OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	代數曲線ノ Uniformisation ニツイテ
Author(s)	有馬, 喜八郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 249, p. 66-75
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75032
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

1100. 代數曲線ノ Uniformisation ニツイテ

有馬 喜八郎 (阪大)

$f(x, y) = 0$ ヲ geschlecht p ナル代數曲線トス。

$p \geqq 2$ ナルトキ全平面デ有理型ナ函数 $x = g(t)$, $y = h(t)$ ニテ uniformisation スルコトハ出来ナイ。

コレハ Picard ノ定理デ，コノ系トシテ Picard ノ除外値定理ガ出テ来ルコト等ハヨク知ラレタコトデス。

以下コレニ関シテ述ベラレタイト思ヒマス。

得ラレタ結果ハ大部分ハ知ラレタモノデ，又証明法モ殆ンド既知ノ方法デス。

第一章ハ Ahlfors ノ Schwarz ノ Lemma ヲ利用シ[1]，第二章ニテ Nevanlinna 流ノ方法ヲ述ベタイト思ヒマス．又第一章ハ第二章ヘノ準備モ兼ネテイマス。

第 一 章

1. $f(x, y) = 0$ ヲ geschlecht p ナル代数曲線トシソノ Riemann 面ヲ R トス。

R 上ノ q 個ノ点 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_q$ ニテ夫々 $(m_i, 1)$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots q)$ ナル對應ヲナス如キ單位円ヘノ一一寫

---

(1) Ahlfors. An extension of Schwarz's Lemma (Trans. Amer. Math. Soc. 43. 1938)

R. M. Robinson: A generalization of Picard's and related theorems (Duke. Math. Journ. 5. 1939)

後スル $(p, q, m, \cdots\cdots m_q)$ ナル automorphe function ヲ $z = \zeta(x, y)$ トス.

$$\bar{u} = \log \frac{\left|\frac{dz}{dx}\right|}{1 - |z|^2}$$

トオケバ

$$\Delta_x \bar{u} = 4e^{2\bar{u}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

但シ Δ_x ハ x ニ関スル Laplacian

$x = g(t)$, $y = h(t)$ ヲ $|t| < R$ ニテ有理型函数トシ $z = \zeta(g(t), h(t))$ ニツイテ

$$u = \log \frac{\left|\frac{dz}{dx}\right| \left|\frac{dx}{dt}\right|}{1 - |z|^2} = \log W$$

トスレバ, $u = \bar{u} + \log \left|\frac{dx}{dt}\right|$ ト (1) トヨリ

$$\Delta_t u = 4e^{2u} \cdots\cdots,$$

以後記述ヲ簡単ニスルタメ

$$\Delta u = 4e^{2u} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

トシマス。

② $f(x, y) = 0$ = birational transformation ヲ施シ以下ニテハ R ノ無限遠点ハ分岐点ニアッテ, 又ソノ分岐点ハ R ノ無限遠点又ハ分岐点ト一致セズト仮定シマス。

以下 $\bar{u}$ ノ性質ニツイテ各段ニ分ッテ考ヘマス.

(I) R 又ハソノ m 次ノ分岐点. $(x, y) = (a, b)$ ニ於テハ

$$\zeta = a_0 + a_1 \sqrt[m]{x-a} + a_2 \left(\sqrt[m]{x-a}\right)^2 + \cdots\cdots$$

