



Title	Banach 空間ノ作用素環ニツイテ
Author(s)	河田, 敬義
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 250, p. 126-146
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75036
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

~~252~~ Banach 空間 / 作用素環 = ツイテ

河 田 敬 義 (東京大理大)

Eidelkeit ハ (On isomorphisms of rings of linear operators, *Studia Math.* 9) =
 於テ、ニツノ実 Banach 空間 X_1 ト X_2 カラ、ソノ上
 ノ有界線型作用素全体ノ作ル環 $\mathcal{R}(X_1)$ ト $\mathcal{R}(X_2)$ ヲ作ルト
 キ、若シモ十及 X = 関シテ

$$\mathcal{R}(X_1) \cong \mathcal{R}(X_2)$$

ナラバ、ニツノ Banach 空間 X_1 ト X_2 ガ isomorphic
 = トルコトヲ証明シタ。

十二月、名大 = 於ケル角谷氏ノ講演 = ヨツテ、同ジコト
 ガ X 上ノ閉線型部分空間全体ノ作ル束 $\mathcal{L}(X)$ = 對シテモ
 成立スルコト、特 = Hilbert 空間ノ場合、 $\mathcal{R}(X)$ 及ビ
 $\mathcal{L}(X)$ ノ特徴附ケ = 因スル定理ノ証明 = 発表サレタ。
 角谷氏ノ方法ハ $\mathcal{L}(X)$ = 関シテ先ヅ定理ヲ証明シ、次

= $\mathcal{R}(X)$ の場合ハ問題ヲ $\mathcal{L}(X)$ の場合=直シテ問接=証明スル。

然シ $\mathcal{R}(X)$ ノ方が $\mathcal{L}(X)$ ヨリモ多クノ性質ヲモツキ
キルノデアルカラ、 $\mathcal{R}(X)$ ナク問題=スルナラバ、又別ノ証
明法モアツテヨイワケデアラウ。

コゝデ、先ヅ *Idelheit* ノ定理ヲ (若干整理シテ)
紹介シ、次ニ X が *Idelbert* 空間トナレヌメノ $\mathcal{R}(X)$ ノ
條件ニ関スル角谷氏ノ定理ノ別証ヲ與ヘ ソレト關聯シテ
二三ノ注意ヲ與ヘヨウト思フ。

§1

X ヲ *Banach* 空間、ソノ元ヲ $x, y, \dots$ 、ノルム
ヲ $\|x\|$ トスル。係数ハ實又ハ複素数。

$\mathcal{R}(X)$ ヲ X 上ノ有界線型作用素 A ノ全体:

$$(i) \quad \|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

トスレバ

(i) $\mathcal{R}(X)$ ハ環ヲ作り、(實又ハ複素係数)、乘法單
位 I ヲ持ツ。

(ii) ノルム (i) = 関シテ完備デアリ

$$(iii) \quad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

即チ (非可換) ノルム環ヲ作ル。

補題 I. (i) $\mathcal{R}$ ヲ最小左イデアルトスレバ、 $\mathcal{R} =$
關シテ X ノ一ツノ有界線型汎函数 f が定マリ、 $\mathcal{R} \ni A$ ト

$X \ni y$ が一義 = 対応シテ

$$(2) \quad Ax = f_0(x)y$$

トマラハサレル。逆 = f_0 ヲ一ツ定メテ (2) / A / 全体の
ヲ作レバ、 $\mathcal{O}$ ハ最小左イデヤルイデヤル。又ノルム = 既シテ
閉集合トナル。

$$(ii) \quad \|A\| = \|f_0\| \|y\|$$

$$(iii) \quad f_0 \text{ ヲ } \|f_0\| = 1 \text{ = 一ツ定メレバ (2), } \mathcal{O} \ni Ay \longleftrightarrow y \in X \text{ + 一義対応 = ヨツテ}$$

$$X \cong \mathcal{O} \text{ (equivalent)}$$

デアアルノミナラズ $\mathcal{R}(X)$ ヲ左側作用環トシテ作用同
型デアアル。

(註) (i) $\mathcal{O} \ni A$, ヲ一ツトリ $A, z \neq 0$ + ル z ヲ一ツトリ
 $f_0(z) \neq 0$ + ル有界線型汎函数 f_1 ヲ一ツトル。

$$A_0 x = f_1(x)y_0$$

= 既シテ $\mathcal{O}$ ヲ $A_0 A_1: A_0 A_1 x = f_1(A_1 x)y_0$, 特 =
 $A_0 A_1 z = f_0(z)y_0 \neq 0$

ヨツテ $\mathcal{O} \supset \mathcal{R} A_0 A_1 \neq 0$ カラ, $\mathcal{O}$ ハ最小ナル故
 $\mathcal{O} = \mathcal{R} A_0 A_1$, 即チ

$$\mathcal{O} = (A_g, A_g x = f_0(x)y, y \in X),$$
$$f_0(x) = f_1(A_1 x)$$

トナル。

逆 = カナル $\mathcal{O}$ が最小左イデヤルトナルコトハ明カ。

(ii) ハ (2) カラ

(iii) $\wedge B A_y x = f_0(x) B y = A B y x \exists y$ 最後 =
 $X \cong \mathcal{O}$ から $\mathcal{O}$ が $\mathcal{R}(X)$ 中 開 + テキルコト が ヲカ
 ル。

