcal{M}} \cap \text{Range } D_{\mathcal{C}\mathcal{M}}$ ＋
 任意 / H ハ $\sum n E_n$ ＋ル形ヲモツカテ,

$E(n) = \sum_n^\infty E_n$ トオケバ $H = \sum E(n)$ ト書カレル。故

$= E(n) \in \mathcal{R}, \phi(E(n)) = E(n) \in \mathcal{R}^c \Rightarrow \text{アルカラ,}$

上ニ述ベタコトニヨッテ

$$H \in \mathcal{R}, \quad \phi(H) = H \in \mathcal{R}^c$$

トルコトガ分ル。 $H \in \mathcal{R}$ ヲ任意ニトツヌトキ, $E \in \mathbb{Z}$,

$$F = I - E$$

$$EH \leq \phi(EH), \quad FH \leq \phi(FH)$$

ナレバ $\dot{\cup}$ ニ定メルコトガ出来ル。 E ノ部分ヲ考ヘルト, EH

ハ明カラカ $= \text{Range } D_M \cap \text{Range } D_{C_M} = \text{属スルカ}$

ラ $\phi(EH) = EH$ デナケレバナラヌ。 $\phi(FH) = FH$ ナ

ルコトハ次ノ如クシテ示サレル。 $\phi(FH) = H_1$ トオケバ

H_1 ハ $\text{Range } D_M$ ト $\text{Range } D_{C_M}$ ノ両方ニ含マレル。

故ニ $\phi(H_1) = H_1 = \phi(FH)$ 。故ニ ϕ ガ一対一デア

ルカラ $H_1 = FH$, 従ッテ $\phi(FH) = FH$ デアル。マ

トラ言ハバ

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^c - \text{Range } D_M \cap \text{Range } D_{C_M}$$

デアッテ, スベテノ $f \in \mathcal{H}_f$ ニ対シテ

$$D_M([M^c f]) = D_{C_M}([M f])$$

ガ成立スルノデアアル。

$\mathcal{H}_f = \mathcal{H}_{f^\circ}$ ノ場合。コノ場合ニハ $[f^\circ]_Z = I$ ナル

f° デ $[M^c f^\circ], [M f^\circ]$ ガ共ニ有限ナル如キ f° ガ存

在スル。何トナレバ $\mathcal{M}$ ハ $\mathcal{H}_2 = 1$ ナレ有限ノ $\mathcal{H}$ ヲ含ム。

コノ $\mathcal{H}$ カラ *lemma 1.9* = ヨツテ $[f]_2$ カ 1 ナレ f ナリ選

ニテ $[M^c f]$ ヲ作レバ明カラカ $= [M^c f] \subseteq \mathcal{H}$ デアル。

$[M f]$ ハ $\mathcal{H}_2 = 1$ ナレ有限ノ $\mathcal{H}$ η M^c ヲ含ム。コノ様

ナ $\mathcal{H}$ ヲ定メテ $f^0 = P_{\mathcal{H}} f$ トオケバ、 $[M f^0] = \mathcal{H}$ ハ

有限、又 $P_{\mathcal{H}}$ ハ M^c = 属スルカラ

$$[M^c f^0] = [M^c P_{\mathcal{H}} f] \subseteq [M^c f] \subseteq \mathcal{H},$$

従ツテ $[M^c f^0] \subseteq$ 有限デアル。 $[f^0]_2 = 1$ ナレコトハ

$[f^0]_2 = \mathcal{H}_2$ カラ明カラデアル——。コノ f^0 ヲ一ツ

定メテ

$$D_{\mathcal{M}}([M^c f^0]) = D_{CM}([M f^0]) = 1$$

ナレヤ $\mathcal{D} = D_{\mathcal{M}}$, D_{CM} ヲ *normalize* シテオク。然

ルトキハ $h_g = h_g I$ ノ場合ト同様ニ、 $\in \mathbb{Z}$ ナレ E ハス

ベテ $\mathcal{R}$ 及ビ $\mathcal{R}^c$ = 含ムレヲキテ、 $\phi(E) = E$ カ成立ス

ル。正整数 n ヲ任意ニトツテ $\frac{1}{n} E$ ヲ考ヘル。コノテ若シ

$$\in \phi\left(\frac{1}{n} E\right) \leq \frac{1}{n} E + \epsilon$$

$$n \phi\left(\frac{1}{n} E\right) = \phi\left(n \cdot \frac{1}{n} E\right) = \phi(E) = E$$

