



Title	Normed Ring 二就イテ II
Author(s)	近藤, 基吉
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 250, p. 94-111
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75034
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

近藤 基吉

normed ring = 関スルーツノ問題ハ、*weak topology*ヲ如何ニ定メルカデアル。コレハ *normed ring*ノ同型問題トモ関連シテ至難デアルガ、此処デハ一般、*linear normed space* = 関スル *ring of operators*ノ *topology*ニ依テ此ノ問題ヲ考ヘテ見タイト思フ。J. v. Neumann ハ Hilbert 空間 = 関スル *ring of operators* = 三種類ノ *topology* — *uniform*, *strong* 及ビ *weak* — ヲ導入シタリデアレガ、此ノ考ヘ方ヲ一般ノ *ring of operators*ノ場合ニ擴ゲルコトが出来ル。然シ此処デハコノ三種類ノ *topology*ノ他ニ一種類ヲ加ヘテ四種類ノ *topology*ヲ與ヘテ置カリ。

§2. Topologies

初メ $\mathcal{A}$ = *ring of operators*ノ定義ヲ述ベル。
 B ヲ *linear normed space*トスルトキニ、 B デ定義セラレ植域ガ B ニ含マレル有界線型作用素ノ全体カラナル集合ヲ $\mathcal{L}(B)$ デ示ス。今、 $A \in \mathcal{L}(B)$ ニ對シテ $|Af| \leq M|f|$ ヲ滿タス正数 M ノ下端ヲ $|A|$ デ示シ、 A ノ絶対値ト云フ。スルト、モク知ラ

$L(B)$ は単位要素ヲ有スル *normed ring* トナル。其処デ、 $L(B)$ 、*algebraic sub-ring* 7 B = 關スル *ring of operators* ト名付ケルコト = スル。

今、コレ等ニ次、 $\times$ 7 *topology* 7 導入スル。

I. *Uniform topology*. *Ring of operators* R 7 *normed ring* デアルカラ、§1.ノ方法デ *uniform topology* 7 導入スルコトが出来ル。夫レが此処デ云フ *uniform topology* デアル。

$L(B)$ 7 *uniform topology* = 關シテ完備デアルトハ限ラナイが、 B が完備デアレバ $L(B)$ モ亦完備トナル。何トナレバ $\{A_n\}$ ($n=1, 2, \dots$) 7 $L(B)$ ノ要素カラナル *Cauchy* 列トスルトキニ、 B ノ各点 f = 對シテ $\{A_n f\}$ ($n=1, 2, \dots$) ハ又 *Cauchy* 列デアル。夫レ故ニ $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n f$ ($= A f$ ト置ク) が存在スル。スルト、 A ハ B ノ上、有界線型作用素デアルカラ。 $L(B)$ = 含マレ、 $L(B)$ ハ *uniformly complete* デアル。

Ring of operators 7 *normed ring* デアルが、此ニ次、定理が成立ツ。

定理1. R は任意の normed ring トスルトキ =
linear normed space B を選ンデ R が $L(B)$
の algebraic sub-ring ト isometrically iso-
morphic デアルヤウー出来ル。

又、 R が代数的単位要素ヲ有スル normed ring ト
スルトキ =、linear normed space B を選ンデ
 R が $L(B)$ の単位要素ヲ有スル algebraic sub-ring
ト uniformly isomorphic デアルヤウー出来
ル。

証明、 R は linear normed space ト考ヘタトキ =、
 $A \in R$ = 對シテ、

$$\Phi_A(X) = AX$$

ト置ケバ $|\Phi_A(X)| \leq |A||X|$ デアル。 $\Phi_A \in L(B)$ トナ
ル。 従ツテ R が単位要素 E を含ムトキ = $\Phi_A(E) = A$ = 依
ツテ $|\Phi_A| = |A|$ 得ラレ、更ニ

$$\Phi_A + \Phi_B = AX + BX = (A+B)X = \Phi_{A+B}$$

$$\Phi_A \Phi_B = A(BX) = (AB)X = \Phi_{AB}$$

$$\alpha \Phi_A = \alpha AX = \Phi_{\alpha A}$$

デアルカラ、 $\Phi_A (A \in R)$ の全体カラナル ring of
operators は R ト isometrically isomorphic
デアル。