定理 I. ニツ, Banach 空間 X, X' = 對シテ
 $\mathcal{R}(X)$ ト $\mathcal{R}(X')$ 1 問 = 1.1 / 對應 $\mathcal{R}(X) \ni A \leftrightarrow \varphi(A) = A' \in \mathcal{R}(X')$ が ヲイテ

$$(3) \quad \varphi(\alpha A + \beta B) = \alpha \varphi(A) + \beta \varphi(B)$$

$$(4) \quad \varphi(AB) = \varphi(A) \varphi(B)$$

$$(5) \quad \|A\| = \|\varphi(A)\|$$

トラバ

$$X \cong X' \text{ (equivalent)}$$

デ、 $\therefore$ 1.1 對應テ $X \ni x \leftrightarrow \exists x' = x' \in X'$ トスレバ

$$(\|x\| = \|x'\|)$$

$$(6) \quad \varphi(A) = V A V^{-1}$$

トナル。

(証) $\mathcal{R}(X)$ / 一ツ / 最小左イデヤルヲ $\mathcal{O}$ トスレバ、

$\varphi(\mathcal{O}) = (\varphi(A); A \in \mathcal{O})$ $\wedge$ $\mathcal{R}(X')$ / 一ツ / 最小左イデ
 ヤルデアル。故ニ (3), (5) カラ

$$(7) \quad X \cong \mathcal{O} \cong \varphi(\mathcal{O}) \cong X' \text{ (equivalent)}$$

$\mathcal{R}(X)$ 及ビ $\mathcal{R}(X')$ ヲ作用環トシテ作用同型ナル故 (7)
 ノ對應テ

$$X \ni x \leftrightarrow A x \leftrightarrow A' x' = \varphi(A x) \leftrightarrow x' \in X'$$

トシ、ソレヲ $X \ni x \leftrightarrow \exists x' = x' \in X'$ トカケバ、

$$\|x\| = \|Vx\| \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} X \ni Bx &\leftrightarrow A_{Bx} = BA_{x'} \leftrightarrow \varphi(BA_{x'}) \\ &= \varphi(B)\varphi(A_{x'}) = \varphi(B)x' \in X' \end{aligned}$$

トナル。之ヲ書キ直セバ $V(Bx) = \varphi(B)Vx$, 即チ $(B) = VB V^{-1}$ トナル。 *q.e.d.*

定理2. (Fidelheit) $\mathcal{R}(X)$ = 恒カ他ノノルム $\|A\|^*$ が定義サレテ, $\mathcal{R}(X)$ がコノノルムニ關シテヌノルム環ニナルヲバ, $\|A\|$ ト $\|A\|^*$ ハ同値ナル:

$$\|A_n\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|A_n\|^* \rightarrow 0$$

(証略) ヲ用ヒルヲバ, 定理1デ(5)ノ條件ヲヌカシテモ $\|\varphi(A)\|^* = \|A\|$ ハ $\|\varphi(A)\|$ ト同値ニナルカラ

定理3. (Eidelheit) 定理1デ(5)ヲヌカシテモ V ノ X ト X' ノ間ノ *isomorphic* + 對應ガツイテ $\varphi(B) = VB V^{-1}$ ト表サレル。

系. $\mathcal{R}(X)$ ノ環トシテ, 自己同型ハスベテ内部自己同型ナル。

$$\varphi(A) = VAV^{-1}$$

§ 2

コノ後ニ用ヒル補題ヲニツキゲル。

補題2. (i) $\mathcal{R}(X)$ ノ最小右イデアル $\mathfrak{a}$ = 零シテ $X \ni x_0$ が定マリ. $\mathfrak{a} \ni B$ ト $\bar{X} \ni f(\bar{X})$ ハ X' conjugate

space) トが一義=對應シテ

$$(8) \quad Bx = f(x)x_0.$$

トアヲハサレル。逆 $= x_0 \in X$ ヲ一ツ定メテ (8) ノ全体
ヲおトスレバ、 $\mathfrak{L}$ ハ最小右イデヤルデ、ノルム=關シ
テ閉集合トナル、

(ii) $\|x_0\| = 1$ トスレバ (8) ノ $x \mapsto B_f x \leftrightarrow f \in \overline{X}$ ナル
對應=ヨツテ

$$\overline{X} \cong \mathfrak{L} \text{ (equivalent)}$$

=ナル。

(証) (i) $\mathfrak{L} \ni B, \neq 0$ ヲ一ツトリ $B, y_1 \neq 0$ ナル $y_1 \in X$
ヲ一ツトリ、任意 $= f_0 \in \overline{X}$ ヲエラント作ツタ

$$B_0 x = f_0(x) y_1$$

= 對シテ $\mathfrak{L} \ni B, B_0: B, B_0 x = f_0(x) B, y_1 \neq 0$. ヨツテ
 $\mathfrak{L} \supset B, B_0, \mathfrak{K} \neq 0$ カラ、 $\mathfrak{L}$ ハ最小ナル故 $\mathfrak{L} = B, B_0 \mathfrak{K}$,
即チ

$$\mathfrak{L} = (B_f; B_f x = f(x)x_0, f \in \overline{X}), x_0 = B, y_1$$

トナル。以下補題トシ合極。 q. e. d.