カラ $\phi\left(\frac{1}{n} E\right) = \frac{1}{n} E$ デオケレバナラナ。若シニ逆ニ

$$\phi\left(\frac{1}{n} E\right) \geq \frac{1}{n} E + \epsilon \quad \phi^{-1}\left(\frac{1}{n} E\right) \leq \frac{1}{n} E, \quad \text{従ツテ } \phi,$$

代リ $= \phi^{-1}$ ヲ考ヘバ矢張り $\phi\left(\frac{1}{n} E\right) = \frac{1}{n} E$ デオケレバナ

ヲナイ. コノ事カラ一般ニ

$$\phi\left(\frac{1}{n}E\right) = \frac{1}{n}E$$

ナルコトが知ラレル. $H \in \text{Range } D_M \cap \text{Range } D_{CM}$
 トル任意ノ H ハ

$$H = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu}} E_{\nu} + \sum_{\nu=1}^{\infty} F_{\nu}$$

ノ形ニ表ハサレル. 故ニ $F_{\nu} \in \mathcal{R}$, $\phi(F_{\nu}) = F_{\nu} \in \mathcal{R}^c$,

$$\frac{1}{2^{\nu}} E_{\nu} \in \mathcal{R}, \quad \phi\left(\frac{1}{2^{\nu}} E_{\nu}\right) = \frac{1}{2^{\nu}} E_{\nu} \in \mathcal{R}^c = \exists \text{ ヲテ}$$

$$H \in \mathcal{R}, \quad \phi(H) = H \in \mathcal{R}^c$$

ナルコトが分ル. ——— コレヨリ $h_{\mathcal{Y}} = h_{\mathcal{Y}^c}$ ノ場合ト同
 様ニ

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^c = \text{Range } D_M \cap \text{Range } D_{CM}$$

デアツテ, スズテノ f ニツイテ

$$D_M([M^c f]) = D_{CM}([M f])$$

ナルコトが証明サレル. $h_{\mathcal{Y}} = h_{\mathcal{Y}^c}$ ノ場合ニモコレが成
 立スルコトハ

$$D_M([M^c f]) = D_{CM}([M f]) = \infty \cdot [f]_{\mathcal{Z}}$$

ニツイテ明カデアイル.

今コノ normalization : 下テ $D_M(\mathcal{H}) = D_{CM}(\mathcal{H})$

デアツタトスレバ上ニ証明シタ結果カラ明カナル如ク

$\phi(D_M(\mathcal{H})) = D_{CM}(\mathcal{H})$ デアル. 故ニ ϕ ノ定義ニヨ

ツテ $h \sim [M^c g]$, $h \sim [M g]$ + g が存在スル.

従ツテ Lemma 1.5 = ヲツテ

$$h = [M^c f], \quad h = [M f]$$

+ f が存在スル (証明終).

定理 6 = ヲレバ, h_I, h_{II} ハ更ニ分解セラレル.
 M ト $C(M)$ ノ両方ニ関シテ分解ヲ遂行スレバ結果ハ
 次ノ如クナル.

定理 9. h ハ M ト $C(M)$ = 関シテ次ノ形ニ分解
 サレル.

$$h = \sum_{\substack{0 \leq n \leq \infty \\ 0 \leq m \leq \infty}} \oplus h_I(n, m) \oplus \sum_{\substack{n=1, \infty \\ m=1, \infty}} \oplus h_{II}(n, m) \\ \oplus h_{III}.$$

$D_M, D_{C(M)}$, range ハ, 通常 = normalize シテ
 オケバ, $h_I(n, m)$, $h_{II}(n, m)$, h_{III} ノ各々ニ於
 テ次ノ如クナル.

$$I(n, m) \left\{ \begin{array}{l} \text{Range } D_M = (H; H \wedge \text{整}, \leq n) \\ \text{Range } D_{C(M)} = (H; H \wedge \text{整}, \leq m) \end{array} \right.$$

$$II(n, m) \left\{ \begin{array}{l} \text{Range } D_M = (H; H \leq n) \\ \text{Range } D_{C(M)} = (H; H \leq m) \end{array} \right.$$

$$III. \text{Range } D_M = \text{Range } D_{C(M)} = (H; H = \infty \cdot E)$$

但シコノ H ハ $\mathbb{Z}$ = 属スル non-negative +
 formal self adjoint operator ヲ現ハス.

