



Title	可換デナイ Operator Ringノスペクトル分解ニ就 テ, III
Author(s)	小平, 邦彦
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 249, p. 34-66
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75031
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1099. 可換デキイ Operator Ring / スペクトル分解ニ就テ, III

小平 邦彦 (東京文理大)

§3 I 型ノ環ノ構造

3.1. M ノ h_y / I 型ノ operator ring トスル.
然ルトキハ定理9ニヨレバ h_y ハ $\Sigma \oplus h_{yI}(n, m)$ ノ形ニ
分解サレ, コレニ從ツテ $M \in C(M)$ ニ西側 ideal ノ直
和ニ分タレル. 故ニ I 型ノ環ノ構造ヲ論ズルニハ h_y が唯一
ツノ部分 $h_{yI}(n, m)$ カラ成ル場合ヲ考ヘレバ充分デア
ル.

$h_y = h_{yI}(n, m)$ トスレバ

$$\begin{cases} \text{Range } D_M = (H; H \text{ ハ 整}, 0 \leq H \leq n) \\ \text{Range } D_{C(M)} = (H; H \text{ ハ 整}, 0 \leq H \leq m) \end{cases}$$

デアール. 故ニ

$$D_M(E_j) = 1, \quad E_j \cdot E_k = 0 \quad (j \neq k), \quad \Sigma E_j = 1$$

ナル M ノ n 個ノ projection E_j , 及ビ

$$D_M(F_k) = 1, \quad F_j \cdot F_k = 0 \quad (j \neq k), \quad \Sigma F_j = 1$$

ナル $C(M)$ ノ m 個ノ projection F_j が存在スル. 從ツ
テ定理12ニヨツテ $h_y, M, C(M)$ ハ

$$h_y = n \times \overline{h_y} \times m, \quad M = n \times \overline{M}, \quad M^C = \overline{M}^C \times m$$

ナル形 = 現ハサレル. $\overline{h}_y$ ハ

$$\overline{h}_y \cong h_y(E, \overline{F}_p)$$

デアツテ, コノ *spatially isomorphism* = ヨツテ

$$\begin{cases} \overline{M} \cong M_{(E, \overline{F}_p)}, \\ \overline{M}^c \cong M^c_{(E, \overline{F}_p)}, \\ \overline{Z} \cong Z_{(E, \overline{F}_p)} \end{cases}$$

トナル.²⁾ 定理 11 = ヨレバ $M_{(E, \overline{F}_p)} \cong M_{(E)}$ デアツテ,

$M_{(E, \overline{F}_p)}$ = 用スル *dimension* ハ

$$D(E_{(E, \overline{F}_p)}) = D_M(E)_{(E, \overline{F}_p)}, \quad E \in E, M|E,$$

デ興ヘラレル. 然ル $D_M(E) = 1$, スハチ E ハ 1 = 於

テ最小デアルカラ, $E \in E, M|E$ = 於シテハ $D_M(E) = E_z$

デナレバナラナイ. 故ニ

$$D(E_{(E, \overline{F}_p)}) = (E_z)_{(E, \overline{F}_p)}$$

容易ニ示サレル如ク $(E_z)_{(E, \overline{F}_p)} = (E_{(E, \overline{F}_p)})_z$ デアル.

故ニ $\overline{M}$ が $M_{(E, \overline{F}_p)}$ = *isomorphic* ナルコト = ヨツテ

$$D_{\overline{M}}(\overline{E}) = \overline{E}_z$$

ナルコトガワカル. コレハ $\overline{M}$ が $[1]$ ナル型ヲモツ事ヲ示シテ

2) $\overline{Z}$ ハ $\overline{M}$ ノ *center* ヲ現ハス: $\overline{Z} = \overline{M} \cap \overline{M}^c$

キル. 同様ニテ $\overline{M}^C$ モ I , 型デアル. 従ッテ $\overline{M}$, $\overline{M}^C$ 内ノ
 projection ハスベテ $\overline{Z}$ = 含マレル. 一般ニ hermitic
 operator ハ projection ノ一次結合ノ極限ト考ヘラ
 レル. 故ニ $\overline{M}$ 及ビ $\overline{M}^C$ = 含マレル hermitic operator
 ハ $\overline{Z}$ = 属スル.

今マデ述べテ来タ理論ハ實 Hilbert 空間ニ於テモ成立
 スル. コノデシバラク h_y ハ複素 Hilbert 空間デアルトレ
 ヲウ. 複素 Hilbert 空間デハ operator ring ハソノ
 projection デ生成サレル. 故ニ

$$\overline{M} = \overline{M}^C = \overline{Z}$$

デアル. 従ッテ $D_{\overline{M}} = D_{C\overline{M}} = D_{\overline{Z}}$ デアルカラ, 定理 8 =
 ヲツテ

$$\overline{h_y} = [\overline{Z} \overline{f}]$$

ナル $\overline{f}$ が存在スル. $\mathcal{Z}_{(E, F, p)} \cong \mathcal{Z}$ ナル故,

$$\overline{\mathcal{Z}} \cong \mathcal{Z}$$

デアル. 従ッテ コノ同型對應デ $A \in \mathcal{Z}$ = 對應スル $\overline{Z}$ ノ元
 ヲ $\overline{A}$ トスレバ, $\overline{A}$ ハ

$$\overline{A} = \int_{\Omega} \chi(\lambda) \overline{E(d\lambda)}$$

ナル形ニ現ハサレル.³⁾

3) 吾々ハ §1 デ $\mathcal{Z}$ ノ projection ノ作ル Boole 代數ヲ

measure space $(\Omega; m)$ ノ可測集合束ガ表現シタ.

コノデソレヲ援用スル. $E(\Gamma)$ ハコノ表現ニ於テ (次頁ニ續ク)

$\|\overline{E(\Gamma)} \bar{f}\|^2$ の明ラカ = Γ , 絶対連続 + 集合函数 $\bar{f}_y$ が $[\mathbb{Z} \bar{f}]$ と表ハサレテキルコトカラ知ラレル如ク,
 $\|\overline{E(\Gamma)} \bar{f}\|^2 = 0$ + ラバ $\overline{E(\Gamma)} = 0$, 従ッテ $m(\Gamma) = 0$ デナ
 ケレバ + ラス. 故 =

$$\|\overline{E(\Gamma)} \bar{f}\|^2 = \int_{\Gamma} (w(\lambda))^2 d\lambda$$

+ ル 到 ル 所 $w(\lambda) > 0$ + 函数 $w(\lambda)$ が存在スル. コレ
 ヲ用ヒテ

$$\bar{\varphi} = \int_{\Omega} \frac{1}{w(\lambda)} \overline{E(d\lambda)} \bar{f}$$

ヲ作ル. 然ルトキハ, 明ラカ = $[\bar{\varphi}]_z = 1$ デアルカラ

$$\bar{f}_y = [\mathbb{Z} \bar{\varphi}]$$

デアッテ

$$\|\overline{E(\Gamma)} \bar{\varphi}\|^2 = m(\Gamma)$$

が成立スル。

$$\bar{A} = \int z(\lambda) \overline{E(d\lambda)}$$

トスレバ

$$\|\bar{A} \bar{\varphi}\|^2 = \int_{\Omega} |z(\lambda)|^2 d\lambda$$

デアル. 従ッテ $\bar{A} \bar{\varphi} \rightarrow z(\lambda) = \text{ヨッテ } \mathbb{Z} \bar{\varphi} \text{ ハ } \Omega \text{ 上}$

(前頁ヨリ)

可測集合 Γ = 對應スル projection ヲ表ハス, デアル。

§1. 参照,

m -平方可積分函数ノ作ル Hilbert 空間 $h_{y,\Omega} = \text{isometric}$ = 寫サレル. 故 = $\overline{h_y} = [\overline{\mathbb{Z}} \overline{\varphi}] \cong h_{y,\Omega}$ デアル. ストハチ

$$\overline{h_y} = h_{y,\Omega}$$

ト考ヘラレル. $\overline{B} = \int b(\lambda) E(d\lambda)$ トスレバ, コノトキ

$$\overline{B}(\overline{A} \overline{\varphi}) = (\overline{B} \overline{A}) \overline{\varphi} \rightarrow b(\lambda) z(\lambda)$$

