



Title	Normed Ring ニ就イテ I
Author(s)	近藤, 基吉
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 249, p. 76-93
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75033
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1101. Normed ring = 就イテ I

近藤 基吉

近來 *normed ring* の理論デハ J. Gelfand
commutative normed ring の論文又 J. v.
Neumann - F. J. Murray, *ring of operators*
の論文等が出テ居ルが、此等、結果ノ中デ一様ドレダケノモ
ノガ一般ノ *normed ring* デ成立ツデアラウカ。又、既
ニ抽象代數學デ得ラレテ居ル環ニ關スル結果ノ中デ、ド
レダケノモノヲ一般ノ *normed ring* ニ擴ゲウルデア
ラウカ。ユノマウナ問ハ十命知ラレテ居ルコトカモ知レナイ
ガ、一應シラベテオクコトガ此ノ方面ノ研究ヲナス上ニ大事
デハナイカと思フ。其ノマウナ意味デコノ方面ノ結果ヲツシ
調べテ居ルガ、判ツタコトヲ書イテ見タイと思フ。コレハ発
表スルホドノ事デナイカモ知レナイガ、結果ヲマトメルタメ
ニ書ク次第デアル。

今回ハ *normed ring* = 關係スル各種ノ概念デ
基本的ト思ハレルモノヲ列ベルコトニシタ。此処デ上
ゲタ他ニモ各種ノ基本的概念ガアルガ、夫ヲ準備
ヲ要スルノデ必要ニ應ジテアタヘテ行クコトニス
ル。

§1. 定義

此の *normed ring* の定義ヲ與ヘテ置カウ。集合 R が條件

1° R は加群デアル。

2° R の任意ノ二ツノ要素 A, B ニ對シテ其ノ積 AB は再び R に屬シ、次ノ性質ヲ有スル。

$$(a) \quad (AB)C = A(BC)$$

$$(b) \quad (A+B)C = AC + BC,$$

$$C(A+B) = CA + CB,$$

3° R の任意ノ要素 A ト任意ノ複素數 α トノ積 αA は R に屬シ、次ノ性質ヲ有スル。

$$(a) \quad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A,$$

$$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B.$$

$$(b) \quad (\alpha\beta)A = \alpha(\beta A), \quad (\alpha A)(\beta B) = \alpha\beta AB$$

$$(c) \quad 1A = A, \quad 0A = 0$$

4° R の各要素 A には其ノ絶對値 —— $|A|$ —— 示ス —— ト呼バレル實數が對應シ、次ノ性質ヲ有スル。

$$(a) \quad |A| \geq 0, \quad \text{シカモ } A=0 \text{ ノトキニ限ツテ } |A|=0$$

デアル。

$$(b) \quad |A+B| \leq |A| + |B|$$

$$(r) \quad |AB| \leq |A||B|$$

ヲ満足スルヲ *normed ring* ト云フ。

R ハ複素数ヲ係数域トスル環デアルカラ、環ニ關スル各種ノ概念ヲ R ノ上ニ導入スルコトが出来ル。然レ、夫レ等ハ省イテ特ニ絶対値ニ關係スルモ、ヲ此処デ述ベテ置ク。

R ノ要素 E デ條件 $\square R$ ノ各要素 $A =$ 對シテ $AE = EA = A$ デアル $\square$ ヲ満足スルモノガアレバ、ソレハ唯一ツデアル。コレヲ R ノ代数的單位要素ト云フ。コノトキニハ $|E| = |E^2| \leq |E||E|$ ヨリ $|E| \geq 1$ デアルガ、特ニ $|E| = 1$ デアレバ、 E ヲ R ノ單位要素ト呼ブコトニスル。 R ニ單位要素ノ存在シナイトキニハ R ニ新ラシイ要素 E ヲ添加シテ得ラレル環 $R[E]$ ガ再び *normed ring* デシカモ E ガ其ノ單位要素デアルヤウニ出来る。夫レニハ E ヲ與ヘテ