トスレバ

$$\bar{u} = \frac{1-m}{m} \log|x-a| + U(x)$$

$U(x)$ ハ $x=a$ ノ近傍ニテ 有界ナ函数ヲ 表ハスモノトシマス。

以下ニテモ 同様デス。

(II) $\zeta(x,y)$ ノ無限次ノ分岐点ニテハ

$$\bar{u} = -\log|x-a| - \log_2|x-a| + U(x)$$

(III) R ノ無限遠点ニテ

$$\zeta(x,y) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots\cdots$$

ヨリ

$$\bar{u} = -2\log|x| + U(x)$$

ソノ他ノ点ニテハ $\bar{u}$ ハ regular デス。

③ Ahlfors, Schwarz, Lemma ニツイテハ前註ノ論文ヲ参照シテ 載ケコトニシテ 簡単ニ記載シマス。

Riemann 面上ニ $|ds| = \lambda|dt|$ ナル Riemann metrique ヲ考ヘ $\log\lambda = v$ トス。

若シ $\Delta v \geqq 4e^{2v}$ ニシテ λ が $|t|<1$ ニテ finite ナラバ

$$|ds| \leqq d\sigma$$

但シ $d\sigma = \dfrac{|dt|}{1-|t|^2}$

以下 ahlfors ノコノ定理ヲ利用シタニツノ結果ヲ出シテミタイト思ヒマス。(コレニツイテハ Robinson ノ論文ヲ参照サレタシ)

④ ②ノ(2)ヨリ u ハ

$$\Delta u = 4e^{2u}$$

$u = \log w$ トシ w ニツイテ考ヘル。

ζ ノ ∞ ノ ordnung ノ分岐点 (a, b) ハ $g(t) = a$, $h(t) = b$ トナラストキハ考ヘルヲ要シマセン。

R スハ ζ ノ m 次ノ分岐点ニツイテ考ヘマス。

先ヅ R ノ m 次ノ分岐点ニツイテ

$(x, y) = (a, b)$ ヲ分岐点トシマス。$x = a = g(t_0)$ トスレバ

$$x - a = g(t) - a = d_0 (t - t_0)^{km} (1 + \bar{g}(t)) \cdots\cdots (3)$$

$\bar{g}(t)$ ハ $t = t_0$ ニテ正則且ツ $\bar{g}(t_0) = 0$ ナル函数トス。

$$w = e^u = e^{\bar{u}} \left| \frac{dx}{dt} \right|$$

ヨリ ② ノ (I) ノ $\bar{u}$ ト (3) ヲ用ヒテ

$$w = |t - t_0|^{k-1} S(t)$$

$S(t)$ ハ $t = t_0$ デ有界ナ函数ヲ表ス 以下同様。

故ニ w ハ $t = t_0$ ニテ $k \geqq 1$ ナル故 finite ニナル。

次ニ

ζ ノ m 次ノ分岐点ニテハ

$$g(t) - a = \alpha (t - t_0)^{m'} + \cdots\cdots$$

トスレバ

②ノ(II)ヲ用ヒテ

$$w = |t - t_0|^{\frac{m'-m}{m}} S(t)$$

故ニ $m' \geqq m$ ナラバ w ハ finite ニナル.

次ノ無限遠点ニテハ

$$g(t) = \frac{\alpha}{(t-t_0)^{m'}} + \cdots\cdots$$

トスレバ

$$w = |t - t_0|^{m'-1} S(t)$$

故ニ $m' \geqq 1$ ナラバ w ハ finite ニナル. 実際ニ $m' \geqq 1$ ナリ, 故ニ上ノ結果ト ahlfors ノ定理ヨリ次ノ結果ヲ得.

$x = g(t)$, $g = h(t)$ ガ R 上ノ点 α_i ヲ m_i 以上ノ order デトレバ

$$\frac{\left|\frac{dz}{dx}\right| \left|\frac{dx}{dt}\right|}{1-|z|^2} |dt| \leqq \frac{|dt|}{1-|t|^2} \cdots\cdots\cdots (4)$$

ガ成立ス.

但シ $m_i = \infty$ ノトキハ α_i ヲトラヌモノトス.

但シ $\zeta(x, y) = z$ ガ $(p, q, m_1, \cdots\cdots m_q)$ ナル automorphe function ナルタメニハ

$$2p-2+\sum_{i=1}^{q}\left(1-\frac{1}{m_i}\right)>0 \quad \cdots\cdots\cdots (5)$$

ガ必要十リ。

上ノ結果デ

$|t|<R$ トルトキハ

$$\frac{\left|\frac{dz}{dx}\right|\left|\frac{dx}{dt}\right|}{1-|z|^2} \leqq \frac{R}{R^2-|t|^2} \quad \cdots\cdots\cdots (4)'$$

