OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Abstract Hilbert space ノ順序付ケ
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 248, p. 23-33
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75030
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

1098. Abstract Hilbert space ノ順序付ケ

中野秀五郎（東大）

Abstract L_2-space ガ Hilbert space デアルコトハ其ノ表現カラ容易ニ知ラレルコトデアリマス。此処デハ，唯= abstract Hilbert space $\mathfrak{H}$ = semi-order ヲ付ケテ L_2-space トスルコトヲ考ヘテミマセウ。

$\mathfrak{H}$ ハ勿論 real Hilbert space トシ、以下簡単ノタメ separable トシマスガ、勿論 non-separable ノ場合ニモ拡張出来マス。

$\mathfrak{H}$ = semi-order ガ付イテ L_2-space $\mathcal{L}_2$ = ナッタトシマスト、$\mathcal{L}_2$ = 於ケル Projektor ハ $\mathfrak{H}$ = 於ケル Projektionsoperator トナリマス。如何トナレバ、P ヲ Projektor トスレバ、$x \in \mathcal{L}_2$ = 対シテ $P^2x = Px$，又 $x, y \in \mathcal{L}_2$ = 就テハ

$$(Px, y) = \frac{1}{2}\{\|Px+y\|^2 - \|Px\|^2 - \|y\|^2\}$$

$$-\frac{1}{2}\{\|Px+Py\|^2 + \|(1-P)y\|^2 - \|Px\|^2 - \|y\|^2\}$$

$$=\frac{1}{2}\{\|Px+Py\|^2 - \|Px\|^2 - \|Py\|^2\}$$

$$=(Px, Py) - (x, Py)$$

トナリマスカラ，P ハ $\mathfrak{H}$ = 於ケル Projektionsoperator

デアリマス。然シ逆ニ $\mathfrak{h}$ ノ Projektionsoperator ハ必ズシモ L_2 ノ Projektor デナイコトハ L_2 ノ Projektor ノ全体ガ commutative デアルコトカラ明ラカデアリマス。今 L_2 ノ Projektor ノ全体ヲ $\mathfrak{R}$ トシマスト、$\mathfrak{R}$ ハ $\mathfrak{h}$ ニヲケル Projektionsoperator ノ Ring トシテ einfach デアリマス。（H. Nakano: Unitärinvarianter im allgemeinen Euklidischen Raum, Math. Annalen. 118, 1941 ヲ参照）

即チ $\mathfrak{R}$ ノ何レノ Projektionsoperator ト commutative ナ $\mathfrak{h}$ ノ Projektionsoperator ハ $\mathfrak{R}$ ニ属シマス。如何トナレバ、Q ヲ $\mathfrak{R}$ ト commutative ナ Projektionsoperator トシマスト、Q ハ L_2 ニ於ケル Dilatator デアリマシテ、Q^2-Q ナルコトカラ Q ガ Projektor ナコトガ知ラレマス。（H. Nakano Teilweise geordnete Algebra, 輯報 17, 1941 参照）

〔定理〕 $\mathfrak{R}$ ヲ $\mathfrak{h}$ ノ einfach ナ Projektionsoperator ノ Ring トシマスト、$\mathfrak{h}$ ノ elements ノ間ニ teilweise Ordnung ヲ與ヘテ L_2-Modul トシ、L_2 ノ Projektor ノ全体ガ $\mathfrak{R}$ トナルヤウニスルコトガ出来マス。

〔証明〕 $\mathfrak{h}$ ガ separable ナノデ $\mathfrak{h}$ ノ element v

ヲ通常ニトルト、$\mathfrak{P}$ ノスベテノ $P \neq 0$ ニ對シテ $P\nu \neq 0$ ナラシメルコトが出来マス。又 $\mathfrak{P}$ が einfach デスカラ $\{P\nu\}$ $(P \in \mathfrak{P})$ が $\mathfrak{H}$ = テ überall dicht デアリマス。(H. Nakano : Unitärinvarianten ------, 參照)

$\mathfrak{H}$, element x ニ對シテ

$$(x, P\nu) \geqq 0 \quad \text{for all } P \in \mathfrak{P}$$

ナル時 $x \geqq 0$ トシマス。然ル時ハ明カニ

1) $x \geqq 0$ ニテ $y \geqq 0$ ナラバ $x + y \geqq 0$

2) $x \geqq 0$, $x \leqq 0$ ナラバ $x = 0$ (如何トナレバ $\{P\nu\}$ ハ überall dicht in $\mathfrak{H}$ デアルカラ)