補題3. $\mathfrak{K}$ が最小左イデヤル, $\mathfrak{K} \ni A$ ナラバ (又ハ
 $\mathfrak{L}$ が最小右イデヤル, $\mathfrak{L} \ni A$ ナラバ)

$$(9) \quad A^2 = \lambda A$$

$$\begin{aligned} \text{(証)} \quad Ax = f_0(x) y_0 \text{ カラ } A^2 x &= f_0(x) f_0(y_0) y_0 \\ &= f_0(y_0) Ax, \quad \text{q. e. d.} \end{aligned}$$

次 $= \mathfrak{K}(X)$ ノ代数的性質ヲ若干導ケル。

定理 4. (i) $\mathcal{O}$ が最小左イデヤル + ラ $\mathcal{O}B$ ($B \in \mathcal{R}(X)$)
 も亦最小左イデヤル。逆 = 任意 / 最小左イデヤル $\mathcal{O}B$ の形
 = 表サレル。右 = ツイテモ同様。

(ii) スベテ / 最大左イデヤル = 共通 + 集合 $\mathcal{O}$ 大デアル。
 右 = ツイテモ同様。

(iii) $\mathcal{R}(X)$ / center $\mathcal{H}$ $\mathcal{H}I$ 大デアル。

今 $\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{H} =$ 對シテ $\mathcal{H}^r = (B; \mathcal{H}B = \mathcal{O})$, $\mathcal{H}^l =$
 $(A; A\mathcal{H} = \mathcal{O})$ トスル。

$\mathcal{R}(X)$, イデヤル $\mathcal{J}$ が正規トハ $\mathcal{J} = \mathcal{J}^{rl}$ ($\mathcal{H} \cap \mathcal{J}$
 $= \mathcal{J}^{lr}$) トスレバ

(iv) $\mathcal{R}(X)$ / 正規イデヤル $\mathcal{H}$ $\mathcal{R}(X)$ 全体 $\mathcal{H}$ $\mathcal{O}$ トナル。
 但シ正規デ + イ イデヤル + ラバ $\mathcal{R}(X)$ $\mathcal{H} \in \mathcal{O}$ デモ + イモ /
 が存在スル。

(証) (i) $\mathcal{O} = (A; Ax = f_0(x)y, y \in X)$ トスレバ

$$\mathcal{O}B = (AB, ABx = f_1(x), y, y \in X),$$

$$f_1(x) = f_0(Bx)$$

逆 = $\mathcal{O}_1 = (A; Ax = f_1(x)y, y \in X)$ トスレバ,

$$Bx = f_1(x)x_0, f_0(x_0) = 1 \text{ トスレバ } \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}B \text{ トナル。}$$

右 = ツイテモ同様。

(ii) $X \ni x_0 =$ 對シテ $\mathcal{O} = (A, Ax_0 = \mathcal{O})$, $\mathcal{R}(X)$ /
 ツ / 最大左イデヤルトナル。何トナレバ $\mathcal{O} \nsubseteq C$, $\mathcal{O} + \mathcal{R}C$
 $= \mathcal{O}'$ $\mathcal{O}'$ 考へレバ $Cx_0 = y \neq 0 \therefore$ 任意 / $B =$ 對シテ
 $Bx_0 = z$ トスレバ $C'Cx_0 = C'y = z$ + ル $C' \in \mathcal{R}(X)$ が存

在スレカラ $(B-C)C)x_0 = 0$, 即ち $B = C'C + A$, $A \in \mathcal{O}$
ト表サレル。コレハ $\mathcal{O}' = \mathcal{R}(X)$, 即 $\mathcal{O}$ が最大フルコト=他
ナヲナシ。今, E がスベテノ最大左イデヤル=属スナラバ
 $E x_0 = 0$ がスベテノ $x_0 \in X$ テ成立シ $E = 0$ トナレ。右イデ
ヤルノ場合=ハ $\overline{X} \ni f_0 =$ 対シテ $\mathcal{L}_{f_0} = (B; f_0(x) B x = 0)$ ハ
最大右イデヤルナルコトヲ用ヒレバヨイ。

(iii) $Ax = f_0(x) x_0$ トスレバ $CAx = f_0(x) Cx_0$,
 $ACx = f_0(Cx) x_0$. $\therefore CA = AC$ ナラバ $Cx_0 = \lambda(x_0)x_0$
故ニ f_0 ナトメテ x_0 ナカヘレバ $\lambda(x_0) = \lambda$ トナリ $C = \lambda I$
トナレ。

(iv) $\mathcal{J} = \mathcal{J}^{rL} + 0$ トスレバ補題2ト同様ニ $\mathcal{J} \supseteq \mathcal{L}'$ ナ
最小右イデヤルが存在スル。 $\therefore \mathcal{L} = (B; Bx = f(x)x_0,$
 $f \in \overline{X})$ トスレバ

$$\mathcal{J} \supseteq A\mathcal{L}, \mathcal{J}^L \subseteq (A\mathcal{L})^L, A\mathcal{L} = (B; Bx = f(x)Ax_0),$$

$$(A\mathcal{L})^L = (C; CAx_0 = 0)$$

トナレカラ A ナイロイロカヘレバ $Ax_0 \in X$ 全体ヲ断クカ
ヲ $\mathcal{J}^L = 0$ $\therefore \mathcal{J} = \mathcal{J}^{Lr} = \mathcal{R}(X)$ トナレ。

正規イデヤルデナケレバ成立シナコトハ次ノ通り。

$$Ax = \sum_{i=1}^n f_i(x) x_i, x_i \in X, f_i \in \overline{X}$$

ナレ形ノ全体ハイデヤル=ナレ。又コノノルム=属スル関係
ヲトツテモ $\mathcal{R}(X)$ 全体=ハナラナシ。 q. e. d.