デアル. 故 = $\overline{h_y} = h_{y,\Omega}$ ト考ヘレバ $\overline{A}$ ハ

$$\overline{A} = z(\lambda) \times$$

ヲ表ハサレルコトガ分ル. 結果ヲマトメレバ次ノ定理ガ得ラレル:

定理 13. $\mathbb{M}$ ガ I 型ノ operator ring ナルトキ,

$$h_y \wedge \mathbb{M} \vdash C(\mathbb{M}) = \text{關シテ} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \oplus h_y(n, m) \text{ ノ形ニ分解}$$

サレ, コレニ從ツテ $\mathbb{M}$, $C(\mathbb{M})$ 及ビ $\mathbb{Z}$ ハ “兩側イデアール” ノ和:

$$\begin{cases} \mathbb{M} = \sum \sum \oplus \mathbb{M}(n, m), \\ C(\mathbb{M}) = \sum \sum \oplus C(\mathbb{M})(n, m), \\ \mathbb{Z} = \sum \sum \oplus \mathbb{Z}(n, m) \end{cases}$$

ニ分ケレル. コノ一ツノ部分 $h_y(n, m)$ ヲトツテ $\mathbb{Z}(n, m)$ ノ projection ノ作ル Boole 代数ヲ表現スル measure space ヲ $\Omega(n, m)$ トスレバ

$$h_y(n, m) = n \times \overline{h_y} \times m,$$

$$\overline{h_y} = h_{y,\Omega}(n, m)$$

デアッテ, $Z(\lambda) \times$ 十ル形, $\bar{h}_y$ / operator / 作ル abelian ring $\bar{\mathbb{Z}}$ トスレバ

$$M(n, m) = n \times \bar{\mathbb{Z}}$$

$$C(M)(n, m) = \bar{\mathbb{Z}} \times m$$

デアル。

3.2. コノ節デハ h_y が實 Hilbert 空間 + ル場合 = $\bar{h}_y$ = 於ケル I, 型ノ環 $\bar{M}$ 及ビ $\bar{M}^c$, 構造ヲ定メルコトヲ問題トスル。簡単ノタメ $\bar{h}_y = h_y$, $\bar{M} = M$, $\bar{M}^c = M^c$, $\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ トオキ, $\mathbb{Z}$ / projection γ measure space Ω / 可測集合 Γ ヲ用ヒテ $E(\Gamma)$ ト現ハス。

Lemma 2.1 $[f]_{\mathbb{Z}} = 1$ + ルトキ

$$[\mathbb{Z} \varphi] = [\mathbb{Z} f], \quad \|E(\Gamma) \varphi\|^2 = m(\Gamma)$$

+ ル φ が存在スル。

証明: 1 節 = 於テ $\bar{f}$ カラ $\bar{\varphi}$ ヲ作ツタノト同ジ方法ヲ f カラ φ ヲ作レバ, φ ハ明ラカ = 求ムルモノデアル (証明終)

吾々ハ $\|E(\Gamma) \varphi\|^2 = m(\Gamma)$ + ルトキ φ ハ unitary デアルトイフコト = スル。—— M / hermitic operator ハスベテ $\mathbb{Z}$ = 含マレル。故ニ, $A \in M$ = 對シテ

$$|A| = \sqrt{A^* A}$$

= ヨッテ $|A|$ ヲ定義スレバ, $|A| \in \mathbb{Z}$ デアル。ソコデ

$$|A| = \int_{\Omega} a_A(\lambda) E(d\lambda)$$

トオク. コレ = 對シテ $f \in \mathcal{H}_\gamma$ が任意 = 與ヘラレタトキ

$$\|E(\Gamma)f\|^2 = \int \{a_f(\lambda)\}^2 E(d\lambda), \quad a_f(\lambda) \geq 0$$

= ヨツテ $a_f(\lambda)$ を定義スル. φ が unitary + レトキハ
明ラカ =

$$a_{A\varphi}(\lambda) = a_A(\lambda)$$

デアル. 従ツテ $a_{A\varphi}(\lambda)$ ハ有界 + レコトが分ル.

Unitary + レ φ ツ定メテ φ_0 トスル. $[\varphi_0]_{\mathbb{Z}} = 1$
デアルカラ, $B \in \mathbb{Z}$ が $B\varphi_0 = 0$ を満足スル+ラバ $B=0$
デ+ケレバ+ラヌ. 故ニ, $A\varphi_0 = 0$ +ラバ $A^*A\varphi_0 = 0$ デ"
 $A^*A \in \mathbb{Z}$ デアルカラ, $A=0$ +レコトが分ル. 従ツテ
 $A \rightarrow A\varphi_0$ = ヨツテ $A \in \mathbb{M}$ ト $A\varphi_0 \in \mathbb{M}\varphi_0$ が一對一 $\leftarrow$ 對
應スル. $f = A\varphi_0$ +ラバ既ニ述ベタ如ク $a_f(\lambda)$ ハ有界デ
アル. 逆ニ:

Lemma 2.2. $a_f(\lambda)$ が有界 + レ f ハ $A \in \mathbb{M}$ +レ A を
用ヒテ $f = A\varphi_0$ ト表ハサレル.

証明.⁴⁾ $[\varphi_0]_{\mathbb{Z}} = 1$ デアルカラ $\mathbb{M}^{\mathbb{C}}$ が I_1 = 属スルコト
= ヨツテ $\mathcal{H}_\gamma = [\mathbb{M}\varphi_0]$ デアル. 故ニ $\lim A_j \varphi_0 = f$ +
ル $A_j \in \mathbb{M}$ が存在スル.

$$A_j \text{ を例へバ } \|A_j \varphi_0 - A_{j+k} \varphi_0\| < \frac{1}{2^j} \text{ +レ様ニ選ンデ}$$

オケバ

4) §2. lemma 1.8, 証明参照.

$$\| (|A_j - A_{j+k}| \varphi_0) \|^2$$

$$= \int_{\Omega} |a_{A_j - A_{j+k}}(\lambda)|^2 d\lambda < \frac{1}{4j}$$

トナル。従って

$$\Gamma_\nu = \sum_{j > \nu} \sum_k (\lambda; |a_{A_j - A_{j+k}}(\lambda)|^2 \geq \frac{1}{2^j})$$

トオクト, $m(\Gamma_\nu) < \frac{1}{2^{\nu-1}}$ デアツテ, $\lambda \notin \Gamma_\nu$ + ラバ

$a_{A_j - A_{j+k}}(\lambda)$ ハ $j \rightarrow \infty$ トキ一様 = 収斂スル。故
=

$$E_\nu = 1 - E(\Gamma_\nu)$$

トオケバ, $A_j \cdot E_\nu$ ハ $j \rightarrow \infty$ トキ *uniform topology*
ノ意味デ収斂スル。コノ極限ヲ A_ν トスレバ明ラカ =

$A_\nu \in M$ デアツテ

$$A_\nu \varphi_0 = \lim_j A_j \cdot E_\nu \varphi_0 = E_\nu f$$

デアル。コノコトカラ

$$a_{A_\nu}(\lambda) = \begin{cases} a_f(\lambda), & \lambda \notin \Gamma_\nu \\ 0, & \lambda \in \Gamma_\nu \end{cases}$$

ナルコトガ分ル。従ツテ $a_f(\lambda) \leq C < +\infty$ ナル如ク C ヲ定

メル。任意ノ $h \in \mathcal{H}$ = 對シテ

$$\|A_{\nu+\mu} h - A_\nu h\|^2 \leq C^2 \|E_{\nu+\mu} h - E_\nu h\|^2$$

が成立スル。又明ラカ $\|A\| \leq C$ デアル。故 $= A$ は strong Topology の意味デア M の元 A = 収斂スル。而シテ明ラカ =

$$f = A \varphi_0$$

デア (証明終)