又 $x - y \geqq 0$ ナルトキ $x \geqq y$ トスレバ、コレデ $\mathfrak{H}$ ハ semi-ordered トナリマス。次ニ此レが lattice デアルコトヲ証明シマセウ。ソレニハ $x_+ = x \vee 0$ ノ存在ヲ証明スレバ充分デアリマス。今

$$\alpha = \sup_{P \in \mathfrak{P}} (x, P\nu)$$

ト置ケバ、α ハ finite デアリマス。($|(x, P\nu)| \leqq \|x\| \cdot \|\nu\|$) 任意ノ正數 ε ニ對シテ

$$(x, P\nu) > \alpha - \varepsilon \qquad (P \in \mathfrak{P})$$

ナル P が存在シマス。又

$$(x, Q\nu) > \alpha - \delta \qquad (Q \in \mathfrak{P},\ \delta > 0)$$

トシマスト、$PQ \in \mathfrak{P}$ デ從ッテ $(x, PQ\nu) \leqq \alpha$ デスカ

ラ

$$(x,(P+Q)v)=(x,Pv)+(x,Qv)-(x,PQv)$$
$$>\alpha-(\varepsilon+\delta)$$

トナリマス。故ー

$$(x,P_nv)>\alpha-\frac{1}{2^n}\quad(P_n\in\mathfrak{P},\ n=1,2,\cdots\cdots)$$

トナルヤウナ P_n ニ對シテ

$$P_n'=P_n+P_{n+1}+\cdots\cdots$$

ト置ケバ、$P_n'\in\mathfrak{P}$ ニテ、且ツ上述ニヨリ

$$(x,P_n'v)\geqq\alpha-\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots\cdots\right)=\alpha-\frac{1}{2^{n-1}}$$

デアリマス。又 $P_1'\geqq P_2'\geqq\cdots\cdots$ デアリマスカラ

$$P_0=\lim_{n\to\infty}P_n'$$

ト置ケバ、從ッテ

$$(x,P_0v)\geqq\alpha,\quad P_0\in\mathfrak{P}$$

トナリマス。又一方 $(x,P_0v)\leqq\alpha$ トナルベキデスカラ

$$(x,P_0v)=\alpha$$

デナケレバナリマセン。然ルトキハ此ノ P_0 ニ對シテ

$P\in\mathfrak{P}$ ナレバ

$$(P_0x-x,Pv)=(x,P_0Pv)-(x,Pv)$$
$$-(x,P_0v)-(x,(P+P_0)v)$$

然ルニ $P_0+P\in\mathfrak{P}$ ニテ $(x,(P+P_0)v)\leqq\alpha$ トナルベキニ

ヨリ

$$(P_0 x - x, P v) \geqq 0$$

従ッテ, $P_0 x \geqq x$ デアリマス。又一方 $P \in \mathfrak{y}$ ナラバ

$$(P_0 x, P v) = (x, P_0 v) - (x, (P_0 - P_0 P) v)$$

ニテ, $P_0 - P P_0 \in \mathfrak{y}$ ナルニヨリ, $(x, (P_0 - P_0 P) v) \leqq \alpha$

故ニ

$$(P_0 x, P v) \geqq 0$$

従ッテ $P_0 x \geqq 0$ デアリマス。又 $y \geqq x, 0$ トスレバ

$$((1 - P_0) y, P v) = (y, (1 - P_0) P v) \geqq 0$$

$$(P_0 y - P_0 x, P v) = (y - x, P_0 P v) \geqq 0$$

ナルニヨリ $(y - P_0 x, P v) \geqq 0$ 即チ $y \geqq P_0 x$

故ニ

$$P_0 x = x \vee 0 = x_+$$

デアルコトガ知ラレマス。故ニ $\mathfrak{y}$ ハ lattice デアリマス。

次ニ $x \geqq y \geqq 0$ ナレバ

$$\| x \| \geqq \| y \|$$

ナルコトヲ証明シマセウ。其レニハ先ヅ準備トシテ, メヲ正数. $x \geqq 0$ ナルトキハ

(※) $\| x + \alpha P v \| \geqq \| x \|$ $\quad (P \in \mathfrak{y})$

デアルコトヲ注意シマセウ。此レハ然シ

$$\| x + \alpha P v \|^2 = \| x \|^2 + 2\alpha (x, P v) + \| P v \|^2$$

$$\geqq \| x \|^2$$

カラ明カデアリマス。

$\{P_\nu\}$ $(P \in \mathfrak{p})$ ガ $\mathfrak{y}$ デ überall dicht デアリマスカラ任意ノ正数 ε ニ対シテ

$$\|y - (\alpha_1 P_1 v + \cdots\cdots + \alpha_n P_n v)\| < \varepsilon$$

ナル $P_1, \cdots\cdots, P_n \in \mathfrak{p}$ ガ存在シマス。コノ場合 $P_\mu P_\nu = 0$ $(\mu \neq \nu)$ ナル様ニ出来ルコトハ明カデスカラ、$P_\mu P_\nu = 0$ $(\mu \neq \nu)$ デアルトシマス。