$$1^\circ \quad AE = EA = A \quad (A \in R), \quad E^2 = E$$

$$2^\circ \quad |\lambda E + A| = |\lambda| + |A|$$

トスレバ十分デアル。ス、 R ノ要素 E_r, E_l デ條件 $\square R$ ノ各要素 $A =$ 對シテ $AE_r = E_l A = A$ デアル $\square$ ヲ満足モノが存在スレバ、夫レ等ヲ夫々 R ノ右及ビ左ノ代数的單位要素トイフ。一般ニハ $|E_r|, |E_l| \geq 1$ デアルガ、特ニ 1 ニ等シイトキニ夫レ等ヲ R ノ右及ビ左ノ單位要素ト呼ブ。

次に、 R が (代数的) 単位要素 E を含む場合を考へる。

R の要素 A に対して

$$A A^{-1} = A^{-1} A = E$$

を満足スル A^{-1} , A^{-1} が存在スレバ、コレ等をソレゾレ A の右及び左の (代数的) 逆要素と呼び、更ニコレ等が互ニ相等シイトキ一夫レヲ A の (代数的) 逆要素ト名付ケ A^{-1} デ示ス。又、 R の要素が (代数的) 逆要素ノ存在スルモノヲ R の (代数的) 正則要素ト呼ブ。更ニ R の要素 A が

$$|A| = |A^{-1}| = 1$$

ヲ満スモノヲ R の単位的要素ト名付ケヨウ。

次に、 R の任意ノ二ツノ要素 A, B に対して

$$\text{dis}(A, B) = |A - B|$$

トスレバ、 $\text{dis}(A, B)$ ニ關シテ R の距離空間トナル。 R のコノ topology を uniform ト呼ブ。

R の uniform topology = 關シテ完備デアルトハ限ラナイが、完備デアレバ uniformly complete デアルト云フ。尚、uniformly complete デナケレバ Cauchy の方法ニヨツテ uniformly complete = スルコトが出来る。

$A \neq B$, A, B の共ニ R の uniform topology = 關シテ A, B の連續函数デアリ、 αA ハ α , $A = 0$ 用シテ連續デアル。又、 $|A|$ ハ A の連續函数デアル。

今、連続性に関するコレ等ノ性質ヲ利用シテ逆要素ノ存在ノ問題ヲ考ヘル。 R ヲ代数的單位要素 E ヲ有スル *uniformly complete normed ring* トスル。

補助定理1. $|A| < 1$ ノトキ $E - A$ ハ代数的逆要素ヲ有スル。

証明. $S_n = \sum_{k=0}^n A^k$ ($n = 1, 2, \dots$) トスレバ, $n > m$

ニ對シテ

$$\begin{aligned} |S_n - S_m| &= |A^{m+1} + \dots + A^n| \\ &\leq |A|^{m+1} + \dots + |A|^n \leq \frac{\rho^{m+1}}{1-\rho} \end{aligned}$$

(但シ, $|A| = \rho < 1$) デアルカラ, R ノ完備性ヨリ

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ ($= B$ ト置ク) が存在スル。然ル

ニ

$$(E - A)S_n = S_n(E - A) = E - A^{n+1}$$

デアツテ $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0$ デアルカラ $(E - A)B = B(E - A) = E$ 即チ, $E - A$ ハ代数的逆要素ヲ有スル。

$A \in R$ が (代数的) 正則要素デアルトキニ至 (Σ) $= A^{-1}\Sigma$ トスレバ, コレハ R デ連続デアル。従ツテ A ノ近傍 $\mathcal{U}(A)$ ヲ選ンデ $\Sigma \in \mathcal{U}(A)$ ノ時ニ

$$|\Psi(A) - \Psi(X)| = |E - A^{-1}X| < \rho < 1$$

デアルヤウニ出来る。夫レ故ニ、 $E - A^{-1}X = B$ トスレバ
 $E - B = A^{-1}X$ ハ補助定理 / ヨリ (代数的) 逆要素ヲ有ス
 ル。夫レヲ C トスレバ、 $(CA^{-1})X = C(A^{-1}X) = E$ デアル。
 一方ニテ