$\mathbb{Z}$ ト $C(\mathbb{Z})$ = 関シテ定理 9 ヲ適用スレバ, $\mathbb{Z}$ は I 型デアルカラ, $h_y = \sum \oplus h_{y_n}$ の形 = 分解サレ, $C(\mathbb{Z})$ は各 h_{y_n} = 於イテ夫々 I_n 型 = 属シテキル。 h_I = 於ケル M 及ビ $C(M)$ の構造ハ明ラカデア。 h_{y_n} の projection ヲ E_n トスレバ, スナハチ $C(\mathbb{Z})_{(E_1)} = \mathbb{Z}_{(E_1)}$ デアルカラ,

$$M_{(E_1)} = M_{(E_1)}^C = \mathbb{Z}_{(E_1)}$$

h_{y_n} の部分ヲ考ヘルタメ = 簡単ノタメ $h_y = h_{y_n}$ トシヨウ。然ルトキハ h_y ハ 1 = 於テ $C(\mathbb{Z})$ = 関シ最小ナル個ノ m_j の和 = 分タレル。

$$h_y = \sum_{0 \leq j < n} \oplus m_j$$

m_j ハ定理 8 = ヨレバ $m_j = [\mathbb{Z} f_j]$ ト書カレル。

$(m_j)_Z = 1$ デアルカラ $[f_j]_Z = 1$, 従ツテ lemma

2.1 = ヨツテ

$$m_j = [\mathbb{Z} \varphi_j] \quad \varphi_j \text{ ハ unitary}$$

トシテヨイ。明ラカ $\alpha \varphi_j(\lambda) = 1$ デアル。故 = lemma

2.2 = ヨレバ

2.2 = ヨレバ

$$\varphi_j = U_j \varphi_0, \quad U_j \in \mathbb{M}$$

ナル U_j が存在スル。然ルニ

$$a_{U_j}(\lambda) = a_{\varphi_j}(\lambda) = 1$$

デアアルカラ

$$U_j^* U_j = \int \{a_{U_j}(\lambda)\}^2 E(d\lambda) = 1,$$

即チ U_j は unitary デアル。

U_0 は 明カラ $= 1$ デアル。 $j \neq k$ トスレバ, $[\mathbb{Z}\varphi_j]$ ト $[\mathbb{Z}\varphi_k]$ が直交シテキルカラ, $A \in \mathbb{Z}$ ラ任意ニトツキ

$$(AU_j \varphi_0, U_k \varphi_0) = 0$$

デアアル。故ニ

$$(A(U_k^* U_j + U_j^* U_k) \varphi_0, \varphi_0) = 0$$

然ルニ $U_k^* U_j + U_j^* U_k$ は hermitic デアルカラ $\mathbb{Z} =$ 含マレル。

従ツテ $A = U_k^* U_j + U_j^* U_k$ トオイテ見レバ

$$U_j^* U_j + U_j^* U_k = 0$$

ナル事知ラレル。コノ特ニ $k=0$ トスレバ

$$U_j^* = -U_j, \quad \text{或ハ} \quad U_j^2 = -1 \quad (j \neq 0)$$

ガ得ラレル。従ツテ k, j が共ニ $\neq 0$ ナラバ

$$U_j U_k = -U_k U_j$$

デアル。

$n < +\infty$ デアルトスル。スレト $[M \varphi_0] = \Sigma \oplus [\mathbb{Z} \varphi_j]$

カラ

$$M = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} U_1 + \dots + \mathbb{Z} U_{n-1}$$

ナルコトが示サレル。 $f = A \varphi_0$, $A \in M$ トスレバ $a_f(\lambda)$ ハ有界デアル。従ッテ

$$\|E(\Gamma) P_{[\mathbb{Z} \varphi_j]} f\|^2 \leq \|E(\Gamma) f\|^2$$

デアルカラ, $f = P_{[\mathbb{Z} \varphi_j]} f$ トカケバ $a_{f_j}(\lambda)$ モ有界デナケ

レバナラヌ。然ル = Lemma 2.2 カラ明ラカナル如ク, 一

般 = φ が unitary ナルトキ, $g \in [\mathbb{Z} \varphi]$ が有界ナ

$a_g(\lambda)$ ヲ有スルナラバ $g \in \mathbb{Z} \varphi$ デアル。⁵⁾ 故 = $f_j = B_j \varphi_j$,

$B_j \in \mathbb{Z}$ ナル B_j が存在スル。従ッテ $A \varphi_0 = \Sigma f_j = \Sigma B_j \varphi_j$

$= \Sigma B_j U_j \varphi_0$ デアルカラ

$$A = \Sigma B_j U_j, \quad B_j \in \mathbb{Z}$$

デアル —

$n=1$ ノ場合ハ済ンデキルカラ $n>1$ トスル。 $n=2$ ト

スレバ $M = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} U_1$ トナリ, M ハ abelian トナ

ッテ center が $\mathbb{Z}$ ナルコト = 矛盾スル。故 = M ハ少ク

トモ U_1 ト U_2 ヲ含ム。 U_1 ト U_2 カラ $U = U_1 U_2$ ヲ作ル。

U ハ unitary デアルツテ

5) Lemma 2.2 = 於テ M ヲ $\mathbb{Z}$ デ置換ヘ $h_g = [\mathbb{Z} g]$ ト考ヘレバヨイ。

$$U^* U_j + U_j^* U = 0 \quad (j = 0, 1, 2)$$

ヲ満足スル. 従ツテ $\mathbb{Z}$ 1 operator ハスベテ hermitic
デアアルカラ, 任意ノ $A, B \in \mathbb{Z}$ ニ對シテ

$$\begin{aligned} & 2(AU_0, BU_j\varphi_0) \\ &= (\varphi_0, AB(U^*U_j + U_j^*U)\varphi_0) = 0 \end{aligned}$$

カ成立スル. スナハチ $[\mathbb{Z}U_0] \perp [\mathbb{Z}U_j\varphi_0]$ デアル.

故ニ $n \geq 4$ デアツテ, $U = U_3$ ト考ヘテヨイコトカ分ル.

U_1, U_2, U_3 ハ

$$\begin{cases} U_1^2 = U_2^2 = U_3^2 = -1, \\ U_1U_2 = -U_2U_1 = U_3, \\ U_3U_1 = -U_1U_3 = U_2, \\ U_2U_3 = -U_3U_2 = U_1 \end{cases}$$

ヲ満足スル. スナハチ四元体ノ單位 i, j, k ト同ジ關係式
ヲ満足スルノデアアル. 然ルニ $n > 4$ ハ許サレナイ. 何トナレ
バ U_1, U_2, U_3 ノ他ニ U_4 ガアツタトシテ

$$V = U_4(U_2 + U_3)/\sqrt{2}$$

トオケバ V モ亦 unitary デ $V^2 = -1$ ヲ満足シ, 而モ V
ハ U_1 ト可換デアアル. 故ニ $A = VU_1$ トオケバ $A^* = A$ デ且
 $A^2 = 1$ デアル. $A^* = A$ ナルコトカラ A ハ $\mathbb{Z}$ ニ含マレル
事カ分ル. 然ルニ

$$A = VU_1 = U_4(U_2 - U_3)/\sqrt{2}$$

デアアル. 故ニ両辺ニ $U_4^* = -U_4$ ヲ掛ケレバ

$$AU_4 = (U_2 - U_3)/\sqrt{2}$$

従って

$$\sqrt{2} A u_4 \varphi_0 = u_2 \varphi_0 - u_3 \varphi_0$$

コレハ $[\mathbb{Z} u_j \varphi_0] \perp [\mathbb{Z} u_k \varphi_0] \ (j \neq k)$ ナルコト = 予
言スル ———.

コレデ $n > 1$ ナラバ $n = 4$ デ

$$M = \mathbb{Z} + u_1 \mathbb{Z} + u_2 \mathbb{Z} + u_3 \mathbb{Z}$$

ナルコトガ 分ツヌ. M ハ スナハチ " $\mathbb{Z}$ ノ 上ノ 四元環" デ
アル.