次ニ、 R が単位要素ヲ有シナイ場合ヲ考ヘル。 §1

トコロデ、 R_0 、要素 $\varpi_A = R$ / 要素 A ヲ對應セ
 シタル寫像ハ *algebraic isomorphism* デ
 $|A - B| \leq |\varpi_A - \varpi_B| |E|$ ヨリ *uniformly continuous*
 デアル。又故ニ §1、補助定理 2 ヨリ R ハ R_0 ト *uniform-*
ly isomorphic デアル。

次ニ、 R ガ *uniformly complete* デナイトキ
 ニハ §1、方法デ R ヲ *uniformly complete* = 擴
 ケテ置イテ上ノ方法ヲ應用スレバ十分デアル。(註
 明完了)

(注意) $\varpi_A(X)$ 、代リニ $\Psi_A(X) = XA$ ヲ考ヘル
 ト

$$\Psi_A + \Psi_B = \Psi_{A+B}, \quad \Psi_A \Psi_B = \Psi_{BA},$$

$$\alpha \Psi_A = \Psi_{\alpha A}$$

ガ成立チ、 R ガ單位要素 E ヲ含ムトキニハ、 $|\Psi_A| = |A|$
 ガ得ラレル。従ツテ、 Ψ_A / 全体ハ R ト *isometri-*
cally anti-isomorphic デアル。又、 R ガ代
 數的單位要素ヲ有スルトキニハ、 Ψ_A / 全体ハ R ト
uniformly anti-isomorphic デアル。

$L(B)$ ハ F) Hausdorff、第一可數性公
 理ヲ滿タスガ、 B ガ可分ナモ $L(B)$ ガ *uniform*
topology = 關シテ可分デアルトハ限ラヌ。

II. Strong topology. $\bar{A} \in \mathcal{L}(B)$, $f_k \in B$ ($k=1, 2, \dots, n$), $\varepsilon > 0$ 對シテ

$$|(A - X)f_k| < \varepsilon \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

ヲ滿タス X ノ集合ヲ $\mathcal{U}(A, f_1, \dots, f_n, \varepsilon)$ テ示シ, A ノ strong vicinity ト云フ。然ルトキニ、 $\mathcal{L}(B)$ ハ strong vicinity = 關シテ Hausdorff 空間デアール。維ツテス、 B = 閉スル ring of operators ハ Hausdorff 空間トナル。コレヲ ring of operator ノ strong topology ト云フノデアール。

strong topology = 關シテ ring of operators ハ Hausdorff, 第一可附番性公理ヲミタストハ限リナシガ、任意ノ正数 ρ = 對シテ $|A| \leq \rho$ ヲミタス $\mathcal{L}(B)$ ノ要素 A ノ集合ヲ $\mathcal{L}(B, \rho)$ トスレバ、次ノ定理が成立スル。

定理2. B が uniform topology = 關シテ可分ナレバ、任意ノ正数 ρ = 對シテ $\mathcal{L}(B, \rho)$ ハ strong topology = 關シテ Hausdorff, 第一可附番性公理ヲ滿ス。

証明. B テ稠密ナル可附番集合 $\{g_k\}$ ($k=1, 2, \dots$) ヲ取り、 $\mathcal{U}(A, g_1, \dots, g_n, \frac{1}{m})$ ($n, m=1, 2, \dots$) ヲ作ル。スルトコレ等ノ作ル A ノ近傍系ハ $\mathcal{L}(B, \rho)$ = 於テ A ノ strong vicinity ノ完全系ト對等ナル。夫レヲ証明スルタメニ、 $\mathcal{U}(A, f_1, \dots, f_n, \varepsilon)$ ヲ取ル。