$$X(CA^{-1}) = A(A^{-1}XC)A^{-1} = E$$

デアルカラ、 X ハ (代数的) 逆要素ヲ有スル。即チ、
 A ノ近傍ニアル要素ハ (代数的) 正則デアル。

今、 R ノ (代数的) 正則要素ノ全体ノ作ル集合ヲ $\mathcal{O}$ ト
 スル。 $\mathcal{O}$ ハ開集合デ、シカモ乗法ニ閉シテ群ヲナシテ居
 ル。

次ニ、 $\mathcal{O}$ デ $\Psi(X) = X^{-1}$ ヲ考ヘヨウ。 $X, A \in \mathcal{O}$ ノ
 時ニハ

$$\Psi(X) - \Psi(A) = X^{-1} - A^{-1} = (X^{-1}A - E)A^{-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (E - A^{-1}X)^n A^{-1}$$

デアルカラ、 $|X - A| < \rho < |A^{-1}|^{-1}$ トスレバ

$$|\Psi(X) - \Psi(A)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |E - A^{-1}X|^n |A^{-1}|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |A^{-1}|^{n+1} |A - X|^n < \frac{|A^{-1}|^2}{1 - |A^{-1}|\rho} \rho$$

トナル。従ツテ $\Psi(X)$ ハ $\mathcal{O}$ デ連続デアル。以上ノ結果
 ヲ次ノ様ニ述ベルコトが出来る。

定理 I. R が代数的単位要素を有する uniformly complete normed ring とすれば, R は代数的正則要素, 全体ノ作ル集合 $\mathcal{A}$ は R が開イテ居テ, シカモ乗法ニ関シテ位相群ヲナシテ居ル。又 $\mathcal{A}^{-1}$ は $\mathcal{A}$ ニ於テ連続デアル。⁽¹⁾

R , 部分集合 R_0 が再び環ヲナシテ居ルモノヲ R の代数的部分環ト呼ビ, 特ニ uniform topology ニ関シテ R に開ガテ居ルモノヲ R の部分環ト呼ブ。uniformly complete normed ring, subring, 又 uniformly complete デアル。

次ニ, ニツノ normed ring R_k ($k=1, 2$) ヲ考ヘル。 R_1 ノ各要素 $A_1 = R_2$ ノ要素 A_2 ヲ對應セシメル寫像デ $A_1 + B_1 = \wedge A_2 + B_2$ ヲ, $A_1 B_1 = \wedge A_2 B_2$ ヲ, $\alpha A_1 = \wedge \alpha A_2$ ヲ對應セシトルモノヲ algebraic homomorphism ト云ヒ, 又コノ中デ uniform topology ニ関シテ連続ナルモノヲ uniform homomorphism ト云フ。更ニ, コノ中デ開集合ヲ開集合ニ寫スモノヲ open uniformly homomorphism ト名付ケルコトニスル。

(1) M. Nagumo, Einige analytischen Untersuchungen in linearen metrischen Ringen. Japanese Jour of Math. vol. XIII. 1936

又, R_1 と R_2 との間, algebraic homomorphism が一対一対応 $\varphi \in \varphi$ algebraic isomorphism と呼ビ, コレが uniform topology に関シテ両側連続デアレバ φ の寫像ヲ uniformly isomorphism と云フ。スルト, 次ノ補助定理が成立ツ。

補助定理 2. R_k ($k=1, 2$) ヲ uniformly complete normed ring とスルトキニ, R_1 ヲ R_2 ニ寫ス algebraic isomorphism $g(x)$ が x に関シテ連続デアレバ, R_1 と R_2 とハ uniformly isomorphic デアル。

証明ハ S. Banach ノ定理ニヨリ自明デアアルが有效デアアル。

次ニ, R_1 と R_2 との間, uniformly isomorphism が $|A_1| = |A_2|$ 成立ツモノヲ isometrically isomorphism と名付ケル。 R_1 が uniformly complete ナルトキニ, R_1 ノ isometrically isomorphism に関スル像ハ又 uniformly complete デアル。