$\mathcal{R}(X)$ ナソノ代数的性項デ特徴付ケルトイフ問題ハ難

カシサウデアム。有限次元 $\mathcal{A}$ lgebra が基礎体 $\mathcal{F}$ 上、
 Matrix algebra (n 次 Matrix 全体) トナラ
 $\mathcal{M}$ 二、補題 3、性質ト定理 4、性質トデナラデアムガ、一
 般、ノルム環デアハ之等、性質ハモツテキルガ、 $\mathcal{K}(X)$ トナ
 ラトイ例ガ次、 $\mathcal{K}$ デ簡単ニ見ツケラレテシマフ。

§ 3

定義 ノルム環 $\mathcal{K}$ 、逆同型 ノルム環 $\mathcal{K}^*$ トハ
 $\mathcal{K}^* = (A^*; A \in \mathcal{K})$,

$$(10) \quad (\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$$

$$(11) \quad (AB)^* = B^* A^*$$

$$(12) \quad \|A^*\| = \|A\|$$

デ定義サレル ノルム環ヲイフ。

定理 5. X ガ正則 (regular) Banach 空間
 デアルナラバ

$$\mathcal{K}(X)^* \cong \mathcal{K}(\overline{X})$$

$$(証) \quad X \ni x, \overline{X} \ni f = \text{対レテ } (x, f) = (f, x) = f(x)$$

トカケバ

$$(Ax, f) = (x, A^* f)$$

デ $\mathcal{K}(X) \ni A$, adjoint $A^* \in \mathcal{K}(\overline{X})$ ガ定義サレ、(10),
 (11), (12) ヲ満足スル。

X ガ正則デアムカラ $X = \overline{X}$ カラ $\mathcal{K}(\overline{X})$, 元ハ必ズ A^*
 ノ形ニカケルカラ

$$\mathcal{R}(X)^* \cong \mathcal{R}(\bar{X}) \quad \text{g.e.d.}$$

定理 6. $\mathcal{R}(X)^*$ が兎モ角モアル Banach 空間 X^* へ射シテ

$$\mathcal{R}(X)^* \cong \mathcal{R}(X^*)$$

トナルヲバ, X ハ正則トナリ, $\bar{X} \cong X^*$ トナル。

(証) $\mathcal{R}(X)$, 最小右イデヤル ヲテトレバ, $\mathcal{R}(X)^* = \mathcal{R}(X^*) \cong \mathcal{L}^*$ ハ最小左イデヤルトナルカラ補題 1, 2 カラ

$$\bar{X} \cong \mathcal{L} \cong \mathcal{L}^* \cong X^*$$

トナル。此 $= \mathcal{R}(\bar{X}) = \mathcal{R}(X)^*$ = 閑シテ今一度適用スレバ
 $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(X)^{**} = \mathcal{R}(\bar{X})^* = \mathcal{R}(\bar{X})$, 即チ定理 3 カラ
 $X \cong \bar{X}$, X ハ正則トナル。 g.e.d.

之レカラ X が正則デナケレバ $\mathcal{R}(X)^*$ ハ決シテ $\mathcal{R}(X^*)$ ノ形ニカケナイ。トコロガ $\mathcal{R}(X)^*$ ハ補題 3 及ビ定理 4 ノ性順ハスマテ満足シテキルワケデアル。

定理 7. $\mathcal{R}(X)$, 自己逆同型変換 $A \rightarrow A^* \in \mathcal{R}(X)$:

$$(B) \quad A^{**} = A$$

$$(H) \quad (\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$$

$$(E) \quad (AB)^* = B^* A^*$$

が存在スルタノ必要十分条件ハ

$$X \cong \bar{X} \quad (\text{isomorphic})$$

ナルコトデアル。 $\mathcal{R}(X)$ / カナルニ α , 変換 $A \rightarrow A^*$, $A \rightarrow A^*$ ナレバ

$$(1b) - A^* = TAT^{-1}$$

ナル $T \in \mathcal{R}(X)$ が存在スル。逆モ亦真。

(証) カニル変換が存在シタトスレバ $\mathcal{R}(\bar{X}) = \mathcal{R}^* = (\varphi(A); A \in \mathcal{R}(X)) \subset \mathcal{R}(X)$ トノ間ノ對應 $\varphi(A) \longleftrightarrow A^*$ デ $\mathcal{R}(\bar{X}) \cong \mathcal{R}(X)$, 即チ定理3カラ $X \cong \bar{X}$ トナル。

逆ニ $X \cong \bar{X}$ ナレバ $\mathcal{R}(X) \cong \mathcal{R}(\bar{X}) = \mathcal{R}(X)^*$ ナル故ソノ對應デ $A^* \longleftrightarrow \varphi(A)$ トスレバ, A^* ハ (13) (14) (15) ヲ満足スル。(1b)ハ定理3ノ系カラ。 q.e.d.