$D_M \vdash D_{CM}$, 同 = ハ

$$D_M([M]^C f 1) = H_0 D_{CM}([M f]), \quad 0 < H_0 < \infty$$

↑ の関係が成立スル。

2.2. E が $\neq 0$ なる projection ノトキ, $E h_f$ ハ
夫自身一ツノ Hilbert space ト考ヘラレル。コレヲ
 $h_f(E)$ デ表ハス。 h_f ノ有界ノ operator A が與ヘラレタ
トキ $E A E$ ハ $h_f(E)$ ノ operator ト考ヘラレル。 カ?
考ヘタトキ $E A E$ ヲ $A(E)$ ト表ハスコト・ヨ, 有界 operator
ノ集合 $\mathcal{A} =$ 對レテ

$$\mathcal{A}(E) = (A(E); A \in \mathcal{A})$$

トオシ。然ルトキハ

定理 10. $E \in M$ トルトキハ

$$C(M_{(E)}) = (C(M))_{(E)}$$

デアル。 $E_Z = F$ トオケバ, $A \in C(M)_{(F)} = A(E) \in$

$C(M)_{(E)}$ ノ對應セシメル對應: $A \rightarrow A(E) =$ ヨツテ

$C(M)_{(F)}$ ト $C(M)_{(E)}$ が代数的 = isomorphic =
ナル。¹⁰⁾

証明. 1) $(M^C)_{(E)} \subseteq (M_{(E)})^C$ トルコトハ明ラカデ

10) Rings of Operators, Lemma 11.3.2 及ビ

11.3.3 参照。証明ノ方法ハ全ク同ジデアルカラ, コノ

ヲ要点デケテ繰返スコトニシタ。

アル。逆 = $A \in (M(E))^C$ とスル。 A / norm γ α と
スルバ、

$$\|A f\| = \|A E f\| \leq \alpha \|E f\|$$

デアルカ $\alpha^2 E - A^* A$ $\wedge$ positive semi-definit
デアル。

$$H = (\alpha^2 E - A^* A)^{\frac{1}{2}}$$

トオケバ、 $H \wedge (M(E))^C$, element τ γ γ , $\alpha^2 E$
 $= A^* A + H^2$ デアル。 故 $B_j \in M$ ($j=1, 2, \dots, n$) γ
任意 = トッタトキ

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=1}^n B_j A f_j \right\|^2 + \left\| \sum_{j=1}^n B_j H f_j \right\|^2 \\ &= \sum_j \sum_k (B_j A f_j, B_k A f_k) + \sum_j \sum_k (B_j H f_j, B_k H f_k) \\ &= \sum_j \sum_k (A^* A E B_k^* B_j E f_j, f_k) + \sum_j \sum_k (H^2 E B_k^* B_j E f_j, f_k) \\ &= \sum_j \sum_k ((A^* A + H^2) E B_k^* B_j E f_j, f_k) \\ &= \alpha^2 \sum_j \sum_k (E B_k^* B_j E f_j, f_k) = \alpha^2 \left\| \sum_j B_j E f_j \right\|^2 \end{aligned}$$

が成立スル。故 =

$$\left\| \sum_{j=1}^n B_j A f_j \right\| \leq \|A\| \left\| \sum_{j=1}^n B_j E f_j \right\|$$

従ッテ

$$\mathcal{M} = \left[\sum_{j=1}^n B_j E f_j; n \geq 1, B_j \in M, f_j \in \mathcal{H}_j \right]$$

トオケハ

$$\sum_{j=1}^n \beta_j A f_j = \bar{A} \sum_{j=1}^n \beta_j E f_j$$

ニヨツテ, $\mathcal{M}$ = 於ケル有界 + linear operator $\bar{A}$ が
定義サレル. 容易ニ知ラレル如ク, $\mathcal{M} \cap \mathbb{Z}$ デアツテ,¹¹⁾
 $\bar{A}$ ハ任意ノ $g \in \mathcal{M}$, $B \in M$ = 對シテ

$$\bar{A} B g = B \bar{A} g$$

ヲ満足スル. 故ニ $A' = \bar{A} P_{\mathcal{M}}$ トオケハ, $A' \in M^C$ デアツ
テ

$$A = A' E = A'_{(E)}$$

スナハチ $(M_{(E)})^C \subseteq (M^C)_{(E)}$ デアル.