$C(M)$ カラ 任意ノ element A^C ヲ トッテ $f = A^C \varphi_0$
ヲ 作レバ $\alpha_f(\lambda)$ ハ 有界デアル. 従って lemma 2.2 = ヨ
ツテ

$$A^C \varphi_0 = A \varphi_0, \quad A \in M$$

ト 表ヘサレル. M ト $C(M)$ ノ 関係ハ 對稱デアルカラ, 逆
= $A \in M$ ヲ 任意ニ トレバ $A \varphi_0 \wedge A^C \varphi_0$, $A^C \in M^C$ ト 表
ヘサレル. $A^C \varphi_0 = A \varphi_0$ ナル 関係 = ヨツテ $A \in M$ ト
 $A^C \in M^C$ ガ 一対一 = 對應スルノ デアル. ユノ 對應ハ
而モ

$$AB \varphi_0 = AB^C \varphi_0 = B^C A \varphi_0 = B^C A^C \varphi_0$$

カラ 明カナル如ク 逆同型對應デアル. 故ニ

$$C(M) = \mathbb{Z} + u_1^C \mathbb{Z} + u_2^C \mathbb{Z} + u_3^C \mathbb{Z}$$

デアル. $u_j^C \varphi_0 = \varphi_j$ ハ unitary デアルカラ u_j^C ハ

unitary デナケレバ ナラヌ. 一方 M^C ガ M = 逆同型

ナルコトカラ, $(U_j^c)^2 = -I$ ナルコトが知らレル。従
ツテ

$$(U_j^c)^* = -U_j^c$$

コレヨリ, $\mathbb{Z}$ が hermitic operator にヨリ成ルコ
ト = 注意スレバ

$$(A^*)^c = (A^c)^*$$

ナルコトが分ル。逆同型對應 $A \rightarrow A^c$ ハスナハチ *ヲ保存
スルノデアアル。

$[\mathbb{Z}\varphi_0]$ ハ $\mathcal{H}_{\Omega} = \text{isomorphic}$ デアツテ,
 $[\mathbb{Z}\varphi_0] = \mathcal{H}_{\Omega}$ ト考ヘレバ, $Z = \int \varphi(\lambda) E(d\lambda)$ デ表ハ
サレル operator Z ハ

$$Z = \varphi(\lambda) \times$$

ト表ハサレル。一般 = measure space Ω が與ヘラレ
タトキ $\mathcal{H}_{\Omega}$, $\varphi(\lambda) \times$ ナル形ノ operator 全体ノ作ル
ring ヲ $\mathbb{A}_{\Omega}$ ト書クコト = シヨウ。

然ルトキハ

$$M = A_{\Omega} + U_1 A_{\Omega} + U_2 A_{\Omega} + U_3 A_{\Omega},$$

$$C(M) = A_{\Omega} + U_1^c A_{\Omega} + U_2^c A_{\Omega} + U_3^c A_{\Omega}$$

デアツテ, $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ ハ $\mathcal{H}_{\mathcal{M}} = \Sigma \oplus U_j [\mathbb{Z}\varphi_0]$ カラ明ラカナル如
ク

$$\mathcal{H}_{\mathcal{M}} = \mathcal{H}_{\Omega} \oplus U_1 \mathcal{H}_{\Omega} \oplus U_2 \mathcal{H}_{\Omega} \oplus U_3 \mathcal{H}_{\Omega}$$

ト表ハサレル. $g \in \mathcal{H}_\Omega$ トスレバ U_j^c ト $U_k g$ 積ノ法則
ハ明ラカニ

$$U_j^c U_k g = U_k U_j g$$

デ舉ヘラレル. U_j^c ヲ $\mathcal{H}_\Omega$ 1 element へ "左カラ" 掛
ケルコトハ U_j ヲ "右カラ" 掛ケルコトニ外ナラナイノデア
ル. 四元單位 U_1, U_2, U_3 ヲ i, j, k デ表ハセバ以上ノ結果
ハ次ノ如クナル.

定理14. $\mathcal{H}_\Omega$ ヲ實 Hilbert 空間トシ, $\mathcal{H}_\Omega$ 1
operator ring $\mathbb{M}$ 及ビ $\mathbb{M}$ 1 commutator
 $C(\mathbb{M})$ カ共 $= I$, 型 $=$ 属スルトスル. スルト $\mathcal{H}_\Omega$ ハ $\mathbb{M}$ ト
 $C(\mathbb{M})$ $=$ 関シテ

$$\mathcal{H}_\Omega = \mathcal{H}_\Omega^{(r)} \oplus \mathcal{H}_\Omega^{(g)}$$

ノ形ニ分解サレ, コレニヨツテ $\mathbb{M}$, $C(\mathbb{M})$ 及ビ center
 $\mathbb{Z}$ ハ

$$\mathbb{M} = \mathbb{M}^{(r)} \oplus \mathbb{M}^{(g)}$$

$$C(\mathbb{M}) = C(\mathbb{M})^{(r)} \oplus C(\mathbb{M})^{(g)},$$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{(r)} \oplus \mathbb{Z}^{(g)}$$

ノ形ニ分タレル. 6) 第一ノ部分 $\mathcal{H}_\Omega^{(r)}$ へ於テハ $\Omega \ni \mathbb{Z}^{(r)} = A_\Omega$

6) 一般ニ $\mathcal{H}_\Omega = \Sigma \oplus \mathcal{H}_\Omega$, 1 ト $\mathcal{H}_\Omega$, 各 $\mathcal{H}_\Omega$ 1 projection P_j カ

$\mathbb{M}$ 1 各 element ト可換ナラバ, $\mathcal{H}_\Omega = \Sigma \oplus \mathcal{H}_\Omega$ ナル分解ヲ

$\mathbb{M}$ $=$ 関スル分解トイフコトニナル.

+ 11 measure space トスレバ

$$\mathcal{H}^{(r)} = \mathcal{H}_{\Omega}, \quad \mathcal{M}^{(r)} = \mathcal{C}(\mathcal{M})^{(r)} = \mathcal{Z}^{(r)} = \mathbb{A}_{\Omega}$$

デアール. 第二ノ部分 $\mathcal{H}^{(q)}$ デハ $\mathcal{Z}^{(q)} = \mathbb{A}_{\Omega}$ トスレバ

$$\mathcal{H}^{(q)} = \mathcal{H}_{\Omega} \oplus i \mathcal{H}_{\Omega} \oplus j \mathcal{H}_{\Omega} \oplus k \mathcal{H}_{\Omega},$$

$$\mathcal{M}^{(q)} = \mathbb{A}_{\Omega} + i \mathbb{A}_{\Omega} + j \mathbb{A}_{\Omega} + k \mathbb{A}_{\Omega}$$

デアッテ, $\mathcal{C}(\mathcal{M})^{(q)}$ ハ i^c, j^c, k^c フ

$$i^c f = f i, \quad f \in \mathcal{H}^{(q)} \text{ 等}$$

ト定義スレバ

$$\mathcal{C}(\mathcal{M})^{(q)} = \mathbb{A}_{\Omega} + i^c \mathbb{A}_{\Omega} + j^c \mathbb{A}_{\Omega} + k^c \mathbb{A}_{\Omega}$$

ト表ハサレル. 但シコノデ i, j, k ハ四元單位デアッテ,
operator トシテハ unitary + 11 ムノトスル.

コノ結果ヲ前節ノ結果ニ合セレバ次ノ定理カ得ラ
レル.

定理15. 實 Hilbert 空間ニ於ケル I 型ノ operator
ring $\mathcal{M}$ ハ次ノ如キ構造ヲモツ: 先ヅ $\mathcal{H}$ ハ $\mathcal{M}$ ト $\mathcal{C}(\mathcal{M})$
ニ関シ

$$\mathcal{H} = \sum \sum \oplus \mathcal{H}^{(r)}(n, m) \oplus \sum \sum \oplus \mathcal{H}^{(q)}(n, m)$$

ノ形ニ分解サレ, コレニ從ッテ $\mathcal{M}$, $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ 及ビ $\mathbb{Z}$ ハ両側
イデアールノ直和ニ分タレル.

$$\begin{cases} \mathbb{M} = \Sigma \Sigma \oplus \mathbb{M}^{(r)}(n, m) \oplus \Sigma \Sigma \oplus \mathbb{M}^{(q)}(n, m) \\ C\mathbb{M} = \Sigma \Sigma \oplus C(\mathbb{M})^{(r)}(n, m) \oplus \Sigma \Sigma \oplus C(\mathbb{M})^{(q)}(n, m), \\ \mathbb{Z} = \Sigma \Sigma \oplus \mathbb{Z}^{(r)}(n, m) \oplus \Sigma \Sigma \oplus \mathbb{Z}^{(q)}(n, m). \end{cases}$$