X が有限次元ノ場合ニハ A = 對スル轉置行列ハ (13) (14) (15) ヲ満足スルカラ (1b) デ一般ノ形ガモトマルワケデアレガ、一般ノ $X \cong \bar{X}$ ナル Banach 空間ニ對シテハソノ様ニ標準形ガ何ニナルノデアラウカ。

コノデハ極メテ特別ノ場合ダケヲ考ヘル。

§ 4

定理 8 (角谷) $\mathcal{R}(X)$ = 自己逆同型 A^* デ定義サレ

$$(i) \quad A^{**} = A$$

$$(ii) \quad (\alpha A_1 + \beta A_2)^* = \bar{\alpha} A_1^* + \bar{\beta} A_2^* \quad (\bar{\alpha} \bar{\beta} \text{ ハ 複素共軛})$$

$$(iii) \quad (A_1 A_2)^* = A_2^* A_1^*$$

$$(iv) \quad A \neq 0 \quad \text{ナラ} \quad AA^* \neq 0$$

ヲ満足スルナレバ, X ヲ x, y = 對シテ適當ニ内積 (x, y)

ヲ定義スレバ

$$\|x\| \triangleq \sqrt{(x, x)}$$

ハ同値ノルムヲ與ヘ、且ツ A^* ハ

$$(iv) \quad (Ax, y) = (x, A^*y)$$

ヲ満足スル様ニ出サレ。

(証) 定理2カテ $\|A\| = \|A^*\|$ トシテ差支ヘナイ。(ソ
ウデナケレバ $\|A\| + \|A^*\|$ ヲ新ニノルムトスレバ、初メノノ
ルムト同値ニナレカラ。)

今 $\mathcal{O}$ ヲ最小左イデアルトスレバ、補助定理1カテ

$$\mathcal{O} \ni E_x \longleftrightarrow x \in X, \quad \|E_x\| = \|x\|$$

トナリ、更ニ $\mathcal{R}(X)$ ヲ作用素トシテ作用同型ニナル。

$\mathcal{O}^* = (E_x^*; E_x \in \mathcal{O})$ ハ最小右イデアルトナル。

今 $\mathcal{O} \ni E_{x_0} \neq 0$ ヲトレバ $E_{x_0}^* E_{x_0} = E_0 \neq 0$ デ (iv) ヲ用テ、

$E_0 = E_0^* \in \mathcal{O} \cap \mathcal{O}^*$ トナル。今 $\|E_0\| = 1$ トスレ。

補助定理1カテ

$$\mathcal{O} \ni E_y = B_y E_0, \quad B_y \in \mathcal{R}(X)$$

トアラハセバ、 $U = \exists_y^* E_x \in \mathcal{O}$ ニ於テ補助定理3カ
テ

$$U^2 = \lambda U, \quad \lambda: \text{係数}$$

トナル。又ハ $U^{*2} = \lambda U^*$ デアルカラ $U^* - \lambda I = A$ トオケ
バ $AU^* = 0$

今 $U \neq 0$ トスレバ $\mathcal{O} = \mathcal{R}U$, $\mathcal{O}^* = U^* \mathcal{R}$ デアルカラ

$\mathcal{O}^* \ni E_0^* = U^* C$ トアラハサレル。

故 =

$$\begin{aligned} E_x^* E_y &= E_x^* B E_0 = U^* E_0 = (\lambda I + A) E_0 \\ &= \lambda E_0 + A U^* C = \lambda E_0, \end{aligned}$$

即ち

$$(18) \quad E_x^* E_y = \lambda E_0.$$

＋ル 複素数 λ が存在スル。 ($U=0$ 十テ $\lambda=0$ トス レバヨイ)。

コノトキ $\lambda = (y, x)$ トカキ, 即チ

$$(18^*) \quad E_x^* E_y = (y, x) E_0.$$

テ (y, x) ヲ定義スル。積ノ連続性ト $X \cong \mathcal{A}$ (equivalent)

カラ

(i) (y, x) ハ x 及 $y = \psi(x)$ テ 同値ニ連続デアル。

$$(ii) \quad (\alpha y_1 + \beta y_2, x) = \alpha (y_1, x) + \beta (y_2, x),$$

$$(y, \alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha (y, x_1) + \beta (y, x_2)$$

＋ルコトガ 假定 (iii) カラ 得ラレル。

$$(iii) \quad (x, y) = \overline{(y, x)}$$

$$\text{何トナレバ } (E_x^* E_y)^* = E_y^* E_x, \quad ((y, x) E_0)^* = \overline{(y, x)} E_0.$$

カラ

$$(iv) \quad (x, x) = 0 \wedge x=0 = \text{限ル}.$$

$$\text{何トナレバ 假定 (iv) カラ } E_x^* E_x \neq 0$$

補助定理 3 由テ $E_0^2 = \lambda E_0$, $E_0 = E_0^*$ カラ 假定 (iv) ナ
ラ $\lambda \neq 0 \quad \therefore E_0^2 = E_0$.