其他デ、 $|f_k - g_{\nu_k}| < \frac{1}{3\rho} \varepsilon$ ($k=1, 2, \dots, n$) ヲ満タス
 g_{ν_k} ($k=1, 2, \dots, n$) ヲ選ブ。スルト $|(A-X)g_{\nu_k}|$
 $< \frac{1}{3} \varepsilon$ ($k=1, 2, \dots, n$) ヲ満ス。 $A, X \in \mathcal{L}(B, \rho)$
 = 終シテ

$$\begin{aligned} |(A-X)f_k| &\leq |(A-X)g_{\nu_k}| + |(A-X)(g_{\nu_k} - f_k)| \\ &< \frac{1}{3} \varepsilon + \|A\| |g_{\nu_k} - f_k| + \|X\| |g_{\nu_k} - f_k| \\ &< \frac{1}{3} \varepsilon + \rho \frac{1}{3\rho} \varepsilon + \rho \frac{1}{3\rho} \varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

デアレカラ、 $\bar{n} > \nu_k$ ($k=1, 2, \dots, n$), $\bar{m} > \frac{3}{\varepsilon}$ トスレ
 。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(B, \rho) \cup (A, g_1, \dots, g_{\bar{n}}, \frac{1}{\bar{m}}) \\ \subseteq \mathcal{L}(B, \rho) \cup (A, f_1, \dots, f_n, \varepsilon) \end{aligned}$$

が得ラレ。 $\mathcal{L}(B, \rho)$ ハ strong topology = 閉シテ
 Hausdorff, 第一可附着性公理ヲ満タス (証
 明完了)

B ハ uniform topology = 閉シテ可余デアッテ
 也。 B = 関スル ring of operators ハ strong
 topology = 閉シテ可余トハ云ヘ+イ。然シ次ノ定
 理が成立スレ。

定理3. B ハ uniform topology = 閉シ
 テ可余デアアレバ、 $\mathcal{L}(B)$ ノスベテノ部分集合ハ strong
 topology = 閉シテ可余デアアル。

証明. B デ稠密ナル可附着集合 g_k ($k=1, 2,$

-----) を取ル。基底デ、コノ中カラ互 = 独立ナル

$$g_{\nu_1}, \dots, g_{\nu_K}, g_{\mu_1}, \dots, g_{\mu_K}$$

ヲ選ビ、 $g_{\nu_1}, \dots, g_{\nu_K}$ = K 張ラレル *linear space*
 $(g_{\nu_1}, \dots, g_{\nu_K})$ ヲ作ル。次 = コノ上 = 線型汎函数 $\varphi(f)$
 ヲ定義シテ

$$\varphi(g_{\nu_i}) = 0 \quad (i \neq j), \quad \varphi(g_{\nu_j}) = 1 \quad |\varphi| = 1$$

ノ成立タル様 = スル。更ニ、コレヲ 絶対値ヲ上げ + i マ
 ヲ = シテ B 全体 = 拡張セル。夫ヲ $\varphi_j(f)$ トシ

$$C_j(f) = \varphi_j(f) g_{\mu_j}, \quad C(f) = \sum_{j=1}^K C_j(f)$$

ト置ク。スルト之ハ $\phi(B) =$ 属シ

$$C(g_{\nu_j}) = g_{\mu_j} \quad (j = 1, 2, \dots, K)$$

デアル。今、此ノヤヲ + C ヲ $(g_{\nu_1}, \dots, g_{\nu_K}; g_{\mu_1}, \dots, g_{\mu_K})$ ノ各々 = 對シテ 一ツヤツ定メ、夫レ等ノ全体カ
 ラ + ル 集合ヲ 作 トスレバ、作 ハ 可附着デアル。トコ
 ロデ、コレハ *strong topology* = 關シテ $\phi(B)$
 デ稠密デアル。夫ハ次ノ様 = シテ判ル。