⑤ 上ノ結果ヨリ種々ノ結果ガ得ラレマス。

$x=g(t)$ ガ有理型函数（全平面ニ於テ）ト ルトキハ

$$x=g(t),\quad y=g(t)$$

トシ

$$f(x,y)=x-y=0$$

ト考ヘレバ $p=0$ トオイテヨク知ラレタ Picard ノ定理ガ得ラレマス。然シコレ等ハ省略シテ二，三ノ結果ノミニ應用シテミマス。

定理1. $f(x,y)=0$ ハ $p\geqq 2$ トル代数曲線トスレバ $x=g(t)$, $y=h(t)$ トル全平面デ有理型ト函数ニテ Uniformisation デキナイ。

（証）必要トヲベ $f(x,y)=0$ ニ birational transformation ヲ施シテ今マデノ假設ニテ一般性ヲ失ハナイ。今定理ガ成立シナイトスレバ $g=0$ トシ

$$\Sigma\left(1-\frac{1}{m_i}\right)=0 \qquad 2p-2\geqq 2>0$$

故ニ(4)ノ條件ガ成立ス。

故ニ④′ニ於テ任意ニtヲ固定シ$R\to\infty$トスレバ

$$\frac{\left|\frac{dz}{dx}\right|\left|\frac{dx}{dt}\right|}{1-|z|^2}=0$$

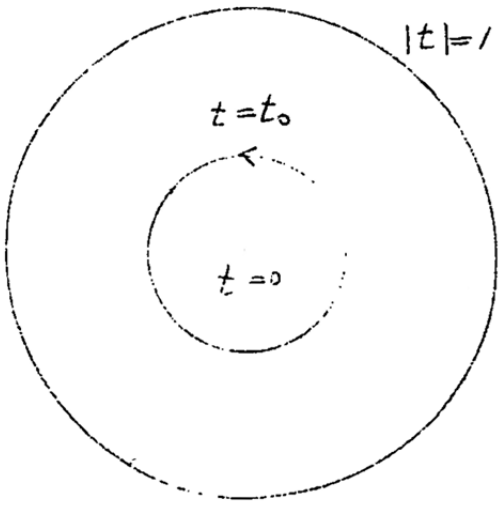
故ニxハ殆ンドスベテノtニツイテ

$$\frac{dx}{dt}=0$$

故ニxハ常数トナリ假設ニ反ス。

定理2. $f(x,y)=0$ハ$p\geqq 2$ナル代数曲線トス。$x=g(t)$, $y=h(t)$デuniformisationデキルトスレバ$x=g(t)$, Singular pointハisolated Singular pointデハアリ得ナイ。

(証) $|t|<1$ニテ$t=0$ノミがSingular pointトス。



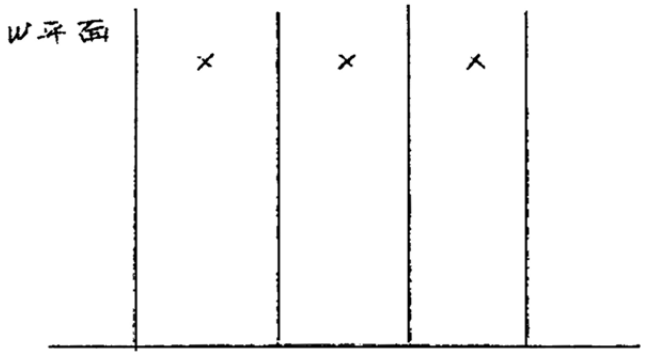
$w=-i\log t$ナル変換ヲ施スト$|t|<1$ハ$\mathfrak{I}(w)>0$ナル半平面ニ移ル。

$|t_0|-\rho<\varepsilon$ナル如ク(εハ任意ノ非常ニ小サイ数トス)t_0ヲトリ

t_0ヨリtヲ$|t|=\rho$ナル円周上ヲ正ノ方向ニ動カストwハ$\mathfrak{I}(w)=-\log\rho$ナル直線上動ク。

$g=0$, $p \geqq 2$ トスレバ (5) ガ成立ス.

t 平面ノ被リ w 平面ヲ考ヘル. 且ツ半平面ノ非ユークリッド



$$element \text{ ヲ } \frac{|dt|}{R^2-|t|^2},$$

換リニ用ヒレバ (4)' ハヤハリ成立ス.