$$2) A \in M_{(F)}^C \quad A_{(E)} = E A E \text{ ヲ對應サセル對應 } A \rightarrow$$

$A_{(E)}$ が $M_{(F)}^C$ ヲ $M_{(E)}^C$ へ寫ス代数的 homomorphism +

ルコトハ明ラカデアル. 今コソデ $A_{(E)} = 0$ デアツタトス

レハ §1. Lemma 1.3 ニヨツテ $A F = 0$, スナハチ $A = 0$

デナケレバナラス. 故ニ $A \rightarrow A_{(E)}$ ハ isomorphism デ
アル. (証明終)¹²⁾

一般ニ $\mathcal{M}$, $\mathcal{N} \cap M$ + ルトキ $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} (M)$ + ラバ

$P_{\mathcal{M}} \subseteq P_{\mathcal{N}} (M)$ ト書キ, 又 $D_M(P_{\mathcal{M}}) = D_M(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$

11) $P_{\mathcal{M}} = E_{\mathbb{Z}}$ デアル.

12) $A_{(E)}$ が與ヘラレタトキ對應スル A ハ, 証明 1) = 於ケル方法

ヲ定義シテ $(A_{(E)}) P_{\mathcal{M}}$ ト一致スル.

ツテ projection P 取ノ dimension ヲ定義スル。

$E \leq F (M)$ ハスナハチ $E = W^* W$, $F \geq W W^*$ ナル

$W \in M$ が存在スルコトニ他ナラナイ。 $\leq$ ナル関係ハ従

ツテ M ノ代数的構造ニヨツテ定マルノデアアル。 $D_M(E)$

モ亦 M ノ代数的構造ヲ定マル。何トナレバ D_M ハ

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) } W \in M \text{ ナレバ } D_M(W^* W) = D_M(W W^*), \\ \text{ii) } (D_M(E))_{(E_2)} > 0 \\ \text{iii) } E \text{ が有限ナレバ } D_M(E) < +\infty \\ \text{iv) } E \cdot F = 0 \text{ ナレバ } D_M(E+F) = D_M(E) + D_M(F) \end{array} \right.$$

ナル代数的ナ条件式ニヨツテ特徴付ケラレルカラデアアル。

Lemma 2.1. $E_0 \in M$ トスル。 $E, F \in E_0 M E_0$

ナルトキ $E \leq F (M)$ ナルタメノ必要且充分ナ条件ハ

$E_{(E_0)} \leq F_{(E_0)} (M_{(E_0)})$ ナルコトデアアル。

証明。 充分ナルコトハ明ラカデアアル。 逆ニ $E \leq F (M)$

トスレバ $E = W^* W$, $F \geq W W^*$ ナル $W \in M$ が存在ス

ル。 然ルニ $E \leq E_0$, $F \leq E_0$ デアルカラ $W = E_0 W E_0$

デアアル。

故ニ $E_{(E_0)} \leq F_{(E_0)} (M_{(E_0)})$. (証明終)

$E_0 \in M$, $(E_0)_2 = 1$ トスル。 スルト $A \rightarrow A_{(E_0)} =$

ヨッテ M^C ト $M^C_{(E_0)}$ ハ代数的 = isomorphic
 ナルカラ

$$Z_{(E_0)} = M_{(E_0)} \wedge M^C_{(E_0)}$$

トナル。故 = dimension functional ハ代数的
 構造 = ヨッテ 定マレコト = 注意スレバ, Lemma 2.1
 ニヨッテ

$$D(E_{(E_0)}) = D_M(E)_{(E_0)}, \quad E \in E_0 \cdot M E_0$$

= ヨッテ 定義サレタ D ハ $M_{(E_0)}$ = 於ケル dimension
 functional デアル。又 $A \rightarrow A_{(E_0)} = \text{ヨッテ}$
 $M^C \cong M^C_{(E_0)}$ ナルコトカラ

$$D^C(F_{(E_0)}) = D_{CM}(F)_{(E_0)}, \quad F \in M^C$$

= ヨッテ 定義サレタ D^C ガ $M^C_{(E_0)}$ ノ dimension
 functional ヲナス事ガ分ル。

$$[M^C_{(E_0)} f] = [M^C E_0 f] = [M^C f]$$

デアルカラ

$$D([M^C_{(E_0)} f]) = D_M([M^C f])_{(E_0)}$$

ガ成立スル。又

$$[M_{(E_0)} f] = [E_0 M f] = E_0 [M f]$$

ナル故, $[M_{(E_0)} f]$ ノ projection ヲ F_0 トスレバ

$$F_0 = E_0 P_{[M]f} = (P_{[M]f})_{(E_0)}$$

故 =

$$\begin{aligned} D^c([M]_{(E_0)} f) &= D^c(P_{[M]f})_{(E_0)} \\ &= D_{C[M]}(P_{[M]f})_{(E_0)} \end{aligned}$$

