1097 Riesz-Fischer ノ定理ニ就テ

中野秀五郎（東大）

私が學士院記事 18,（1942）350－353 ニテ Riesz-Fischer Satz im normierten teilweise geordnaten Modul ト云フ表題デ norm ノアル σ-complete vector-lattice 即チ normieter teilweise geordneter Modul $\mathfrak{M}$ ニ於ケル norm ニ関スル Fundamental sequence ノ収斂性ニツイテ書キマシタ。此処デ其レニ関スル注意ヲ述ベタク思ヒマス。

先ヅ $\mathfrak{M}$ ニ関シテ次ノ二ツノ條件ヲ考ヘマス。

1) $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots\cdots$, $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$ ナラバ

$$\lim_{\nu\to\infty} \| a_\nu \| = 0$$

2) $0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots$ ニテ $\sup_\nu \| a_\nu \| < \infty$ ナラバ $a_\nu \leqq l$ $(\nu = 1, 2, \cdots\cdots)$ ナル l が存在スル。即チ $a_1, a_2, \cdots\cdots$ ハ有界。

定理／トシテ，若シモ $\mathfrak{M}$ が 1) ノ性質ヲ有スルナラバ，norm ニ関スル fundamental sequence が有界ナラバ、コノ sequence カラ収斂（order ニテ）スル sequence ヲ選ビ出セマス。即チ Kantorovitch ノ語ヲ用フレバ、此ノ sequence ハ t-convergent

デアリマス。此ノ証明ハアマリ簡単デハアリマセンデシタ。此ノ定理ノカラ，$\mathfrak{M}\mathfrak{E}$ が 1) ト 2) トヲ同時ニ有スルナラバ $\mathfrak{M}\mathfrak{E}$ が norm ニ関シテ complete デアルコトヲ証明シマシタ。

以上ノヤウニ先ヅ 1) ノ性質ヲ有スル場合カラ，1) ト 2) ヲ同時ニ有スル場合ヘト考ヘヲ進メマシタノハ Lebesgue 積分ニテ、先ヅ banded measurable function ノ積分ヲ定義致シマスト、其ノ場合ニ相等シテ 1) ノ性質が出テ参リマス。次ニ unbounded function 積分可能ヲ定義スルコトニヨリ 2) ノ性質が出テ参リマス。

即チ L_p ヲ考ヘマスノニ Riemann 積分デハ 1) モ 2) モアリマセンが、Lebesgue 積分ノ bounded function ヲ考ヘレバ 1) が得ラレ，undounded function ノ積分可能ヲ定義スレバ 2) が得ラレルノデ、1) カラ 2) ヘノ順ニ考ヘマシタ。

然シ後ニナッテ氣が付キマシタが、逆ニ 2) カラ考ヘマスト Riesz-Fischer ノ定理ハ実ハ trivial ニ近イ程簡単ナモノデアルコトヲ此処ニ注意致シタク思ヒマス。即チ

［定理］ $\mathfrak{M}\mathfrak{E}$ が 2) ノ性質ヲ有スレバ norm ニ関スル fundamental sequence ハ t-convergent デアリマス。即チ convergent sequence が選ビ出セマス。

〔証明〕 $a_1, a_2, \cdots\cdots$ ヲ norm ニ関スル fundamental sequence トスルト

$$\| a_{n_\nu} - a_{n_{\nu-1}} \| < \frac{1}{2^\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots\cdots)$$

ナル partial sequence $a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots\cdots$ ガ選ビ出セマス。然ルトキハ

$$\left\| |a_n| + \sum_{\nu=1}^{\nu} |a_{n_\nu} - a_{n_{\nu-1}}| \right\| \leqq |a_{n_0}| + 1$$

従ッテ2)ニヨリ $a_{n_0} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{n_\nu} - a_{n_{\nu-1}})$ ハ絶對收斂、故ニ $\lim_{\nu \to \infty} a_{n_\nu}$ ガ存在シマス。(H. Nakano: Teilweise geodnete Algebra 輯報参照)

此定理カラ 3)ト 2)ヲ同時ニ有セバ norm ニ関シ complete ナコトハ明カデアリマス。又以上カラ 2)ハ非常ニ強イ條件デアル様ニ思ハレマス。

—— 1943, 1, 5 ——