コノ一ツノ直和因子 $\mathfrak{h}_y^{(r)}(n, m)$ ノトノハ

$$\begin{cases} \mathfrak{h}_y^{(r)}(n, m) = n \times \overline{\mathfrak{h}}_y^{(r)} \times m, & \overline{\mathfrak{h}}_y^{(r)} = \mathfrak{h}_y \Omega^{(r)}(n, m), \\ \mathbb{M}^{(r)}(n, m) = n \times \overline{\mathbb{Z}}^{(r)}, \\ C(\mathbb{M})^{(r)}(n, m) = \overline{\mathbb{Z}}^{(r)} \times m, & \overline{\mathbb{Z}}^{(r)} = A_{\Omega^{(r)}}(n, m) \\ \mathbb{Z}(n, m) \cong \overline{\mathbb{Z}}^{(r)}, \end{cases}$$

$\mathfrak{h}_y^{(q)}(n, m)$ ノ考ヘルハ

$$\mathfrak{h}_y^{(q)}(n, m) = n \times \overline{\mathfrak{h}}_y^{(q)} \times m,$$

$$\overline{\mathfrak{h}}_y^{(q)} = \mathfrak{h}_y \Omega \oplus i \mathfrak{h}_y \Omega \oplus j \mathfrak{h}_y \Omega \oplus k \mathfrak{h}_y \Omega,$$

$$\mathbb{M}^{(q)}(n, m) = n \times \overline{\mathbb{M}}^{(q)},$$

$$\overline{\mathbb{M}}^{(q)} = A_{\Omega} + i A_{\Omega} + j A_{\Omega} + k A_{\Omega},$$

$$C(\mathbb{M})^{(q)}(n, m) = C(\overline{\mathbb{M}})^{(q)} \times m,$$

$$C(\overline{\mathbb{M}})^{(q)} = A_{\Omega} + i^c A_{\Omega} + j^c A_{\Omega} + k^c A_{\Omega},$$

$$\mathbb{Z}^{(q)}(n, m) = \mathbb{Z}^{(q)}, \quad \overline{\mathbb{Z}}^{(q)} = A_{\Omega}$$

デアル。

—— 廣 Hilbert 空間，I 型，operator ring
 八 abelian ring A_{Ω} / 上ノ行列環 $\mathfrak{A}_{\Omega}$ / 上ノ

行列環ノ直和 = isomorphic = ナルノデアル。

3.3. I 型ノ環ノスペクトル分解. I 型ノ環 = 関スルスペクトル分解定理ハ定理13 或ハ定理15 カラ容易ニ導ビカレル。初メ = 三ノ定義ヲ述ベル—— Ω ヲ (separable ナル) measure space, $\mathcal{H}$ ヲ unitary space トスル。

定義3.1. Ω デ定義サレタ $\mathcal{C}$ ノ値ヲトル函数 $f(\lambda)$ ハスベテノ $g \in \mathcal{C}$ = 對シテ $(f(\lambda) g)$ が可測ナルトキ入可測函数デアルトイフ。

$\mathcal{C}$ ノ完全正規直交系ヲ φ_j トスレバ

$$(f(\lambda) g(\lambda)) = \sum (f(\lambda) \varphi_j) (\overline{g(\lambda) \varphi_j})$$

デアルカラ, $f(\lambda)$ ト $g(\lambda)$ が可測ナラバ $(f(\lambda) g(\lambda))$ モ可測デアル。特ニ $f(\lambda)$ が可測ナラバ $\|f(\lambda)\|$ モ可測デアル。

$$\int_{\Omega} \|f(\lambda)\|^2 d\lambda < +\infty$$

ナル可測函数 $f = f(\lambda)$ ノ全体ハ明ラカニ

$$(f, g) = \int_{\Omega} (f(\lambda) g(\lambda)) d\lambda$$

ヲ内積トスル Hilbert 空間ヲ作ル。

定義3.2 $\int_{\Omega} \|f(\lambda)\|^2 d\lambda < +\infty$ ナル $f(\lambda)$ ノ作ル

Hilbert 空間ヲ

$$L_2 = \int_{\Omega} \oplus \mathcal{B} d\lambda$$

が表ハス。

$\mathcal{B}$ ノ有界 + operator 全体ノ作ル環ヲ $B(\mathcal{B})$ が表ハス。

定義 3.3 Ω が定義サレタ $B(\mathcal{B})$ ノ値ヲトル函数 $A(\lambda)$ ハスベテノ $\varphi, \psi \in \mathcal{B} =$ 對シテ $(A(\lambda)\varphi, \psi)$ が可測ナルトキ入ノ可測函数デアルトイフ。

容易ニ確かメラレル如ク, $A(\lambda)$ が可測ナラバ $(A(\lambda))^*$ モ可測, $A(\lambda)$ ト $f(\lambda)$ が可測ナラバ $A(\lambda)f(\lambda)$ モ可測, $A(\lambda)$ ト $B(\lambda)$ が可測ナラバ $\alpha A(\lambda) + \beta B(\lambda)$, $A(\lambda)B(\lambda)$ 等モ可測デアル。又一般ニ operator A / uniform topology / 意味ノ norm ヲ $\|A\|$ ト書クコト = スレバ, $\|A(\lambda)\|$ ハ $\mathcal{B}$ / everywhere dense set $\mathcal{F}_\nu$ ヲ用ヒテ

$$\|A(\lambda)\| = \sup_{\varphi_\nu} \frac{\|A(\lambda)\varphi_\nu\|}{\|\varphi_\nu\|}$$

ト書カレル。故ニ $\|A(\lambda)\|$ モ入ノ可測函数デアル。吾々ハ $\|A(\lambda)\|$ が有界ナルトキ函数 $A(\lambda)$ ハ有界デアルトイフコト = スル。 $A = A(\lambda)$ が有界可測ナルトキ $f = f(\lambda) \in \int \oplus \mathcal{B} d\lambda =$ 對シテ

$$Af = A(\lambda)f(\lambda)$$

= ヨツテ Af ヲ定義スレバ, $A \in \int \oplus \mathcal{B} d\lambda$ ノ有界 +

operator + ル. コノトキ而シ

$$\|A\| = \text{ess. max}_{\lambda \in \Omega} \|A(\lambda)\|$$

デアル. 何トナレバ先ヅ $\|A\| \leq \text{ess. max}_{\lambda \in \Omega} \|A(\lambda)\|$ ハ明
ヲカデアル。

逆ニ $f = f(\lambda)$ トシテ

$$f(\lambda) = \begin{cases} g_\nu & (\lambda \in T' \text{ ノトキ}) \\ 0 & (\lambda \notin T' \text{ ノトキ}) \end{cases}$$

シトレバ

$$\|Af\|^2 = \int_{T'} \|A(\lambda) g_\nu\|^2 d\lambda \leq \|A\|^2 \|g_\nu\|^2 \nu(T')$$

故ニ零集合ヲ除ケバ $\|A(\lambda) g_\nu\| \leq \|A\| \|g_\nu\|$ デアル. 従ッ
テ g_ν トシテ g デ everywhere dense + ル可附着集
合ヲトツテ見レバ

$$\text{ess. max}_{\lambda \in \Omega} \|A(\lambda)\| \leq \|A\|$$

トルコトガ分ル. -----

$\|M\|$ テ h_y / I 型, operator ring トシ, h_y ハ
Hilbert 空間デアルトスル. 定理 13 ニヨレバ h_y
ハ M ト $C(M) = \text{関シテ } \sum \oplus h_y(n, m)$ / 形ニ分解サ
トル. スベテトル分解ヲ論ズルニハ $h_y(n, m)$ /
前々ニ扱ヘバヨイカラ, $h_y = h_y(n, m)$ ト考ヘル.
然レトキハ

$$\begin{cases} h_f = n \times h_{f\Omega} \times m, \\ M = n \times A_{\Omega}, \\ C(M) = A_{\Omega} \times m, \\ \mathbb{Z} \cong A_{\Omega} \end{cases}$$

デアル. h_f , element は

$$f = (\bar{f}_{j,p}), \quad \bar{f}_{j,p} = f_{j,p}(\lambda) \in h_{f\Omega}$$

ノ如ク表ハサレル.

$$\sum_j \sum_p \int_{\Omega} |f_{j,p}(\lambda)|^2 d\lambda = \|f\|^2 < +\infty$$

デアル. 故ニ (n, m) 型ノ複素行列 $x = (x_{j,p})$ デ

$$\sum_j \sum_p |x_{j,p}|^2 < +\infty$$

ナルモノノ全体カラ成ル unitary 空間⁷⁾ヲ $\mathcal{U}$ トスレバ, λ ノ零集合ヲ除イテ行列 $(f_{j,p}(\lambda))$ ハ $\mathcal{U}$ ニ属スル.