トシテ 差支ヘナイ。ソウスレバ

$$(v) \quad (x, x) > 0 \quad (x \neq 0)$$

何トナレバ (x, x) ハ $x = 0$ 關シテ連續デ (1), $x \neq 0$
 ナラ $0 < x < 1$. 特ニ $E_0 = E_x = 1$ 關シテハ $(z_0, z_0) = 1$
 デアルカラ, $(x, x) > 0$ トナル。

$$(c) \quad (Ax, y) = (x, A^*y)$$

何トナレバ補助定理1カラ $E_{Ax} = AE_x$ ナル故

$$\begin{aligned} (Ax, y) E_0 &= E_y^* E_{Ax} = E_y^* A E_x = (A^* E_y)^* E_x \\ &= E_{A^*y}^* E_x = (x, A^*y) E_0 \end{aligned}$$

トナル。

$$(d) \quad (x, x) \leq \|x\|^2$$

$$\begin{aligned} \text{何トナレバ } (x, x) &= \|(x, x) E_0\| = \|E_x^* E_x\| \\ &\leq \|E_x^*\| \|E_x\| = \|x\|^2 \end{aligned}$$

(f) 逆ニ $\|x\|^2 \leq N(x, x)$ ナル定数 N が存在スル。

何トナレバ、カナル N がナケレバ $(x_n, x_n) = 1, \|x_n\| \rightarrow \infty$
 ナル x_n が存在スル。

又ハ $\|E_{x_n}^*\| \rightarrow \infty$ デアル。(1) カラ $E_{x_n}^*$ ナル作用素ト

ミレバ補助定理2ニヨツテ汎函数 $f_x(y)$:

$$E_x^* E_y = f_x(y) E_0, \quad \|E_x^*\| = \|f_x\|$$

ヲ定義スルカラ、Banach P. 80. 定理5ニヨリ

$$\|E_{x_n}^* E_y\| \rightarrow \infty$$

ナル E_y が存在スル。シカルニ

$$\begin{aligned} \|E_{x_n}^* E_y\| &= |(y, x_n)| \\ &\leq \sqrt{(y, y) \cdot (x_n, x_n)} = \sqrt{(y, y)} \end{aligned}$$

トナル矛盾ヲ生ジタ。

以上ヲ定理ノ証明ハオハル。

コノ場合 $\mathcal{K}(X)$ ハアル Banach 空間ノ上ノ作用素環デアアルコトヲ基ニオイテキル。只アルノルム環トイフ大デハ更ニ條件ガ必要ナワケデアル。

定理 9 ノルム環 $\mathcal{K}$ ガ Hilbert 空間 X ノ上ノ有界線型作用素全体トナルタメノ必要十分条件ハ

(i) $\mathcal{K}$ 中ニ最小左イデアル $\mathcal{L}$ ガ存在スル。且 $\mathcal{L}$ ハノルム環ニ關シテ $\mathcal{K}$ ノ閉集合トナル。

(ii) $\mathcal{L}$ 中 A ハスベテ $A^2 = \lambda A$ ヲ満足スル。

(iii) $\mathcal{L}$ ハ左イデアルデアアルカラ $\mathcal{K}$ ヲ左側作用環トスルガ、ソノトキ $\|B\|$ ハ B 中 $\mathcal{L}$ ノ作用素トシテトキノノルムニ等シイ。

$$\|B\| = \sup_{\substack{A \in \mathcal{L} \\ \|A\|=1}} \|BA\|$$

(iv) $\mathcal{K}$ ハ $\mathcal{L}$ ノ作用環トシテ *strongly-closed*:

$$\|B_n A - B_m A\| \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty)$$

ガスベテノ $A \in \mathcal{L}$ ニ對シテ成立スルヲ云

$$\|B_n A - B A\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

ガスベテノ $A \in \mathcal{L}$ ヲ成立スル様ナ $B \in \mathcal{K}$ ガ存在スル。

(v) $\mathcal{K}$ 中 $A = 0$ 對シテ $A^* \in \mathcal{K}$ ガ存在シテ定理 8 ノ (i) - (iv) ヲ満足シ、

$$\|A\| = \|A^*\|$$

トナスコトデアアル。

(注意) (iii) は次の条件 (iii') を含んでゐる。

(iii') $B\Omega = 0$ かつ $B = 0$

特 $\mathcal{R}$ が有限次元の場合 = 基礎体 $\mathcal{K}$ 上、*matrix* 全体、環 $\mathcal{R}$ となる。必要十分条件は (ii) と (iii') である。

何となく (iii') から先 $\mathcal{R}$ の *Radikal* が存在せず、次の *simple* とする。最後 (ii) から基礎体 $\mathcal{K}$ 上、*matrix* 全体、環 $\mathcal{R}$ となる。

(証明) 最小左イデアル Ω は閉であるから、 $\mathcal{K}$ 上の *Banach* 空間となる。 $\mathcal{R}$ は Ω 上の作用素環となる。定理 6 と全く同じ様 — 証明がスッとラレテ、 $\mathcal{R}$ は *Hilbert* 空間 X 上の作用素環となる。 $\mathcal{R} \subset \mathcal{K}(X)$ かつ $\mathcal{R} \ni I$ 。且つ *strongly closed* であるから $\mathcal{R}$ は $\mathcal{K}(X)$ 中の *commutator* が λI だけであることより $\mathcal{R} = \mathcal{K}(X)$ となる。

$A \in \mathcal{K}(X)$, $X \neq \Omega$ かつ $\mathcal{R}$ は *commutator* となる。故に $E_x^* \in \mathcal{R}$ となる。

$$\begin{cases} E_x^* E_y = (y, x) E_0 \\ A E_x^* E_y = (y, x) A E_0 \\ E_x^* A E_y = (A y, x) E_0 \end{cases}$$

即ち $A E_0 = \lambda E_0$, $\lambda(y, x) = (A y, x)$ がすべての $y \in X$ で成立するから $A = \lambda I$ となる。

q. e. d.