然ルトキハ

$$\|y - (\alpha_1 P_1 v + \cdots\cdots + \alpha_n P_n v)\|^2 = \|(1 - P_1 - \cdots\cdots - P_n) y\|^2 + \|P_1 y - \alpha_1 P_1 v\|^2 + \cdots\cdots + \|P_n y - \alpha_n P_n v\|^2$$

デアリマス。又 $y \geqq 0$ ナレバ $P_0 \in \mathfrak{p}$ ニ対シテ、又 $P_0 y \geqq 0$ ナルコトハ明カデスカラ、以上ノ $\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_n$ ノ中、例ヘバ α_1 ガ負数ナレバ (※) ニヨリ

$$\|P_1 y - \alpha_1 P_1 v\| \geqq \|P_1 y\|$$

トナリマスカラ

$$\|y - (\alpha_1 P_1 v + \cdots\cdots + \alpha_n P_n v)\|^2 \geqq \|y - \sum_{\alpha_\nu > 0} \alpha_\nu P_\nu v\|^2$$

トナリマス。故ニ

$$\|y - (\alpha_1 P_1 v + \cdots\cdots + \alpha_n P_n v)\| < \varepsilon$$

ニテ $\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_n \geqq 0$ ト仮定シテモヨイコトニナリマス。

某ノトキハ $x \geqq y \geqq 0$ ニ対シテハ

$$(x_0, \alpha_1 P_1 v + \cdots\cdots + \alpha_n P_n v)$$

$$\geqq (y, \lambda_1 P_1 v + \cdots\cdots + \lambda_n P_n v)$$

デアリマス。又一方

$$(y, \lambda_1 P_1 v + \cdots\cdots + \lambda_n P_n v)$$

$$\geqq (y, y) - \|y\| \cdot \|y - (\lambda_1 P_1 v + \cdots\cdots + \lambda_n P_n v)\|$$

$$\geqq \|y\|^2 - \|y\| \varepsilon$$

$$(x, \lambda_1 P_1 v + \cdots\cdots + \lambda_n P_n v) \leqq (x, y) + \|x\| \cdot \varepsilon$$

$$\leqq \|x\| \|y\| + \|x\| \varepsilon$$

故ニ

$$\|x\| \cdot \|y\| + \|x\| \varepsilon \geqq \|y\|^2 - \|y\| \varepsilon$$

又 ε ハ任意デスカラ

$$\|x\| \cdot \|y\| \geqq \|y\|^2$$

従ッテ $\|x\| \geqq \|y\|$ デアリマス。

次ニ $\mathfrak{y}$ ハ σ-complete デアリマス。如何トナレバ

$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots\cdots$ $x_n \geqq 0$ トスレバ

$$\|x_n\| \leqq \|x_1\| \quad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

デ $(x_1, Pv) \geqq (x_2, Pv) \geqq \cdots\cdots \geqq 0$, $(P \in \mathfrak{P})$ デ然モ $\{Pv\}$ ガ $\mathfrak{y}$ デ überall dicht デスカラ, $x_1, x_2, \cdots\cdots$ ハ weakly convergent デアリマス。故ニ

$$\lim_{n \to \infty} (x_n, Pv) = (x_0, Pv) \quad (P \in \mathfrak{P})$$

トル x_0 ガ存在スル。又此ノ式カラ $x_0 = \bigcap_n x_n$ デアルコトガ解リマス。即チ $\mathfrak{y}$ ハ σ-complete vector-lattice

デアリマス。

今 $a \wedge b = 0$ トシマス。$x = a - b$ ト置ケバ

$$x_+ = x \vee 0 = a$$

デアリマスカラ、最初ニ証明シタ処ニヨリ

$$x_+ = P_0 x \qquad (P_0 \in \mathfrak{P})$$

ナル P_0 ガ存在シマス。然ルトキハ

$$b = x_+ - x = -(1 - P_0)x$$

デアリマスカラ

$$(a, b) = -(P_0 x, (1 - P_0)x) = 0$$

トナリマス。従ッテ

$$\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$$

又 $\|(|x|)\|^2 = \|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 = \|a - b\|^2$

$$= \|x\|^2$$

トナリマス。故ニ以上カラ $\mathfrak{y}$ ガ L_2-Modul デアルコトガ知ラレマス。今コノ L_2-Modul ヲ $\mathfrak{L}_2$ ト置キマス。