従ツテ

$$f(\lambda) = (f_{j,p}(\lambda))$$

トオケバ $f(\lambda)$ ハ $\mathcal{U}$ ノ値ヲトル λ ノ可測函数ト考ヘラレル. 而モ

$$\|f\|^2 = \int_{\Omega} \|f(\lambda)\|^2 d\lambda$$

デアル. 故ニ f ハ $\int \oplus \mathcal{U} d\lambda$, element $f(\lambda)$ デアル

ルト考ヘラレ, 従ツテ $f = f(\lambda)$ トオケバ

7) 内積 (x, y) ハ $(x, y) = \text{trace } y^* x$ デ與ヘラレルトスル.

$$h_f = \int_{\Omega} \oplus b \, d\lambda$$

トナル。コレハトナハチ h_f ノスペクトル分解ニ他ナラ
 ナイ。行列空間 $\mathcal{B}$ ハ、複素数体ヲクト書クコトニス
 レバ

$$\mathcal{B} = m \times K \times m$$

ト表ハサレル。

次ニ $\|M\|$ ヲ考ヘル。 M = 属スル任意ノ operator A
 ハ

$$A = (\bar{A}_{jk} \delta_{pq}), \quad \bar{A}_{jk} = a_{jk}(\lambda) (\lambda \in \Lambda_{\Omega})$$

ト表ハサレル $a_{jk}(\lambda)$ ハ λ ノ零集合ヲ除ケバ、スベテノ
 有限個ノ数 x_{jp} ニ對シテ

$$(*) \quad \sum_j \sum_p \left| \sum_k a_{jk}(\lambda) x_{kp} \right|^2 \leq \|A\|^2 \sum_j \sum_p |x_{jp}|^2$$

ヲ満足スル。何トナレバ $f = (f_{jp}(\lambda))$ ヲ

$$f_{jp}(\lambda) = \begin{cases} x_{jp} & (\lambda \in \Gamma, \text{トキ}) \\ 0 & (\lambda \notin \Gamma, \text{トキ}) \end{cases}$$

トオケバ、 $\|Af\| \leq \|A\| \|f\|$ カラ

$$\begin{aligned} & \sum_j \sum_p \int_{\Gamma} \left| \sum_k a_{jk}(\lambda) x_{kp} \right|^2 d\lambda \\ & \leq \|A\|^2 \sum_j \sum_p |x_{jp}|^2 m(\Gamma) \end{aligned}$$

ナルコトカ分ル。従ツテ x_{jp} ヲ一組定メテオケバ零集合
 $\Gamma(x_{jp})$ カ定マツテ $\lambda \notin \Gamma(x_{jp})$ ニ對シテハ $(*)$ カ成

立ッ. コノ $\Gamma(x_{j,p})$ ヲ用ヒテ Γ_0 ヲスベテノ有限個ノ有理数ノ組 $x_{j,p} = \text{對スル } \Gamma(x_{j,p})$ ノ和ト定義スル. 然レトキハ Γ_0 ハ明ラカ=零集合デアッテ, 極限ヲトレバ明ラカナル如ク, $\lambda \notin \Gamma_0 = \text{對シテハ常ニ } (*) \text{ が成立スル}$ ———.

(*) カラ, λ ノ零集合ヲ除ケバ $x = (x_{j,p}) \in \mathcal{B}$ ノトキ

$$\sum_k a_{j,k}(\lambda) x_{k,p}$$

ハ絶対収斂シテ

$$\sum_j \sum_p \left| \sum_k a_{j,k}(\lambda) x_{k,p} \right|^2 \leq \|A\|^2 \sum_j \sum_p |x_{j,p}|^2$$

ナル事カ分ル. 従ッテ

$$x = (x_{j,p}) \rightarrow A(\lambda)x = \left(\sum_k a_{j,k}(\lambda) x_{k,p} \right)$$

= ヨッテ $\mathcal{B}$ ノ norm が $\|A\|$ ヲ越エナイ linear operator $A(\lambda)$ が定義サレル. $A(\lambda)$ ハ明ラカ= λ ノ可測函数ヲ各 $A(\lambda)$ ハ $\mathcal{B} = n \times K \times m$ ノ operator ring $n \times K$ = 属スル. $f_y = \int \oplus \mathcal{B} d\lambda$ ト考ヘテ $f \in f_y$ ヲ $f = f(\lambda)$ ト表ハセバ, 明ラカ=

$$A f = A f(\lambda) = A(\lambda) f(\lambda)$$

デアル. スナハチ $A = A(\lambda)$ デアル. 逆ニ $A(\lambda) \in n \times K$ ナル有界可測函数 $A = A(\lambda)$ ハ $f_y = \int \oplus \mathcal{B} d\lambda$ ノ operator ト考ヘクトキ $\|A\|$ = 属スル operator ヲ表ハスコトハ容易ニ確カメラレル. $\|A\|$ ハスナハチ $A(\lambda) \in n \times K$ ナル有界可測函数ノ全体カラ成ルデアル. コノコトヲ各々ハ記号的ニ

$$M = \int_{\mathcal{S}} \oplus (n \times K) d\lambda$$

ヲ表ハスコトスル。

定理 16 (I 型環ノスペクトル分解). $\mathcal{H}$ ヲ複素 Hilbert 空間, M ヲ $\mathcal{H}$ ノ I 型ノ operator ring トシ, $C(M)$ ヲ M ノ commutator トスル. 然ルトキハ $\mathcal{H}$ ハ M ト $C(M)$ = 関シテ

$$\mathcal{H} = \sum_n \sum_m \oplus \int_{\mathcal{S}(n,m)} \oplus (n \times K \times m) d\lambda$$

ノ形ニ分解サレ, コレニ從ツテ M ト $C(M)$ ハ

$$\begin{cases} M = \sum_n \sum_m \oplus \int_{\mathcal{S}(n,m)} \oplus (n \times K) d\lambda \\ C(M) = \sum_n \sum_m \oplus \int_{\mathcal{S}(n,m)} \oplus (K \times m) d\lambda \end{cases}$$

ノ如ク分解サレル。

コノ定理 16 ノ結果ハ, $\mathcal{S} = \sum_n \sum_m \mathcal{S}(n, m)$ トオキ, $\lambda \in \mathcal{S} =$ 對シテ $\mathcal{S}_\lambda$, M_λ 及 $C(M_\lambda)$ ヲ, $\lambda \in (n, m)$ ノトキ

$$\begin{cases} \mathcal{S}_\lambda = n \times K \times m \\ M_\lambda = n \times K \\ C(M_\lambda) = K \times m \end{cases}$$

ト定義スレバ, $\int \oplus$ ノ中ニ $= \sum \sum \oplus$ ヲ含メテ形式的ニ

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{h}_f = \int_{\Omega} \oplus \mathfrak{h}_{\lambda} d\lambda \\ \mathbb{M} = \int_{\Omega} \oplus \mathbb{M}_{\lambda} d\lambda \\ C(\mathbb{M}) = \int_{\Omega} \oplus C(\mathbb{M}_{\lambda}) d\lambda \end{array} \right.$$

ト表ハスコトが出来ル。複素 Hilbert 空間 = 於ケル I 型ノ
環ハ行列環ノ直積分 —— 連続的直和 —— = 分解サレ
ルノデアイル。

實 Hilbert 空間 = 於ケル I 型環ノスペクトル分解ハ
定理 15 カラ導カレル。結果ヲ言ヘバ

定理 17. $\mathfrak{h}_f$ フ實 Hilbert 空間, $\mathbb{M}$ フ I 型
ノ operator ring トスル。然ルトキハ $\mathfrak{h}_f, \mathbb{M}, C(\mathbb{M})$
ハ