更ニ, R_1 ヲ夫自身ノ中ニ寫ス algebraic 又ハ uniformly isomorphism ヲ algebraic 又ハ uniformly automorphism と名付ケル。

isometrically automorphism ニ同様ニ定義スル。 U ヲ單位的要素トスルトキニ $X \mapsto U^{-1} X U$ = 寫

ス寫像ハ *isometrically automorphism* デアル。

次ニ, R_1 ノ各要素 $A_1 = R_2$ ノ要素 A_2 ヲ對應セシメル寫像デ $A_1 + B_1 = \wedge A_2 + B_2$ ヲ, $A_1 B_1 = \wedge B_2 A_2$ ヲ對應セシタルモ, $\wedge$ *algebraic anti-homomorphism* ト呼ビ, コレガ *uniform topology* = 關シテ連續デアレバコレヲ *uniformly anti-homomorphism* ト云フコト = スル。同様ニシテ, *anti-isomorphism* 及ビ *anti-automorphism* ヲ定義スル。

今, R ノ上ノ *uniformly anti-automorphism* ヲ考ヘル。 R ノ要素 A 𠬞 對應スルモノヲ A^* トスレバ

$$(A+B)^* = A^* + B^* \quad (AB)^* = B^* A^*$$

デアツテ, $A = A^{**}$ ヲ對應セシメル寫像ハ R ノ上ノ *uniformly isomorphism* デアル。此処デ特ニ

$$|A| = |A^*|, \quad A^{**} = A$$

ノ成立ツトキニ, R ヲ *involututed ring* ト呼ブコト = スル。コノ場合ニ $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$ デアレバ, R ハ *proper* デアルト云ヒ, $(\alpha A)^* = \alpha A^*$ デアレバ, R ハ *improper* デアルトイフコト = シヨウ。更ニ, 此ニ等ノ場合ニ $A = A^*$ ヲ満たス要素 A ヲ *hermitian* ト名

付ケル. $A + A^*$ 及び AA^* / hermitian デアルコトハ
自明デアル.

次 = R / 部分集合 $\mathcal{I}$ デ条件

1°. $A, B \in \mathcal{I}$ / $\alpha A + \beta B \in \mathcal{I}$ デアル.

2°. R / 任意 / 要素 $A = 0$ シテ $A \in \mathcal{I}$ デアル.

ヲ満足スルモノヲ右 algebraic ideal ト云ヒ, 同
様 = 左 algebraic ideal, 両側 及び 片側 al-
gebraic ideal ヲ定義スル. 更ニ, コレ等 / ideal
ノ中デ uniform topology = 関シテ開ヂタモノ
ヲ右 ideal, 両側 ideal 等 / 様 = algebraic ト云
フ形容詞ヲ除イテ呼ブコト = スル.

R / 右 (左又ハ両側) / (algebraic) ideal デ
(0) 及び R ト果ナリ, 夫レヲ含ム右 (左又ハ両側) /
(algebraic) ideal が R / ミノモノヲ右 (左又ハ両
側) / 最大 (algebraic) ideal ト名付ケル. スルト
次 / 定理が得ラレル.

定理 2 R ヲ代数的單位要素ヲ有スル uniform-
ly complete normed ring トスルトキニ, R /
右 (左又ハ両側) / 最大 algebraic ideal ハ uni-
form topology = 関シテ開ヂテ居ル. 従ツテ夫レ
ハ R / 右 (左又ハ両側) / 最大 ideal デアル. 又, R
ノ任意 / 右 (左又ハ両側) / algebraic ideal ヲ含
ム右 (左又ハ両側) / 最大 ideal が存在スル.