今、 $\mathcal{U}(A, f_1, \dots, f_n, \varepsilon)$ ヲ與ヘル。 $\varepsilon > 0$ = 對
 シテ $g_{\nu_K} (K = 1, 2, \dots, n)$ ヲ選ンデ互 = 独立デ、シ
 目セ $|f_K - g_{\nu_K}| < \varepsilon (K = 1, 2, \dots, n)$ デアルヤウ = ス
 ル。次 = $g_{\mu_K} (K = 1, 2, \dots, n)$ ヲ選ンデ $g_{\nu_1}, \dots, g_{\nu_n}$

$g_{\mu_1}, \dots, g_{\mu_n}$ が独立で、しかも $|g_{\mu_k} - A g_{\nu_k}| < \bar{\varepsilon}$
 $(k=1, 2, \dots, n)$ が成り立つ。すると $(g_{\nu_1}, \dots, g_{\nu_n}, g_{\mu_1}, \dots, g_{\mu_n})$ = 対応する f の要素が存在する。
 夫れを C と置けば

$$\begin{aligned} (*) \quad |(A-C)f_k| &\leq |(A-C)g_{\nu_k}| + |(A-C)(g_{\nu_k} - f_k)| \\ &\leq |(A-C)g_{\nu_k}| + |A'(g_{\nu_k} - f_k)| \\ &\quad + |C(g_{\nu_k} - f_k)| \end{aligned}$$

とすれば。然るに

$$\begin{aligned} |C(f)| &\leq \sum_{j=1}^n |C_j(f)| \leq \sum_{j=1}^n |g_j(f)| |g_{\mu_j}| \\ &\leq \left\{ \sum_{j=1}^n |g_{\mu_j}| \right\} |f| \end{aligned}$$

が成り立つ。 $\max_{k=1, 2, \dots, n} |A f_k| = M$ とすれば

$$\begin{aligned} |g_{\mu_j}| &\leq \varepsilon + |A g_{\nu_j}| \leq \bar{\varepsilon} + |A| |g_{\nu_j} - f_j| + |A f_j| \\ &< \bar{\varepsilon} (1 + |A|) + M \end{aligned}$$

より

$$|C(f)| < n \{ \bar{\varepsilon} (1 + |A|) + M \} |f|$$

とすれば。又

$$|(A-C)g_{\nu_k}| = |A g_{\nu_k} - g_{\mu_k}| < \bar{\varepsilon} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

が成り立つ。 (*) より

$$\begin{aligned} |(A-C)f_k| &\leq \bar{\varepsilon} + |A| \bar{\varepsilon} + n \bar{\varepsilon} \{ \bar{\varepsilon} (1 + |A|) + M \} = K \bar{\varepsilon} \end{aligned}$$

が得られる。此処で K は定数であるから $\bar{\varepsilon} > 0$ 分
 小 = 選んで $K\bar{\varepsilon} < \varepsilon$ とすれば、 $C \in \mathcal{U}(A, f_1, \dots, f_m,$
 $\varepsilon)$ が成り立ち、 A が Δ strong topology = 開スル
 点ノ 集積点であることが判る。従って Δ strong topology
 = 開シテ $\mathcal{F}$ のある (B) が稠密である。

次 = $\mathcal{L}-(B)$ / 任意ノ 定デナイ 部分集合 $\mathcal{F}$ に対スル
 $A \in \mathcal{F}$ に対シテ $\varepsilon = 1/m$ とシテ $\mathcal{G}_m, \dots, \mathcal{G}_{m,n}$ とシテ $\mathcal{U}(A,$
 $\mathcal{G}_m, \dots, \mathcal{G}_{m,n}, \frac{1}{m})$ を作り、 $\mathcal{F}$ 中 = $\mathcal{F}$ - 含マレル 要素
 ノ 一ツ C を取ル。スルハ、 $(A, \mathcal{G}_m, \dots, \mathcal{G}_{m,n}, m, C)$ ナ
 ル組が得られる。其処で、 $\mathcal{G}_m, \dots, \mathcal{G}_{m,n}, m, C$ = 選選スル
 A ノ 一ツヲ 取ツテ $A_{\mathcal{G}_m, \dots, \mathcal{G}_{m,n}, C}$ とスル。