以上、結果ヲ M ト M^c = 同シテ二重 = 適用スレバ次

ノ定理ガ得ラレル:

定理 1.1 $E_0 \in M$, $F_0 \in C(M)$, $(E_0)_Z = (F_0)_Z$

= ノトスル。然ルトキハ

$$C(M_{(E_0 F_0)}) = (CM)_{(E_0 F_0)}$$

デアツテ, $A \rightarrow A_{(E_0 F_0)}$ ナル對應 = ヲツテ

$$\begin{cases} E_0 M E_0 \cong M_{(E_0 F_0)}, \\ F_0 M^c F_0 \cong M^c_{(E_0 F_0)}, \\ Z \cong Z_{(E_0 F_0)} \end{cases}$$

トナル。 D , D^c ヲ

$$\begin{cases} D(E_{(E_0 F_0)}) = D_M(E)_{(E_0 F_0)}, \\ D^c(F_{(E_0 F_0)}) = D_{C[M]}(F)_{(E_0 F_0)}, \end{cases}$$

$$E \in E_0 M E_0;$$

$$F \in F_0 M^c F_0$$

ト定義スレバ, D , D^c ハ夫々 $M_{(E_0 F_0)}$, $M^c_{(E_0 F_0)}$ = 於

ケル dimension functional デアツテ,

$$f \in h_{(E_0, F_0)} = E_0 F_0 h_f = \text{對シテ}$$

$$\begin{cases} D([M_{(E_0, F_0)}^C f]) = D_M([M^C f])_{(E_0, F_0)}, \\ D^C([M_{(E_0, F_0)} f]) = D_{CM}([M f])_{(E_0, F_0)} \end{cases}$$

が成立スル。

2.3. コノ節デハ M ノノ部分環ノ上ノ行列環ト
シテ表現スルコトヲ論ズル。先ツ行列環ノ定義ヲ述ベコ
ウ。¹³⁾ $\bar{h}_f$ ヲ有限次元又ハ無限次元ノ Hilbert 空間,
 n, m ヲ $1 \leq n \leq \infty, \quad 1 \leq m \leq \infty$ トシテ n, m ハ正整数
($n = \infty$ 或ハ $m = \infty$ ノ場合ニ含メテ OK!) トスル。
 $\bar{h}_f$ ノ element カラ成ル $\{n, m\}$ 型ノ matrix:

$$f = (\bar{f}_{j,p}; \quad 0 \leq j < n, \quad 0 \leq p < m)$$

デアツテ

$$\sum \sum \|\bar{f}_{j,p}\|^2 < +\infty$$

ナルモノノ全体ハ

$$(f, g) = \sum \sum (\bar{f}_{j,p}, \bar{g}_{j,p})$$

ヲ内積トスル Hilbert 空間ヲ作ル。吾々ハコノ Hilbert

13) 行列環ノ詳シイコトニツイテハ Rings of Operators,
Part I, Chap II 及ビ III 参照。

空間ヲ $n \times \overline{L}_Y \times m$ デ表ハスコト、シ

$$L_Y = n \times \overline{L}_Y \times m$$

トオク. L_Y / 有界 + linear operator A ハ

$$(A f_{j,p}) = \left(\sum_k \sum_q \bar{A}_{j,k,p,q} f_{k,q} \right)$$

ナル $\overline{L}_Y$ / 有界 operator / tensor $(\bar{A}_{j,k,p,q})$ デ表
ハサレル. コノトキ吾々ハ

$$A = (\bar{A}_{j,k,p,q})$$

ト書クコト = スル. $\overline{L}_Y =$ 於テ任意 / operator ring
 $\overline{M}$ が興ハラレタトシテ, $n \times \overline{M}$, $\overline{M}^c \times m$ ヲ

$$\begin{cases} n \times \overline{M} = (A; A = (\bar{A}_{j,k} \delta_{p,q}), \bar{A}_{j,k} \in \overline{M}), \\ \overline{M}^c \times m = (A; A = (\delta_{j,k} \bar{A}_{p,q}), \bar{A}_{p,q} \in \overline{M}^c) \end{cases}$$