証明. $\mathcal{I}$ は R の右最大 ideal トスルトキ =
 R の代数的正則要素ノ全体カラナル集合 $\mathcal{O}$ = 對
 $\mathcal{I}$ $\subseteq R - \mathcal{O}$ デアル. トコロデ, 定理1ヨリ
 $R - \mathcal{O}$ は uniform topology = 關シテ開チテ
居ルカラ, $\mathcal{I}$ は uniform topology = 關スル
開被 $\bar{\mathcal{I}}$ は $R - \mathcal{O}$ = 含マレ, 從ツテ $\bar{\mathcal{I}} \neq R$ デアル.

然ルニ, $\bar{\mathcal{I}}$ は右 ideal デアル. 何トナレバ, $\mathcal{I}$ は
 R = 於イテ linear デアルカラ $\bar{\mathcal{I}}$ モ亦 R = 於イテ
linear デアル. 次ニ, $A \in R$ = 對シテ $B \in \bar{\mathcal{I}}$ ヲ考ヘル.
 $B \in \mathcal{I}$ デアレバ, $BA \in \mathcal{I} \subseteq \bar{\mathcal{I}}$ トナル. $B \in \bar{\mathcal{I}} - \mathcal{I}$ デ
アレバ, $B_n \in \mathcal{I}$ ($n=1, 2, \dots$) ヲ求メテ $B_n \rightarrow B$ uni-
formly ト出来ル. 從ツテ, $B_n A \rightarrow BA$ uniformly
が得ラル $BA \in \bar{\mathcal{I}}$ デアル. 即チ, $\bar{\mathcal{I}}$ は右 ideal デ
アル.

此処デ $\mathcal{I} \subseteq \bar{\mathcal{I}} \neq R$ デアルカラ, $\mathcal{I}$ の最大性ヨリ
 $\mathcal{I} = \bar{\mathcal{I}}$ トナル. 即チ, $\mathcal{I}$ は uniform topology =
關シテ開チテ居ル. 左及ビ両側ノ最大 ideal = ツイテモ
同様デアル.

次ニ, 右 (左又ハ両側ノ algebraic ideal ヲ含ム右
(左又ハ両側)ノ最大 ideal ノ存在ハ R ノ連續性 = 關係
ナク代数的 = 証明サレルカラ, 此処デハ夫レヲ省ク.

(証明完了)

今, 最大 ideal ノ一ツノ利用トシテ正則要素ノ存

范 = 閉スル 次ノ 系ヲ 與ヘテ 置カウ。

系. R ヲ (代数的) 単位要素ヲ有スル *uniformly complete normed ring* トスルトキニ,
 $A \in R$ ガ (代数的) 正則要素デアルガキメニ必要且ツ十分ノ条件ハ A ガ 右 及ビ 左 ノ 最大 *ideal* = 含マレナイコトデアル。

次ニ, $\mathcal{I}$ ヲ R ノ 両側 *ideal* トスルトキニ, $A - B \in \mathcal{I}$ デアレバ $A \equiv B \pmod{\mathcal{I}}$ ト書キ A, B ハ $\mathcal{I}$ ヲ 法トシテ 合同デアルト云フ。スルト, $A \equiv A', B \equiv B' \pmod{\mathcal{I}}$ コリ $A + B \equiv A' + B', AB \equiv A'B' \pmod{\mathcal{I}}$ ガ得ラレル。又, $\mathcal{I}$ ヲ 法トシテ A ト 合同ナル要素ノ集合ハ *uniform topology* = 閉シテ開デテ居ルガ、コレヲ $\mathcal{I}$ ヲ 法トスル 剰餘類ト呼ビ $\bar{R}_A$ = ラ示ス。其処デ

$$|\bar{R}_A| = \inf_{X \in \bar{R}_A} |X|$$

トスレバ, 次ノコトガ云ハレル。

$$1^\circ \quad |\bar{R}_A| \leq |A|$$

$$2^\circ \quad |\alpha \bar{R}_A| = |\alpha| |\bar{R}_A|$$

$$3^\circ \quad |\bar{R}_A + \bar{R}_B| = \inf_{X \in \bar{R}_A + \bar{R}_B} |X| = \inf_{Y \in \bar{R}_A, Z \in \bar{R}_B} |Y + Z|$$