§ 5

$X \subseteq \bar{X}$ デア ッテモ X ハ Hilbert 空間トハ限ラナイノデ, 今 X ヲ任意ノ正則+実 Banach 空間トシテ

$$X_0 = X + \bar{X}, \quad X_0 \ni x_0 = x + f, \quad x \in X, f \in \bar{X},$$

$$\|x_0\| = \|x\| + \|f\|$$

トスレバ, X_0 共軛空間 $\bar{X}_0$ ハ

$$\bar{X}_0 = \bar{X} + X, \quad X_0 \ni x_0 = f + x, \quad \|x_0\| = \|f\| + \|x\|$$

ト isomorphic = ナル。明カニ $X_0 \cong \bar{X}_0$ デアル。

コノ場合ニ實際ニ adjoint ヲ作り (18) 式, λ ヲ求メヲミヨウ。

今 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ ヲ

$$(19) \quad \mathcal{A} = (A; Ax \in X, x \in X),$$

$$\mathcal{B} = (B; Bx = f \in \bar{X}, x \in X)$$

$\mathcal{C} = (C; Cf = x \in X, f \in \bar{X}), \mathcal{D} = (D; Df = g \in \bar{X}, f \in X)$ ナル有界線型作用素ノ全体トシ, 夫々, adjoint ヲ $(x, f) = (f, x) - f(x)$ ナル記号ニヨリ

$$(20) \quad \begin{cases} A^*: (Ax, f) = (x, A^*f), A^* \in \mathcal{A} \\ B^*: (Bx, y) = (x, B^*y), B^* \in \mathcal{B} \\ C^*: (Cf, g) = (f, C^*g), C^* \in \mathcal{C} \\ D^*: (Df, x) = (f, D^*x), D^* \in \mathcal{D} \end{cases}$$

ヲ表ハセバ, $\mathcal{R}(X_0) \ni H$ ハ

$$(21) \quad H \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + Cf \\ Bx + Df \end{pmatrix}$$

adjoint $H^* \in \mathcal{K}(X_0)$ へ

$$H = \begin{pmatrix} D^* & C^* \\ B^* & A^* \end{pmatrix}$$

定理 8 の (i) (ii) (iii) を満たすが, (iv) は必ずしも満
シていない。例へば

$$H = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}, \quad H^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A^* \end{pmatrix} \quad HH^* = H^*H = 0$$

である。

今 $X_0 \ni y_0 + g_0$ を X_0 の最小正規左イデ
ヤル元として

$$H_{(z_0, h_0)}(x + f) = (g_0(x) + f(y_0))(z_0 + h_0), \\ z_0 \in X, h_0 \in \overline{X}$$

全体をとれば

$$H_{(z_0, h_0)} = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}, \quad Ax = g_0(x)z_0, \quad Bx = g_0(x)h_0,$$

$$Cf = f(y_0)z_0, \quad Df = f(y_0)h_0$$

より, $H_{(z_0, h_0)}$ の adjoint へ

$$H_{(z_0, h_0)}^* = \begin{pmatrix} D^* & C^* \\ B^* & A^* \end{pmatrix}, \quad D^*x = h_0(x)y_0,$$

$$B^*x = h_0(x)g_0, \quad C^*f = f(z_0)y_0, \quad A^*f = f(z_0)g_0$$

となる。故に (11) 式は

$$H_{(\overline{z_0}, \overline{h_0})}^* H_{(z_0, h_0)} \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{D}^*A + \overline{C}^*B, & \overline{D}^*C + \overline{C}^*D \\ \overline{B}^*A + \overline{A}^*B, & \overline{B}^*C + \overline{A}^*D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix}$$

$$= (\bar{h}_0(z_0) + h_0(\bar{z}_0)) H_0,$$

$$H_0^* = H_0 = \begin{pmatrix} A_0 & C_0 \\ B_0 & D_0 \end{pmatrix}, \quad A_0 x = g_0(x) y_0, \quad B_0 x = g_0(x) y_0,$$

$$C_0 f = f(y_0) y_0, \quad D_0 f = f(y_0) y_0.$$

トナル。故に (18^*) 中ニ於テ

$$((x+f), (y+g)) = f(y) + g(x),$$

$$((x+f), (x+f)) = 2f(x)$$

トナル。コレハ定理 8, 証明中 (i) — (f) 性質中 (e)

(h) (f) ハ満足サレナイガ, 他ハ満足サレル。

今度ハ $\mathcal{R}(X)$, 自己同型 $A \rightarrow A^*$ が今度ハ $\mathcal{R}$ 型ニ
トツキル條件ヲ考ヘテ見ル。 $\forall f, g \in$