然レトキ = コレ等ノ 作ル集合 $\mathcal{F}_0$: 高々可列集である
 が、 Δ strong topology = 開シテコレハ $\mathcal{F}$ 中ノ 稠密であ
 る。夫レヲ示サシ。

$A \in \mathcal{F}$ に対シテ $\mathcal{U}(A, f_1, \dots, f_p, \varepsilon)$ を與へル。其
 処で $|f_k - g_{vk}| < \varepsilon$ ($k = 1, 2, \dots, p$) を満足 g_{vk} ($k =$
 $1, 2, \dots, p$) を取ル。然レトキ = $A, C \in \mathcal{F}$ かつ $(A -$
 $C, g_k) < \varepsilon$ ($k = 1, 2, \dots, p$) ナル ε_1 が存在スル 其
 処で、 $A_{g_k, \varepsilon, C}$ ($= A_0$ と置ク) を取ル。

$$\begin{aligned} |(A_0 - A)f_k| &\leq |(A_0 - A)g_{vk}| + |(A_0 - A)(g_{vk} - f_k)| \\ &\leq |(A_0 - C)g_{vk}| + |(C - A)g_{vk}| \\ &\quad + |(A_0 - A)(g_{vk} - f_k)| \\ &< (2 + |A_0| + |A|)\varepsilon \end{aligned}$$

デアルカヲ、 $\epsilon \leq \epsilon(B, \rho)$ デアレバ $|(A_0 - A)f_k| < 2(1 + \rho)\epsilon$ が得ラレ、*strong topology* = 関シテ $\mathcal{F}_0$ ハ
 ϵ デ稠密デアル。次ニ ϵ が有界デナイトキニハ、コレ
 ヲ有界ナルモノノ可附添個ノ和トナシ得ル故ニ コノ
 場合モ *strong topology* = 関シテ $\mathcal{F}_0$ ハ ϵ デ稠密
 デアル。

III. *Feeble topology* $A \in \mathcal{L}(B)$, $\varphi_k \in \overline{\mathcal{L}(B)}$
 $(k=1, 2, \dots, n)$, $\epsilon > 0$ = 與シテ

$$|\varphi_k(A - X)| < \epsilon \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

ナリマス X ノ集合ヲ $\mathcal{N}(A, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \epsilon)$ = テ示シ
 A ノ *feeble vicinity* ト云フ。スレト、 $\mathcal{L}(B)$ ハ
 コノ近傍系 = 関シテ *Davidoff* 空間ヲナス。又
 テ關スル *ring of operators* = 對シテモ同様デ
 アル。コノ *topology* ヲ *feeble* ト名付ケルコトニ
 スル。

Feeble topology ハ *strong topology*
 ト共ニ *uniform topology* ヲリモ弱イガ、*feeble*
topology ト *strong topology* トハ比較が出来
 ナイ。何トナレバ、S. Mazur ノ定理ヨリ *uniform*
topology = 関シテ 開ゲタ 凸集合ハ *feeble topo-*
logy = 関シテモ開ゲテ居ル。トコロデ、其ノヤウナ凸
 集合ノ中ニ *strong topology* = 関シテ開ゲテ居ナ
 イモノガアル。實際、 $\mathcal{L}(B)$ ノ *sub-ring* デアツテ

δ strong topology = 関シテ 開子ヲ居テ +イモ、ヲ
作ルコトが出来ル。

一方、 $\mathcal{L}(B)$ ノ部分集合ヲ $\mathcal{F}$ feeble topology
= 閉スル乗積点ガ δ strong topology = 関シテサウデ
+イモ、ガ下ル。夫レハ、 $\mathcal{F}$ ノ $\mathcal{F}$ ニシテ 與ヘラレル。 B ノ
要素 f_n ($n=1, 2, \dots$)ヲ 離ンデ weakly = 0 = 収斂ス
ルガ uniformly = 0 = 収斂シテ +イモ、 = ス。次ニ、
 $\mathcal{F} \in \overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$ ニシテ