$g(t_0)=a$, $h(t_0)=b$

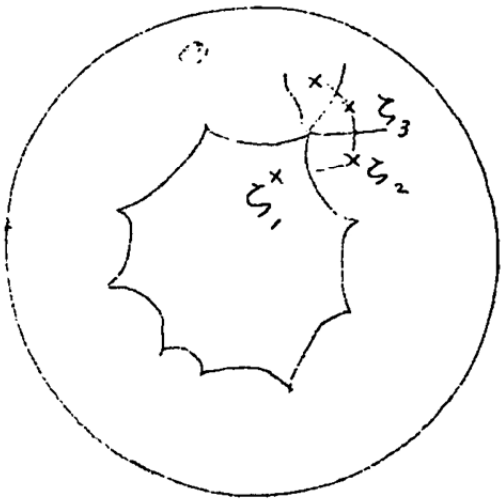
トス.

t ガ t_0 ヨリ $|t|=\rho$ ヲ動イテ t_0 ニ帰ルゴトニ $\zeta(x,y)$ ハ $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \cdots\cdots$ ト変ル.

(4)' ヨリ

$$\int \frac{\left|\frac{dz}{dx}\right| \cdot \left|\frac{dx}{dt}\right|}{1-|z|^2} |dt| \leqq \int \frac{1}{J(w)} |dw|$$

$z=\zeta(x,y)$



ヨリ $N \cdot E|\zeta_1-\zeta_2|$ ヲ ζ_1, ζ_2 ノ非ユークリッド的長サヲ表ヘスモノトスレバ $N \cdot E|\zeta_1-\zeta_2| = N \cdot E|\zeta_2-\zeta_3| = \cdots\cdots$

$$\leqq \int \frac{1}{-\log \rho} |dw| = -\frac{2\pi}{\log \rho}$$

ρ ガ充分小サイトキ上式ヨリ

$N \cdot E|\zeta_i-\zeta_{i+1}|$ ハ充分小サイ.

故ニ $|\zeta_i-\zeta_{i+1}|$ ハ充分小サイ.

故ニ $\zeta_1, \zeta_2, \cdots\cdots$ ハ楕円的, 又ハ抛物線的固定点ノマワ

ヲ / 如ルコトニナル．然シ $\zeta(x, y)$ ハ $(p, 0)$ ナル函数故カヽル固定点ヲ有セズ。

従ッテ $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3$ ……トナルヨリ外ハナイ。

故ニ ρ が小ナルトキ $t = t_0$ ヨリ t が $|t| = \rho$ ヲ動クトキ $z = \zeta(x, y)$ ハ充分小サイ閉曲線ヲ画ク故ニ $\rho \to 0$ ナルトキ $\zeta(x, y)$ ハ或ル値ニ収斂シ，従ッテ $g(t)$, $h(t)$ ハ或ル値ニ収斂シ従ッテ Riemann ノ定理ニヨリ $g(t)$, $h(t)$ ハ $t=0$ ヲ正則点又ハ極トシテ有スルコトニナリ仮設ニ反ス。

（注意）定理2ノ証明ガ割合ニ簡単デスノデ或ハ独断的ナ点ガアルノデハナイカト恐レテ居マス。御教示ヲ願ヒマス。定理ソノモノハ正シイノデス。

$x = g(t)$, $y = h(t)$ ハ isolated singular point デナイコトハ分ッテイルノデスガ然ラバ如何ナル集合ニナルカ問題ハアルコトヽ思ヒマス。多クド手掛リヲ得マセンガ，他日発表出来タラト希望致シテ居ル次第デス。

辻先生ノ数物会ニ於ケル Riikerschmitts theorems ニ関スル limit point ノ集合ニ関スル定理ハソノ或ル方面ニ於ケル暗示ヲ与ヘルモノデハナイカト思ヒマス。

（續ク）