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathfrak{h}_f = \int_{\Omega} \oplus \mathfrak{h}_{\lambda} d\lambda, & \mathfrak{h}_{\lambda} = n_{\lambda} \times \Xi_{\lambda} \times m_{\lambda}; \\ \mathbb{M} = \int_{\Omega} \oplus \mathbb{M}_{\lambda} d\lambda, & \mathbb{M}_{\lambda} = n_{\lambda} \times \Xi_{\lambda}; \\ C(\mathbb{M}) = \int_{\Omega} \oplus \mathbb{M}_{\lambda}^c d\lambda, & \mathbb{M}_{\lambda}^c = \Xi_{\lambda}^c \times m_{\lambda} \end{array} \right.$$

ノ形 = 分解サレル。但シココデ Ξ_{λ} ハ實數体又ハ函
元數体デアツテ, Ξ_{λ}^c ハ Ξ_{λ} フ Ξ_{λ} 自身ノ operator
ノ作ル体ト考ヘタトキノ Ξ_{λ} ノ commutator フ現

ハス。

實 Hilbert 空間ニ於ケル I 型ノ環ハ $\mathbb{C}$ ノ子ノ有限次元ノ体及ビ四元数体ノ上ノ行列環ノ直積ニ分解サレル。正ニ豫期セラレル結果デアル。——

一般ノ環 M が與ヘラレタトキ、 $\mathbb{C}$ ノ center $\mathbb{Z}$ トスレバ、 M ハ I 型環 $C(\mathbb{Z})$ ノ部分環トナル。故ニ一般ノ環 M 〆、 $\mathbb{C}$ ノ center $\mathbb{Z}$ λ 有界可測函数ノ環 $(\mathcal{L}(\lambda); \lambda \in \mathcal{L})$ トシテ表現シタトキ、行列環 $M \otimes \lambda$ ノ値ヲトル有界可測函数 $A(\lambda)$ ノ作ル環トシテ表現サレルノデアアル。

§4. 連續函数ニヨル表現

コノ § デハ I 型ノ環ヲ既約環ノ値ヲトル連續函数ノ環トシテ表現スルコトヲ論ズル。一般ノ環 M が與ヘラレタトキ、 $\mathbb{C}$ ノ center $\mathbb{Z}$ トスレバ M ハ I 型ノ環 $C(\mathbb{Z})$ 〆含マレル。然ツテ一般ノ環 M 〆連續函数ノ環トシテ表現サレル事ガナル。

4.1. 可測函数ノ連續函数ニヨル表現。 $\mathcal{L}$ ノルベッゲ測度 μ ノ定義サレタ空間トシ $m(\mathcal{L}) < +\infty$ トスル。 $\mathcal{L}$ ノ可測集合ノ作ル Boole 代数ヲ $(\mathcal{P})$ 、零集合ノ作ル $(\mathcal{P})$ ノ sub-algebra ヲ (N) トシ $(\overline{\mathcal{P}}) = (\mathcal{P}) / (N)$ トオク。 $(\overline{\mathcal{P}}) = (\mathcal{P}) / (N)$ ハ $\mathbb{C}$ ノ totally disconnected + bicomact 空間ノ open 且ツ closed + 部分集

合 / 作ル algebra = 同型デアル. 吾々ハコノ空間ヲ M ノ
デ表ハシ, M ノ点ヲ P , 等, ソノ open 且ツ closed +
部分集合ヲ $\mathcal{L}$ 等ト書ク.

$$(\overline{\Gamma}) = (\Gamma) / (N) \cong (\mathcal{L})$$

= ヨツテ $\mathcal{L}$ = 對シテ $\Gamma \in (\overline{\Gamma})$ が mod (N) デ一義 = 定
マル. コレヲ

$$\Gamma = \Gamma(\mathcal{L})$$

デ表ハス. Ω , Lebesgue 測度 m ヲ用ヒテ M ノ 1 任意
ノ部分集 $\mathcal{O}$ = 對シテ

$$m^*(\mathcal{O}) = \inf_{\mathcal{L} \supset \mathcal{O}} m(\Gamma(\mathcal{L}))$$

= ヨツテ $m^*(\mathcal{O})$ ヲ定義スレバ m^* ハ容易 = 確メラレル
如ク Carathéodory 外測度デアツテ, $\mathcal{L}$ ハスベテ m^* -
可測デ

$$m^*(\mathcal{L}) = m(\Gamma(\mathcal{L}))$$

デアル. 従ツテ m^* -可測集合 $\mathcal{O}$ = 對シテ

$$m(\mathcal{O}) = m^*(\mathcal{O})$$

トオケバ, m ハ M ノ = 於ケル Lebesgue 測度デアツテ
 $m(\mathcal{L})$ ハ $m(\Gamma(\mathcal{L}))$ ト一致スル. 而モ M ノ = 於テハ任
意ノ可測集合 $\mathcal{O}$ = 對シテコレト零集合ヲ除イテ一致スル
open 且ツ closed + 集合 $\mathcal{L}$ が存在スル. スナハチ M ノ =
於テ作ツタ Boole 代数:

$$(\text{可測集合}) / (\text{零集合})$$

$\mathcal{H}(\mathcal{L})$ と同型 = ナル / デアル。

R / compact metric space とスル。一般 =
measure space $\mathcal{S}$ が定義サレタ R / 値ヲトル 函数
 $\phi(\lambda)$ ハ R / スズテ / Boole 集合 $\mathcal{B} = \{\phi^{-1}(B)\}$
が可測ナレトキ可測函数デアルト言ハレル。ソシテ零集合ヲ
除イテ一致スルニツノ可測函数ヲ同ー / モ / ト見做ス
ナラバ、可測函数ハ R / Borel 集合全体 / 作ル
algebra $(\mathcal{B})$ カラ $(\overline{\mathcal{P}}) = (\mathcal{P}) / (N)$ ハ / 束縛同型
對應:

$$B \rightarrow \overline{\phi^{-1}(B)}$$

= ヨシテ 定メラレル。故ニ、 $\mathcal{S} =$ 於ケル可測函数 $\phi(\lambda)$
ト $\mathcal{MP} =$ 於ケル可測函数 $\Phi(P)$ が零集合ヲ除イテ考
ヘレバ

$$\phi^{-1}(B) = \mathcal{P}(\Phi^{-1}(B)) \quad (B \in (\mathcal{B}))$$

ナル 關係ヲ 媒介トシテ一對一 = 對應スル。而モコノ對應ニ
際シテハ 明ラカニ 函数ノ相互ノ距離が保存サレル: ス
ナハチ $\phi_1 = \Phi_1$ が 對應シテキルトキ R / 距離ヲ ρ デ表ハ
スナラバ

$$\begin{aligned} & \text{ess. max}_{\lambda} \rho(\phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda)) \\ &= \text{ess. max}_{\mathcal{P}} \rho(\Phi_1(\mathcal{P}), \Phi_2(\mathcal{P})) \end{aligned}$$

が成立スル。然ルニ

Lemma 1.1. $\mathcal{MP} =$ 於テハ如何ナル可測函数

$\Psi(P)$ = 對シテモコト零集合ヲ除イテ一致スル連続函数
が存在スル。

何トナレバ, $\Psi(P)$ の compact 空間ノ値ヲトル可
測函数デアルカラ "階段可測函数" $\Psi_\nu(P)$ デ一様ニ近似
セラレル。然ルニ M = 於テハ任意ノ可測集合ハ零集合ヲ除
ケバ open 且 closed ナ集合ト一致スル。故ニ $\Psi_\nu(P)$
= 對シテハコト零集合ヲ除イテ一致スル連続函数 $\Psi_\nu(P)$
が存在スル。 $\Psi_\nu(P)$ ハ零集合ヲ除ケバ $\Psi(P)$ = 一様ニ收
斂スル。従ツテ $\Psi_\nu(P)$ ハ連続デアルカラ列ル所ニ一様收斂デナ
ケレバナラナイ。ソコデ

$$\Psi(P) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \Psi_\nu(P)$$

トオク。然ルトキハ $\Psi(P)$ ハ明ラカニ連続デアツテ, 零
集合ヲ除ケバ $\Psi(P)$ ハ $\Psi(P)$ ト一致スル ——。

故ニ:

定理18. 零集合ヲ除イテ一致スル函数ヲ同ト考ヘレ
バ, measure space Ω ノ上ノ可測函数 $\phi(\lambda)$ ト bi-
compact space M ノ上ノ連続函数 $\Psi(P)$ が

$$\phi^{-1}(B) = \Gamma(\Psi^{-1}(B))$$

ナル關係ヲ媒介トシテ一對ニ對應スル。 $\phi_\nu(\lambda) =$
 $\Psi_\nu(P)$ が對應シテキルトスレバ

$$\text{ess. max}_\lambda \rho(\phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda)) = \max_P \rho(\Psi_1(P), \Psi_2(P))$$

デアル。

コノトキ, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \phi_\nu(\lambda) = \phi(\lambda)$ デアルが収斂か必ずしも一様デナイ場合ニハ, 對應スル $\Phi_\nu(P)$ ト $\Phi(P)$ ノ關係ハ如何ニナルデアラウカ? 一般ニ $\lim \phi_\nu(\lambda) = \phi(\lambda)$ ナルトキハ, 任意 $\epsilon (> 0) =$ 對シテ $m(P) < \epsilon$ ナル P ヲ適當ニ選ベバ $\int_0 - \Gamma$ デハ $\phi_\nu(\lambda)$ ハ $\phi(\lambda) =$ 一様ニ収斂スル。コノ様ナ Γ ヲ一ツ定メテ對應スル $\mathcal{L}$ ノ element $\gamma \mathcal{L}(\epsilon)$ トスル。然ルトキハ $m - \mathcal{L}(\epsilon)$ デハ $\Phi_\nu(P)$ ハ $\Phi(P) =$ 一様ニ収斂スル。從ツテ例ヘバ

$$\sigma_0 = \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}\left(\frac{1}{2^j}\right)$$

トオケバ, $m(\sigma_0) = 0$ デアツテ $m - \mathcal{L}$ 。デハ $\Phi_\nu(P)$ ハ $\Phi(P) =$ 収斂スル。スナハチ $\phi_\nu(\lambda)$ が $\phi(\lambda) =$ 収斂スルトキハ對應スル $\Phi_\nu(P)$ ハ零集合ヲ除ケバ對應スル $\Phi(P) =$ 収斂スルノデアアル。

4.2. 以上ノ結果ヲ用ヒテ I 型環ノ連續函數ニヨル表現ヲ論ビヨウ。簡單ノタメ

$$h_\gamma = \int_{\Omega} \oplus \mathcal{G} d\lambda, \quad \mathcal{G} = n \times K \times m$$

トシ, $h_\gamma =$ 於ケル I 型環

$$\mathbb{M} = \int_{\Omega} \oplus (n \times K) d\lambda$$

ヲ考察スル。 $\overline{\mathbb{M}} = n \times K$ トオキ, $\overline{\mathbb{M}}$, element γ

$\bar{A}, \bar{B}$ 等ト書クコト = スレバ, $\mathbb{M}$ ハ $\mathcal{F}$ ナハチ Ω 上ノ
 $\bar{\mathbb{M}}$ ノ値ヲトル有界可測函数全体ガ成ル環デアール. 然
 $\mathbb{L} = \bar{\mathbb{M}}$ ノ開球:

$$\mathcal{B}(r) = \{ \bar{A}; \|\bar{A}\| \leq r, \bar{A} \in (\bar{\mathbb{M}}) \}$$

ハ weak topology = 閉シテハ compact metric space ヲ作ル.

故ニ定理 18 ヲ適用スレバ, $\mathbb{M}$ ノ各 element A
 = ハ bicomact 空間 $\mathcal{M}$ ノ上ノ連續函数 $A(p)$ ガ
 一對一ニ對應スルコトガ分ル. ヲノ對應ニ於テ $\mathbb{M} =$ 於
 ケル代数的演算ハ如何ニナルデアラウカ? 一般ニ $A(p)$
 及ビ $B(p)$ ガ weak topology = 閉シテ連続ナルトキ
 ハ $A^*(p)$, $\alpha A(p) + \beta B(p)$ ハ連續デアールガ $A(p) \cdot B(p)$
 ハ $n = \infty$ ノトキハ必ズシモ連續ニナラナイ. $n = \infty$ ノ
 場合 = ハ $\mathcal{M}$ ノ上ノ $\bar{\mathbb{M}}$ ノ値ヲトル連續函数ノ全体ハ環ヲ
 作ラナイノデアール. 然シ, $\mathcal{G}$ ノ完全正規直交系ヲ g_j トス
 レバ任意, $\varphi, \psi \in \mathcal{G}$ = 對シテ

$$(A(p)B(p)\varphi, \psi) = \sum_j (A(p)g_j, \psi)(B(p)\varphi, g_j)$$

デアールカラ, $A(p)B(p)$ ハ $\mathcal{M} =$ 於ケル $\mathcal{F}$ ノ可測函数
 デアール. 従ツテ $A(p)B(p)$ = 對シテ, コレト同集合ヲ
 除イテ一致スル連續函数が存在シテ唯一通リニ定マール.
 吾々ハ

定義. $A(p)$ 及ビ $B(p)$ ガ $\mathcal{M}$ 上ノ $\bar{\mathbb{M}}$ ノ値ヲト
 ル連續函数ナルトキ, $A(p) \cdot B(p)$ ト同集合ヲ除イテ一

致スル連続函数ヲ $A = A(p)$ ト $B = B(p)$ 、積ト名付
ケ コレヲ $AB = AB(p)$ デ表ハスコト = スル。

カクノ如クスレバ 加 上ノ M ノ値ヲトル連続函数ノ全体。
ガ環トナル事明カデアラシ。 M ハ

$$A = A(\lambda) \rightarrow A(p)$$

ナル對應 = ヨ ッテ、コノ意味ノ連続函数ノ環 = 代數
的 = *isomorphic* = ナルノデアル。次 = コレヲ証明
シヨウ。

$A \rightarrow A(p)$ ハ階段可測函数 = 對シテハ明ラカ = 代數
的同型對應ヲ與ヘル。從ッテ任意ノ $A = A(\lambda)$ ハ *weak*
topology = 關シテハ階段可測函数デ一様 = 近似セ
ラレルカラ先ヅ $\times$, $\div$ 及ビ $+$ ナル三種ノ演算 = 關シテハ
 $A \rightarrow A(p)$ ハ同型對應ヲ與ヘルコトガ合ル。次 = 「積」
ヲ考ヘル。 $A(p)$ ト $B(p)$ ノ上記ノ意味ノ積 $AB(p)$ ハ
 $A(p) B(p)$ ト零集合ヲ除イテ一致スル連続函数デアル。
故 = $AB \rightarrow AB(p)$ ナルコトヲ示ス = ハ、スベテノ φ ,
 $\psi \in \mathcal{B}$ = 對シテ

$$(A(\lambda) B(\lambda) \varphi, \psi) \rightarrow (A(p) B(p) \varphi, \psi)$$

ナルコトヲ言ヘバヨイ。然ルニ

$$\begin{cases} (A(\lambda) B(\lambda) \varphi, \psi) = \sum_j (A(\lambda) \varphi_j, \psi) (B(\lambda) \varphi, \varphi_j), \\ (A(p) B(p) \varphi, \psi) = \sum_j (A(p) \varphi_j, \psi) (B(p) \varphi, \varphi_j) \end{cases}$$

デアッテ

$$\sum_{j=1}^n (A(\lambda) \varphi_j, \psi) (B(\lambda) \varphi, \varphi_j)$$

$$\rightarrow \sum_{j=1}^n (A(p) \varphi_j, \psi) (B(p) \varphi, \varphi_j)$$

＋ルコトハ明カデアール。コノ両辺ハ一樣ニ有界デアール。故
 ニコノ $n \rightarrow \infty$ ノトキノ極限タル $(A(\lambda) B(\lambda) \varphi, \psi) =$
 $(A(p) B(p) \varphi, \psi)$ ガ對應スル——。以上ノ結果ヲ定理
 トシテマテオク：

定理19. $\mathcal{H} = \int_{\Omega} \oplus (n \times K \times m) d\lambda =$ 於ケル環

$M = \int_{\Omega} \oplus (n \times K) d\lambda$ ハ *compact* ナ空間 M 上デ

定義サレタ $n \times K$ ノ値ヲトル *weakly continuous function* 全体ノ環ト代数的ニ同型ニナル。