$$\leq \inf_{Y \in \bar{R}_A} |Y| + \inf_{Z \in \bar{R}_B} |Z| = |\bar{R}_A| + |\bar{R}_B|$$

$$4^\circ \quad |K_A K_B| = \inf_{X \in K_A K_B} |X| = \inf_{Y \in K_A, Z \in K_B} |YZ|$$

$$\leq \inf_{Y \in K_A} |Y| \inf_{Z \in K_B} |Z| = |K_A| |K_B|$$

$$5^\circ \quad |K_A| = 0 \text{ トスレバ, } X_n \in K_A (n = 1, 2, \dots),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0$$

ヲ満ス X_n が存在スル。然ルニ, $X \in K_A$ ニ對シテ

$X - X_n \in J_n (n = 1, 2, \dots)$ デアアルカラ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (X - X_n) = X \text{ ハ } J_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = K_A \text{ニ合フレ } K_A = J_n \text{ が得ラ}$$

レル。

10 - 5°ヨリ剰餘類ノ全体ノ作ル集合ハ再ビ *normed ring*ヲナスコトガ判ル。コレヲ R/J_n ヲ法トスル剰餘類環ト云ヒ, R/J_n ヲ示ス。此ノ環ニ就イテ更ニ次ノコトが成立スル。

6° R ガ單位要素 E ヲ有ストキニハ, K_E ハ R/J_n ノ單位要素デアル。

何トナレバ, K_E ハ R/J_n ノ代数的單位要素デアルカラ $|K_E| \geq 1$ が得ラレル。トコロデ, 1° ニ依ツテ $|K_E| \leq |E| = 1$ デアアルカラ $|K_E| = 1$ が成立ツ。即チ K_E ハ R/J_n ノ單位要素デアル。

7° R ガ *uniformly complete*デアレバ, R/J_n ハ又サウデアアル。

証明. $\{f_{A_n}\}$ ($n = 1, 2, \dots$) を考へル. $\varepsilon > 0 =$
 對シテ N を選ンデ $n, m \geq N$ の時 =

$$|f_{A_n} - f_{A_m}| < \varepsilon$$

デアル様ニナシ候ヌトスル. スルト, 部分列 $\{f_{B_n}\}$ ($n = 1, 2, \dots$) を選ンデ $\sum_{n=1}^{\infty} |f_{B_n} - f_{B_{n+1}}| < +\infty$ ト出来
 ル. トコロデ, $x_1 \in f_{B_1} =$ 對シテ $x_2 \in f_{B_2}$ を選ン
 デ

$$|x_1 - x_2| \leq 2 |f_{B_1} - f_{B_2}|$$

ト出来ル. 同様ニ $x_3 \in f_{B_3}$ を定メテ

$$|x_2 - x_3| \leq 2 |f_{B_2} - f_{B_3}|$$

ト出来ル. コノヤウニシテ $\{x_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) を決定ス

$$\text{レバ, } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_{n+1}| \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} |f_{B_n} - f_{B_{n+1}}| < +\infty \text{ デア}$$

ルカラ, $\{x_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) は Cauchy 列デア
 ル. 従ツテ假定ヨリ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ が存在スル. トコロデ, x

ノ屬スル剰餘類 $f_x =$ 對シテ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{B_n} = f_x$ が得ラ

レ, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{A_n} = f_x$ トナル. (証明完了)

今, R ト $R/\mathfrak{A}$ トノ關係ヲ考ヘルタメ $x = R_1$ 及 R_2 ノ
 中ニ寫ス open uniformly homomorphism φ ト
 ヲ取ル. R_1 ノ要素 x デ $\varphi(x) = 0$ ヲ満足スルモノカラ
 ナル集合ヲ $\mathfrak{A}$ トスレバ, $\mathfrak{A}$ ハ R_1 ノ兩側 ideal デアル.
 其処デ, $\mathfrak{A}$ ヲ法トスル R_1 ノ剰餘類 f_A ト R_2 ノ要素 $\varphi(A)$