次ニ $\mathfrak{L}_2$ ノ Projektor ガ $\mathfrak{P}$ デアルコトヲ証明シマセウ。最初ニ述ベタヤウニ $\mathfrak{L}_2$ ノ Projektor ハ $\mathfrak{y}$ ノ Projektionsoperator デ然カモ einfach + Ring ヲナスコトガ解ッテ居リマスカラ $\mathfrak{L}_2$ ノ Projektor ガ $\mathfrak{P}$ ニ属スル Projektionsoperator デアルコトヲ証明スレバ充分デアリマス。今 $[p]$ ヲ $\mathfrak{L}_2$ ノ Projektor トシマセウ。然ルトキハ $1 - [p]$ モ亦 Projektor デアリマス。又 Projektor ハ positive linear operator デ

アリマスカラ，$x \geqq 0$ ナラバ又 $(1-[P])x \geqq 0$ デアリマス。尚一方 $P_0 \in \mathfrak{P}$ ナル任意ノ P_0 ニ対シテハ

$$(P_0 v, Pv) = \| P_0 P v \|^2 \geqq 0 \qquad (P \in \mathfrak{P})$$

デアリマスカラ $P_0 v \geqq 0$ デアリマス。故ニ

$$((1-[P])(1-P_0)Pv, P_0 Q v) \geqq 0$$

$$(P_0, P, Q \in \mathfrak{P})$$

デアリマス。此不等式ヨリ

$$0 = ((1-P_0)Pv, P_0 Q v) \geqq ([P](1-P_0)Pv, P_0 Q v) \geqq 0$$

ヲ得マスカラ

$$([P](1-P_0)Pv, P_0 Q v) = 0$$

デナケレバナリマセン。従ッテ又

$$(P_0[P](1-P_0)Pv, Qv) = 0$$

デアリマス。然ルニ $\{Qv\}$ $(Q \in \mathfrak{P})$ ハ $\mathfrak{H}$ ニテ *überall dicht* デスカラ

$$P_0[P](1-P_0)Pv = 0$$

又 $\{Pv\}$ $(P \in \mathfrak{P})$ が *überall dicht in* $\mathfrak{H}$ デスカラ

$$P_0[P](1-P_0) = 0$$

即チ $\quad P_0[P] = P_0[P]P_0$

故ニ此ノ *adjungiert* ヲ考ヘレバ又

$$[P]P_0 = P_0[P]P_0$$

故ニ $P_0[P] = [P]P_0$ トナリ $[P]$ ハ $\mathfrak{P}$ ノ総ベテノ *Projek-*

tionsoperator ト commutative デ，$\mathfrak{P}$ ハ einfach デスカラ $[p] \in \mathfrak{P}$ デナケレバナリマセン．以上ニテ証明サレマシタ。

此ノ定理ニ於ケル順序付ケハ一通リデハナイガ次ノ定理ガ成立ス．

〔定理〕 abstract Hilbert space $\mathfrak{L}$ ノ一通リノ順序付 $\mathfrak{L}'_2$，$\mathfrak{L}''_2$ ガ同一ノ Projektor Ring $\mathfrak{P}$ ヲ有スルナラバ，$\mathfrak{P}$ ヨリ $P, Q \neq 0$ $P.Q$ ヲ次ノ如クニ定メルコトガ出来ル．即チ

$$PQ = 0, \quad P+Q = 1$$

$$Px \geqq 0 \quad in \ \mathfrak{L}'_2 \rightleftarrows Px \geqq 0 \quad in \ \mathfrak{L}''_2$$

$$Qx \geqq 0 \quad in \ \mathfrak{L}'_2 \rightleftarrows Qx \geqq 0 \quad in \ \mathfrak{L}''_2$$

〔証明〕 $\mathfrak{P}$ ヨリ $P \neq 0 \rightarrow Pv \neq 0$ ナルヴニ對シテ $v_0 = |v|$ in $\mathfrak{L}'_2$ トスレバ，又 $\mathfrak{P}$ ヨリ $P \neq 0 \rightarrow Pv_0 \neq 0$ デアリマス。又

$$v''_+ = v_0 \smile 0 \quad in \ \mathfrak{L}''_2$$

$$v''_- = (-v_0) \smile 0 \quad in \ \mathfrak{L}''_2$$

トシ，$P = [v''_+]$，$Q = [v''_-]$ ト置ケバ，此レガ用件ニ適スルコトハ容易ニ知ラル。

（注意） abstract Hilbert space ノ順序付ケハ，丁度座標軸ヲ與ヘルコトニナルノデアリマス。

故ニ selfadjoint operator H ニ對シテハ，

適當ニ順序付ケヲ行ヘバ，Hハ diagonal form. 即チ dilatator トナルノデアリマス。此ノコトニツイテハ何レ又詳シク書クコトニシマス。

—— 1943，1，2 ——