ト定義スル. Matrix / 記法ヲ使ハ、スナハチ

$$n \times \overline{M} = (A; A f = (\bar{A}_{j,k}) (\bar{f}_{k,p}), \bar{A}_{j,k} \in \overline{M}),$$

$$\overline{M}^c \times m = (A; A f = (\bar{f}_{j,p}) (\bar{A}_{p,q}), \bar{A}_{p,q} \in \overline{M}^c)$$

デアル. 容易 = 確メラレル如ク

$$\mathcal{C}(n \times \overline{M}) = (\overline{M}^c \times m)$$

デアル. コレヨリ直テ = $n \times \overline{M}$, $\overline{M}^c \times m$ が $L_Y =$ 於テ
ル operator ring ナルコトガ分ル. $n \times \overline{M}$ ヲ $\overline{M}$

ノ上 / n 次 / 行列環ト名付ケル. $n \times \overline{M}$ ハ uniform
topology 或ハ strongest topology = 關シ

テハ m の如何 = 問セズスベテ *topologically isomorphic* ナルガ、*strong* 又ハ *weak topology* = 用シテハ、 $m = \infty$ = 對スル $n \times \overline{M}$ ト $m < +\infty$ ノトキノ $n \times \overline{M}$ ガ、必ズシニ *homeomorphic* = ナラナイ。ソコデ吾々ハ特ニ $m=1$ = 對スル $n \times \overline{M}$ ヲ $\overline{M}_n$ ト書クコトニスル。

$$\overline{M}_n = n \times \overline{M} \quad (m=1)$$

Hilbert 空間 h_f 及ビ h_f : operator ring M

ガ與ヘラレタトキ

$$h_f = n \times \overline{h_f} \times m, \quad M = n \times \overline{M},$$

$$M^c = \overline{M}^c \times m$$

ナル h_f , $\overline{M}$ ガ存在スルナラバ

$$\begin{cases} E_\nu = (\delta_{j\nu} \delta_{k\nu} \delta_{p\nu}), & (0 \leq \nu < n); \\ F_\nu = (\delta_{jk} \delta_{p\nu} \delta_{q\nu}), & (0 \leq \nu < m) \end{cases}$$

デ定義ナレタ E_ν , F_ν ハ明テカニ

$$\begin{cases} E_\nu \sim E_\mu (M), & E_\nu \cdot E_\mu = 0 (\nu \neq \mu), \\ F_\nu \sim F_\mu (M^c), & F_\nu \cdot F_\mu = 0 (\nu \neq \mu), \end{cases}$$

$$\sum F_\nu = 1$$

ナ満足スル。逆ニ

定理 12. M ガ

$$E_\nu \sim E_\mu (M), \quad E_\nu \cdot E_\mu = 0 \quad (\nu \neq \mu),$$

$$\sum E_\nu = I$$

+ n 個 / projection E_ν を含み, M^c が

$$F_\nu \sim F_\mu (M^c), \quad F_\nu \cdot F_\mu = 0 \quad (\nu \neq \mu),$$

$$\sum F_\nu = I$$

+ m 個 / F_ν を含む + ラベ, l_y, M, M^c は

$$l_y = n \times \bar{l}_y \times m, \quad M = n \times \bar{M},$$

$$M^c = \bar{M}^c \times m$$

行列 = 表ハサレ, E_ν, F_ν は

$$E_\nu = (\delta_{ij}, \delta_{k\nu}, \delta_{pq}), \quad F_\nu = (\delta_{jk}, \delta_{p\nu}, \delta_{q\nu})$$

トナル。

証明.¹⁵⁾ 假定 = ヨッテ

$$\begin{cases} E_\nu = W_\nu W_\nu^*, & E_0 = W_0^* W_0, & W_\nu \in M; \\ F_\nu = W'_\nu W'^*_\nu, & F_0 = W'^*_\nu W'_\nu, & W'_\nu \in M^c \end{cases}$$

+ W_ν partially isometric operator W_ν, W'_ν が存在スル。

15) I を含む algebra A は, 行列単位 e_{jk} を含む + ラベ部分環, 上, 行列環トシテ表ハサレル。コ、テ述バル証明ハコノ代数学 = オケル定理, 証明ト全ク同ジデアル。

$$h_{\nu}^{\nu\rho} = E_{\nu} F_{\rho} h_{\nu}, \quad W_{\nu\mu\rho\sigma} = W_{\nu} W_{\mu}^* W_{\rho}' W_{\sigma}'^*$$