$$A_g(f) = \varphi(f)g$$

トスル。謂テカ = $A_g \in \mathcal{L}(B)$ デアル。今 A_g ノ全体
カラナル集合ヲ R トスレバ $|A_g| = |g| \|g\|$ トナリ R
ハ uniform topology = 関シテ 閉デアル。其知
テ、 $\varphi \in \mathcal{L}(B)$ トスレバ、 φ ハ R ノ上ノ linear
functionalデアル。従ツテ B ノ上デ

$$\psi(g) = \varphi(A_g)$$

トスレバ、 $|\psi| \leq \|\varphi\| \|A_g\| \leq \|\varphi\| \|g\| \|g\|$ ガ得テレ。 $\varphi(g)$
ハ有界デアル。従ツテ、 $f_n \rightarrow 0$ weakly ヨリ $\varphi(f_n)$
 $\rightarrow 0$ ヨリ $\varphi(A f_n) \rightarrow 0$ デアル。即チ、 $A f_n \rightarrow 0$
feeblyガ成立スル。然レ、一方ニテ $|A f_n| = |g|$
 $|f_n| \rightarrow 0$ デハナシ。即チ、 $A f_n \rightarrow 0$ δ stronglyデハ
ナシ。

又、feeble topology = 関シテ ring of
operators R ハ Hausdorffノ第一可附着性

公理ヲミタストモ限ラトイフ, ス B が可分デアルヲモ
 R が *feebly topology* = 関シテ可分トハ云ハ
 レタイ。

IV. *Weak topology*. 此処デ上デ與ヘ
 タイザレノ *topology* ヨリモ更ニ弱イモノヲ考ヘヨ
 ヲ。

$A \in L(B)$, $f_k \in B$, $g_k \in \bar{B}$ ($k=1, 2, \dots, n$)
 $\varepsilon > 0$ = 與シテ

$$|g_k((A-X)f_k)| < \varepsilon \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

ヲミタス X カラナル集合ヲ $U(A, f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n, \varepsilon)$ = 示シ A / *weak vicinity*
 ト云フ。エカレトキニ、 $L(B)$ ハコレニ関シテ
Idausdorff 空間ヲナシテ居ル。 B = 閉スル
ring of operators = 対シテモ同様ナリ。コ
 レヲ B = 閉スル *ring of operators* / *weak topo-*
logy ト名付ケル。

先デ *Idausdorff* / 第一可附着性公理 = 関シテ次
 ノ定理が成立ツ。

定理 4. $\bar{B}$ が *uniform topology* = 関シテ
 可分デアルバ、任意ノ正数 ρ = 與シテ $L(B, \rho)$ ハ *weak*
topology = 関シテ *Idausdorff* / 第一可附着性
 公理ヲ満たス。

証明. B が *uniform topology* = 関シテ可

命デアルカラ、 $B \in \text{uniform topology} =$
 開シテ可命デアル。今、 $f_k, \psi_k (k=1, 2, \dots)$ ヲ
 夫々 $B, \bar{B} = \bar{B}$ 稠密ナル可附属集合トスル。某処デ
 $u(A, f_1, \dots, f_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \varepsilon)$ ヲ含マレル
 $u(A, g_{\mu_1}, \dots, g_{\mu_n}, \psi_{\nu_1}, \dots, \psi_{\nu_n}, \delta)$ ノ存在スルコト
 ヲ示サシ。正数 $\delta = \delta$ ニテ

$$|f_k - g_{\mu_k}| < \delta, |\varphi_k - \psi_{\nu_k}| < \delta, |\psi_{\nu_k}((A-X)g_{\mu_k})| < \delta$$

($k=1, 2, \dots, n$)