トヲ對應セシメルト, $R_1/\mathfrak{A}$ ト $\varphi(R_1)$ トノ間, 代数的同型寫像が得ラレル. 今, コレが両側連続ナルコトヲ示ヤウ. $\varphi(t)$ ハ連続デアルカラ, $A \in R_1$ ト $\varepsilon > 0$ トニ對シテ $\delta > 0$ ヲ求メテ $|A - X| < \delta$ ノトキ $|\varphi(A) - \varphi(X)| < \varepsilon$ トナシ得ル. 然ルニ, $|A - X| < \delta$ ノトキ $\frac{1}{2} |R_A - R_X| < \delta$ デアツテ、シカモ逆ニ $|R_A - R_X| < \delta$ ノトキ $\frac{1}{2} |A - X| < \delta$ ヲ満ス X' が $R_X =$ 含マレ $R_X = R_X$ デアル. 夫レ故ニ $R_A = \varphi(A)$ ヲ對應セシメル寫像ハ連続デアル.

次ニ、 $\varphi(A)$ ハ open デアルカラ, $A \in R_1$ ト $\varepsilon > 0$ トニ對シテ $|A - X| < \varepsilon$ ヲミタス X ノ集合, $\varphi(t)$ = 關スル像ハ R_2 デ open デアル. 従ツテ $\delta > 0$ ヲ求メテ $|\varphi(A) - \varphi(X)| < \delta$ ヲ満タス $\varphi(X)$ が今考ヘタ兩集合ニ含マレルヤウニ出來ル. 夫レ故ニ $|\varphi(A) - \varphi(X)| < \delta$ ノトキ $\frac{1}{2} \varphi(X)$ ノ原像 X デ $|A - X| < \varepsilon$ ヲ満スモノがある. トコロデ $|A - X| < \varepsilon$ ノトキ $\frac{1}{2} |R_A - R_X| < \varepsilon$ デアルカラ, $\varphi(A)$ ヲ R_A = 寫ス寫像モ亦連続デアル. 従ツテ $R_1/\mathfrak{A}$ ト $\varphi(R_1)$ トハ uniformly isomorphic デアル. 即チ

定理3. Normed ring R_1 ヲ R_2 ノ中ニ寫ス open uniform homomorphism $\varphi(t)$ = 對シテ $\varphi(X) = 0$ ヲ満ス X ノ集合ヲ $\mathfrak{A}$ トスレバ, $\mathfrak{A}$ ハ R_1 ノ兩側 ideal デアツテ, $R_1/\mathfrak{A}$ ハ $\varphi(R_1)$ ト uniformly isomorphic デアル.

トコロデ、 R_K ($K=1,2$) が共に *uniformly complete*、トキニハ定理3ニ於ケル $\varphi(t)$ ノ条件ヲ *uniform homomorphism* デ置キ換ヘ得ル、即チ

良環系、 R_K ($K=1,2$) ヲ *uniformly complete normed ring* トスルトキニ、 R_1 ヲ R_2 ノ上ニ寫ス *uniformly homomorphism* $\varphi(t)$ ニ對シテ $\varphi(X)=0$ ヲ満ス X ノ集合ヲ $\mathfrak{A}$ トスレバ、 $\mathfrak{A}$ ハ R_1 ノ両側 *ideal* デアル。 $R_1/\mathfrak{A}$ ハ $\varphi(R_1)$ ト *uniformly isomorphic* デアル。

此ノ定理ノ証明ハ補助定理2ヲ利用スレバヨイ。

次ニ、 $R \neq 0$ 、 R 以外ニ右 (左又ハ両側) *ideal* ヲ含マナイモノヲ右 (左又ハ両側) 單純ト呼ブ。右 (左又ハ両側) 單純 *ideal* モ同様ニ定義スル。スルト、次ノ定理ガ得ラレル。

定理5. $\mathfrak{A}$ ヲ *normed ring* R ノ両側最大 *ideal* トスレバ、 $R/\mathfrak{A}$ ハ両側單純デアル。