トオケル, $W_{\nu\mu\rho\sigma}$ ハ $h_{\nu}^{\mu\sigma}$ ヲ $h_{\nu}^{\nu\rho}$ = isomorphic =

寫ス. 而ニ

$$W_{\nu\alpha\rho\beta} W_{\alpha\mu\beta\sigma} = W_{\nu\mu\rho\sigma}$$

ナル關係ガアル. 故ニコノ isomorphism = ヲツテ

$$\overline{h_{\nu}} \cong h_{\nu}^{\nu\rho} \cong h_{\nu}^{\mu\sigma} \cong \dots$$

ナル空間 $\overline{h_{\nu}}$ ガ定マル. 又コノ isomorphism $h_{\nu}^{\nu\rho} \cong h_{\nu}^{\mu\sigma}$

= ヲツテ

$$E_{\nu} F_{\rho} M E_{\nu} F_{\rho} \cong E_{\mu} F_{\sigma} M E_{\mu} F_{\sigma},$$

$$E_{\nu} F_{\rho} M^c E_{\nu} F_{\rho} \cong E_{\mu} F_{\sigma} M^c E_{\mu} F_{\sigma}$$

トナル. 従ツテ, 定理 11 ヲ想起スルハ

$$\overline{M} \cong E_{\nu} F_{\rho} M E_{\nu} F_{\rho} \cong M|_{(E_{\nu} F_{\rho})} \cong E_{\nu} M E_{\nu},$$

$$\overline{M}^c \cong E_{\nu} F_{\rho} M^c E_{\nu} F_{\rho} \cong M^c|_{(E_{\nu} F_{\rho})} \cong F_{\rho} M^c F_{\rho}$$

ナル $\overline{h_{\nu}}$: operator ring $\overline{M}$ ガ定マルコトガ分ル.

$$\overline{h_{\nu}} = h_{\nu}^{\nu\rho} \text{ ナル isomorphism = ヲツテ } f \in \overline{h_{\nu}}$$

= 對應スル $h_{\nu}^{\nu\rho}$ / 元ヲ $f^{\nu\rho}$ ト書クコト. シ, h_{ν} / operator

$\overline{A}$ = 對應スル $h_{\nu}^{\nu\rho}$ / operator ヲ $A^{\nu\rho}$ テ表ハス. h_{ν} /

element f ハ $f = \sum \sum E_{\nu} F_{\rho} f$ ト表ハサレル. 従ツ

テ $f =$ 對シテ $f_{\nu\rho}$ ヲ $E_{\nu} F_{\rho} f = f_{\nu\rho}$ ナル様ニ定メレバ

f は matrix $(\bar{f}_{\nu\rho})$ で表ハサレル。故 =

$$f = (\bar{f}_{\nu\rho}), \quad k_y = n \times \bar{k}_y \times m$$

ト考ヘラレル。 k_y operator A ハコトキ

$$A = (\bar{A}_{j k p q}), \quad A_{j k p q}^{\nu\rho} = W_{\nu j p p}^* A W_{k \nu q p}$$

デ表ハサレル。 $A \in \mathbb{M}$ トラバ

$$A_{j k p q}^{\nu\rho} = W_{\nu j p p} A W_{k \nu q p} = F_p \cdot W_{\nu} W_j^* A W_k W_{\nu}^* \delta_{p q}$$

デアールカラ A ハ $(\bar{A}_{j k} \delta_{p q})$ ナル形ヲモツ。即チ

$$\mathbb{M} \subseteq n \times \bar{\mathbb{M}}$$

デアール。同様ニ $\mathbb{M}^c \subseteq \bar{\mathbb{M}}^c \times m$ ナルコトガ示サレル。故

=

$$\mathbb{M} = n \times \bar{\mathbb{M}}, \quad \mathbb{M}^c = \bar{\mathbb{M}}^c \times m$$

デナケレバナラナイ。 $E_{\nu} = (\delta_{j\nu} \delta_{k\nu} \delta_{p q}),$

$F_{\nu} = (\delta_{j k} \delta_{p \nu} \delta_{q \nu})$ トナルコトハ明ラカデアラヲ。

(証明終)

(ツ ヅ ヅ)