トスルトキ $= A, X \in L_-(B, \rho)$ ヨリ

$$\begin{aligned} & |\varphi_k((A-X)f_k)| \\ & \leq |\psi_{\nu_k}((A-X)g_{\mu_k})| + |\varphi_k((A-X)f_k) - \psi_{\nu_k}((A-X)g_{\mu_k})| \\ & < \delta + |\varphi_k((A-X)f_k) - \varphi_k((A-X)g_{\mu_k})| \\ & \quad + |\varphi_k((A-X)g_{\mu_k}) - \psi_{\nu_k}((A-X)g_{\mu_k})| \\ & \leq \delta + |\varphi_k| \|A-X\| |f_k - g_{\mu_k}| + |\varphi_k - \psi_{\nu_k}| \|A-X\| |g_{\mu_k}| \\ & < \delta + 2|\varphi_k| \rho \delta + 2\rho \delta (|f_k| + \delta) < c\delta \end{aligned}$$

トナルカラ、 $\delta \leq c\delta < \varepsilon$ ノ成立スルヲウー選ババト命
 デアル。(証明完了)

次ニ、 $\text{weak topology} =$ 開スル $L_-(B)$ ノ可
 命性入 $\text{strong topology} =$ 開スル $L_-(B)$ ノ可命
 性ヨリ 明ラカデアル。即チ、定理3 = ヲツチ B ガ
 $\text{uniform topology} =$ 開シテ可命デアルベシ $L_-(B)$

ノ元ベテ、部分集合ハ weak topology = 閉シ
ヲ可分トスル。

又、weak topology = 閉シテハ次ノ定理が
成立ス。

定理5. B が locally weakly bicom-
pact ノトキニハ、 $L(B)$ ハ weak topology = 閉シテ
locally bicom-compact ナル。

証明. $|f| \leq 1$ ヲ満たス B ノ要素 f ノ集合ヲ B_0 トス
ル。 B_0 ハ勿論 weakly bicom-compact ナル。其処ヲ
 $B_0^{(f)} (= B_0) (f \in B_0)$ ノ直積

$$B_0^* = \prod_{f \in B_0} B_0^{(f)}$$

ヲ作ル。 $A \in B_0^*$ ノトキニハ $B_0^{(f)}$ = 於ケル A ノ成分ヲ
 $A^{(f)}$ ナ示スコトニスル。従ツテ、 $A^{(f)} \in B_0^{(f)}$ トナ
ル。

今、 $\varphi_k \in \overline{B_0}$ 、 $f_k \in B_0 (k=1, 2, \dots, n)$ = 對
シテ

$$|\varphi_k(A^{(f_k)} - X^{(f_k)})| < \varepsilon (k=1, 2, \dots, n)$$

ヲ満たス $X \in B_0^*$ 、集合ヲ $\overline{A}$ 、近傍ト定義スル。スル
ト、A. Tychonoff ノ定理ニヨツテ B_0^* 、bicom-
pact ナル。

次ニ、 $L(B, 1)$ ノ任意ノ要素 A = 對シテ $|A| \leq 1$ ナル
ルカヲ $B_0^* =$ 含まレル要素 $\overline{A}$ ナ求メテ

$$\bar{A}^{(f)} = A(f) \quad (f \in B_0)$$

デアルヤウニ由來ル。 $A = \bar{A}$ 對應セシメル對應ヲ考ヘルト $\mathcal{L}(B, 1)$ ノ要素ハ一對一ノ仕方デ B_0^* ノ部分集合 —— コレヲ $\mathcal{L} = \tau$ シス —— ニ寫サレル。トコロデ、 $\mathcal{L}(B, 1)$ *weak topology* トル、*topology* トハ同等デアルカラ、 $\mathcal{L}(B, 1)$ トルトノ對應ハ位相的デアル。

然ルニ $B_0^* = \tau$ イテ $\mathcal{L}$ ハ閉集合デアル。何トナレバ、 $P \in B_0^*$ カルノ集積点デアレバ、 $\varphi_k \in B, f_k \in B_0$ ($k=1, 2, \dots, n$), $\varepsilon > 0$ ニ對シテ

$$|\varphi_k(P^{(f_k)} - \bar{X}^{(f_k)})| < \varepsilon, \quad \bar{X} \in \mathcal{L}$$