証明. $R/\mathfrak{A}$ ガ両側單純デナケレバ、コレハ 0 、 $R/\mathfrak{A}$ ト異ナル両側 *ideal* ヲ含ム。其ノ一ツヲ $\mathfrak{B}$ トスルトキニ、 R ノ要素 A ガ $\mathfrak{B}$ ヲ法トスル R ノ剰餘類 R_A ガ $\mathfrak{B}$ ニ含コレルモノナモ、カラナル集合ヲ $\mathcal{P}$ トスレバ、 $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P} \subset R$ デアル。トコロデ、 $\mathcal{P}$ ハ R ノ両側 *ideal* デアル。即チ、 $A \in \mathcal{P}$ 、 $B \in R$ 、トキニ $R_A R_B = R_{AB}$ 、

$\bar{r}_B \bar{r}_A = \bar{r}_{BA}$ の共 $\subset \mathcal{M}$ = 含マレルカラ、 AB, BA の共
 $= \mathcal{J} =$ 含マレ、 $\mathcal{J}$ の両側 algebraic ideal デアルが、
 $\mathcal{M} = \mathcal{J}$ の $R =$ 於イテ uniform topology = 開シテ
 開ゲテ居ル。何トナレバ、 $A \rightarrow \bar{r}_A$ の寫像ハ uniform
 topology = 開シテ連続デ、シカモ $\mathcal{M}$ の $R/\mathcal{J} =$ 於
 イテ uniformly closed デアルカラデアル。コレ
 の $\mathcal{J}$ の定義ニ矛盾スル。夫レ故ニ $R/\mathcal{J}$ の両側單純デアル
 ル。(証明完了)

今, normed ring R ノルテ、両側最大 ideal
 ノ共通部分ヲ $\mathcal{J}$ ノ根基ト呼ビ、夫レガ 0 デアルモノヲ準單
 純ト呼ブコトニスル、 $\mathcal{J}$ ヲ R ノ両側最大 ideal トスレバ
 定理 5 ニヨツテ $R/\mathcal{J}$ の両側單純デアル。其処デ、此様ノ
 両側單純環ノ集合ヲ $\mathcal{R}$ トシ、 $A (\in R)$ ノ含マレル $R/\mathcal{J}$
 ノ剩餘類ヲ $A_{\mathcal{J}}$ デ示スコトニスル。スルト、 R ノ各要素
 $A = \text{ハ } \mathcal{J} =$ テ定義セラレ、 $R/\mathcal{J}$ デ $A_{\mathcal{J}}$ ヲ値トスル函数
 $\text{—— } \oplus_A = \text{テ示ス ——}$ ガ對應スル。其処デ $\oplus_A$ ノ全体カラ
 タル集合ヲ $\mathcal{R}$ トシ、 $\oplus_A$ ノ絶對値 $|\oplus_A|$ ヲ

$$|\oplus_A| = \sup_{\mathcal{J}} |A_{\mathcal{J}}|$$

デ示セバ、 R ハ normed ring トナル。トコロデ

$$\oplus_A \pm \oplus_B = \oplus_{A \pm B}, \quad \oplus_A \oplus_B = \oplus_{AB}, \quad \alpha \oplus_A = \oplus_{\alpha A}$$

が成立チ、シカモ R ノ準單純性ヨリ A ト $\oplus_A$ トノ對應ハ一對
 一デアル。即チ、 R ト $\mathcal{R}$ トハ代数的同型デアル。コレガ準

単純環、両側単純環、直和への分解であるが、此処で種々
 の問題が起る、例へば $A \leftrightarrow \oplus A$ の対応の連続性の問題
 がある。 R が *uniformly complete* である、此の對
 應は *uniformly isomorphism* となるが、一般の場合
 はどうであらうか。又 R へ如何なる *topology* を導入
 すべきであるか。更に単純性と両側完全可約性との関係
 はどうであらうか。

(西大二三六八)