補題 4. $\mathcal{R}(X)$ / 乘法単位 I が

$$I = I_1 + I_2, \quad I_1 I_2 = I_2 I_1 = 0$$

ト分解サレルヲバ, X ハ同値ナルムヲツケカヘレバ

$$X = X_1 + X_2, \quad x = x_1 + x_2, \quad \|x\| = \|x_1\| + \|x_2\|$$

トニツキ Banach 空間 / 直和ニ分解サレル。

$$(証) \quad I_1 = I_1^2 + I_1 I_2 = I_1^2, \quad 同様ニ \quad I_2 = I_2^2 \text{ トナル。}$$

$$M_1 = \{x; I_1 x = x, x \in X\}.$$

$$M_2 = \{x; I_2 x = x, x \in X\}$$

トスレバ

$$M_1 \cap M_2 = 0, \quad X = M_1 + M_2$$

トナリ, M_1, M_2 ハ X / 閉線型部分空間トナル。 X 3 $x = x_1$

+ x_2 , $x_i \in M_i$ トル直和分解ニ對シテ $\|x\| = \|x_1\| + \|x_2\|$

トスレバ, $\|x\|' \equiv \|x\|$ デ, X ハ 両方, ノルム = 同シテ
Banach 空間ヲ作ルカラ $\|x\|$ ト $\|x\|'$ ハ 同値 ノルム
 ヲ與ヘル. *q. e. d.*

定理 10. $\mathcal{R}(X)$ ヲ $A =$ 對シテ (13), (14), (15) ヲ 満
 足スル $A^* \in \mathcal{R}(X)$ が 對應シ. 更ニ 乘法單位 I が

$$(23) \quad \bar{I} = I_0 + I_0^*, \quad I_0 I_0^* = I_0^* I_0.$$

ト分解サレルヲバ

$$X = X_0 + \bar{X}_0, \quad \bar{X}_0 = X_0.$$

ト補題 4, 意味ヲ直和分解サレ, (21) 式, $H \in \mathcal{R}(X)$ 一
 對スル H^* が (20), (22) 式ノ形ヲ與ヘラレル.

(註) $M_1 = (x; I_0 x = x, x \in X)$, $M_2 = (x; I_0^* x$
 $= x, x \in X)$ トスレバ補題 4 カラ $X = M_1 + M_2$ ト直和
 分解サレル. 今

$$(24) \quad \begin{cases} \mathcal{R} = \alpha + \mathcal{L} + \mathcal{C} + \mathcal{J}, & \mathcal{R} = \mathcal{R}(X), \\ \alpha = I_0 \mathcal{R} I_0, & \mathcal{L} = I_0^* \mathcal{R} I_0, & \mathcal{C} = I_0 \mathcal{R} I_0^*, \\ & \mathcal{J} = I_0^* \mathcal{R} I_0^* \end{cases}$$

トオケバ

$$\alpha \cdot \mathcal{L} = \alpha \cdot \mathcal{J} = \mathcal{L}^2 - \mathcal{L} \mathcal{J} - \mathcal{C} \alpha - \mathcal{C}^2 = \mathcal{J} \alpha - \mathcal{J} \mathcal{L} \\ = 0$$

$$\begin{cases} \alpha M_2 = 0, & \alpha M_1 = M_1, \\ \mathcal{L} M_2 = 0, & \mathcal{L} M_1 = M_2, \\ \mathcal{C} M_1 = 0, & \mathcal{C} M_2 = M_1, \\ \mathcal{J} M_1 = 0, & \mathcal{J} M_2 = M_2 \end{cases}$$

逆 = $AM_2 = 0$, $AM_1 \subseteq M_1$ + ラバ $A \in \mathcal{R}$ 等。

故 = $\mathcal{R} = \mathcal{R}(M_1)$, $\mathcal{V} = \mathcal{R}(M_2)$ + + $\mathcal{L}$. $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \mathcal{R}^* = \mathcal{V}$ + $\mathcal{L}$ 故, 定理 6 カラ

$$\overline{M}_1 \cong M_2, \quad \overline{M}_2 \cong M_1,$$

+ + $\mathcal{L}$. 且 $\mathcal{V} A \leftrightarrow A^*$ ハ 互 = *adjoint* = + $\mathcal{L}$. 即 $X_0 = M_1$ + M_2 + $\mathcal{L}$ 分解 = 應 ジテ

$$H = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}, \quad A = I_0 H I_0, \quad B = I_0^* H I_0,$$

$$C = I_0 H I_0^*, \quad D = I_0^* H I_0^*$$

ト表ハセバ

$$H^* = \begin{pmatrix} D^* & C^* \\ B^* & A^* \end{pmatrix}, \quad D^* = I_0 H^* I_0, \quad B^* = I_0^* H^* I_0,$$

$$C^* = I_0 H^* I_0^*, \quad D^* = I_0^* H^* I_0^*$$

ト + $\mathcal{V}$, A^*, B^*, C^*, D^* が 夫々 (20) ヲ 満足スルコトハ 定理 8 (へ) ト 全ク 同様ナル。 *q. e. d.*

$X \cong \overline{X}$ + $\mathcal{L}$ X ハ 一 体 ドンナ モ ノ ガ アルノ デアラウカ。有限次元ノ 場合ヲ 除イテハ、恐ラク $X = X_0 + \overline{X}_0$ ノ 形ニ アラハサレルノ デハ + イデアラウカ。或ハ $\mathcal{R}(X)$ ノ 形ニ イヘバ (13) (14) (15) ヲ 満足スル A^* ハ 適當ナ T ヲ トレバ、 TA^*T^{-1} ニ 代シテ (23) ガ 常ニ 成立スルノ デハ + イデアラウカ。又 $X = X_0 + \overline{X}_0 = X_1 + \overline{X}_1$ ト 分解サレタトヤ $X_0 \cong X_1$ 又ハ $X_0 \cong \overline{X}_1$ トナルノ デアラウカ。 (18, 1, 30)