ヲ満足スル $\bar{X}$ ガ存在スル。 $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ニ對シテコノ様ナ $\bar{X}$ ノ一ツヲ $\bar{X}_n$ トスレバ、 $\varphi_k(\bar{X}_n^{(f_k)}) \rightarrow \varphi_k(P^{(f_k)})$ ガ成立ス。今、特ニ $\varphi_k = \varphi, f_1 = f, f_2 = g, f_3 = f+g$ トスレバ

$$\begin{aligned} & \varphi(P^{(f+g)}) - \varphi(P^{(f)}) - \varphi(P^{(g)}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \varphi(\bar{X}_n^{(f+g)}) - \varphi(\bar{X}_n^{(f)}) - \varphi(\bar{X}_n^{(g)}) \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi \{ \bar{X}_n^{(f+g)} - \bar{X}_n^{(f)} - \bar{X}_n^{(g)} \} \end{aligned}$$

トナル。トコロデ、 $\bar{X}_n^{(f+g)} = \bar{X}_n^{(f)} + \bar{X}_n^{(g)}$ デアルカラ

$$\begin{aligned} & \bar{X}_n^{(f+g)} - \bar{X}_n^{(f)} - \bar{X}_n^{(g)} \\ &= X_n(f+g) - X_n(f) - X_n(g) = 0 \end{aligned}$$

が成立す。 $\varphi(P^{(f+g)}) = \varphi(P^{(f)}) + \varphi(P^{(g)}) =$
 $\varphi(P^{(f)} + P^{(g)}) \Rightarrow \varphi \in \overline{B}$ 、任意ノ要素デアル
 カラ

$$P^{(f+g)} = P^{(f)} + P^{(g)}$$

ト+レ、同様ニ

$$\wedge P^{(f)} = P^{(\wedge f)}$$

カ得ラレル。又、 $\varphi(P^{(f)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(X_n(f))$ 、 $|X_n| \leq 1$

($n=1, 2, \dots$) = 依ッテ

$$|\varphi(P^{(f)})| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi(X_n(f))|$$

$$\leq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} |\varphi| |X_n| |f| \leq |\varphi| |f|$$

デアル。夫レ故ニ $|\varphi| = 1$ 、 $|\varphi(P^{(f)})| = |P^{(f)}|$ トスレ
 バ、 $|P^{(f)}| \leq |f|$ ト+レ。従ッテ、 $P = \overline{Q} + \wedge Q$ カ存在
 シテケレバト+ラ+イ。即チ、 $P \in \mathcal{L}$ カ得テレ、 $\mathcal{L}$ ハ
 B_0^* ノ閉集合デアル。コレヨリ $\mathcal{L}$ 或ヒハ $\mathcal{L}(B, I)$ 、
bicompact トルコトカ知ラレル。(証明完了)

以上カ *ring of operators* = 関スル四種類、
topology デアルガ、任意ノ *normed ring* R ハ
 適當ニ選バレテ *linear normed space* B =
 関スル *ring of operators* R_0 ト *uniformly*
isomorphic デアルカラ、 R_0 = 関スル上記ノ *topo-*
logy テ以テ R ノ *topology* トスルコトカ出来ル。

コノ中デ *uniform* ト *feeble topology* トハ
 B ノ選擇 = 關係シタイモノデアル。夫レ故ニ、コレ
 ヲ R ノ *uniform* 及ビ *feeble topology* ト名
 付ケ、コレニ對シテ *strong* ト *weak topology*
 トハ B = 關係スルカラ、夫レヲ R ノ B -*strong* 及ビ
 B -*weak topology* ト名付ケル。勿論、後ノニ
 ャハ $L(B)$ ノ *algebraic sub-ring* ノ取り方ニ
 關係スルガ、簡單ノタメニユノマデニ寄ブコトニスル。
 尚、*normed ring* R = 導入サレル *uniform*,
feeble B -*strong* 及ビ B -*weak topology*
 ヲ簡便ニ (u) -, (f) -, (Δ_B) - 及ビ (W_B) -*topo-*
logy ト云ヒ、又此等ノイヅレニテ代表的ニ (τ) -
topology テ示スコトニスル。