



Title	のるむ群ニツイテノ一定理
Author(s)	中山, 正
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 250, p. 149-158
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75038
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

中山 正 (名大)

有限次拡大の Γ のある群 = ツイテノ一定理ヲ証明シマス。
 ソレハ局所類体論ノ終結定理ノ代数的証明ヲ與ヘルモノデ
 アリマス。同定理ノ証明ハ普通 (例ヘバ Chevalley,
Crelle 169) ハ存在定理ヲ使ツテキルデ、例ヘバ最
 近守屋氏ノ扱ツテ居ラレル場合ニツイテハ適用出来
 ズ、却ツテ存在定理ニ関係スレ一定理ノ証明ハ同定理ヲ必要
 トスルモノナリ (守屋-中山, 學士院近刊) デ、ソノ
 守屋氏 (學士院, 18 卷, 452 頁) ハ同定理ノ存在定
 理ニヨリナイ新ラシイ証明ヲ與ヘラレタ。

シカシソレハ相當面倒ナノある群ノ *index* ノ計算ヲ
 必要トシラキル。ソコデ以下ノ如クスレバ、証明モ幾分透明

ニナリ代数的内容ニアル程度明ラカニサレルノザハナイ
カト思フ。ナホ尙所類体論ノ多元数論的取扱ヒ (Chevalley,
L.C.; 中山, Annalen 112; 秋田, 同趣) ノ補足トモ
ナラウト思ヒマス。

前置キが長クナリマシタガ、尙單ナユトデアリマス。
先ヅ体 k 等ノ乘法群ヲ k^* 等トシ、 K/k カ有限次拡大
ノトキソノノミ群ヲ N^*K/k ナ表ハス。マタ $\mathcal{O}_k/k$ カ
ガロア拡大、 $(a) = (a_{R,S})$ カソノ因子團ノトキ

$$F_{\mathcal{O}_k/k}(R; (a)) = \prod_S a_{R,S}$$

ナル記法ヲ使フ。

補題 1 $F_{\mathcal{O}_k/k}(R; (a)) \in k^*$ ナリ、

$$R \longrightarrow F_{\mathcal{O}_k/k}(R; (a)) \pmod{N^*_{\mathcal{O}_k/k}}$$

ハ σ/σ' (σ ハ $\mathcal{O}_k/k$ ノガロア群、 σ' ハソノ変換子
群) カテ $k^*/N^*_{\mathcal{O}_k/k}$ 中ヘ、準同型ヲ與ヘル。マタ同伴ナ
因子團ハ同ジ準同型ヲ與ヘル。

補題 2 L カ $\mathcal{O}_k/k$ 中間体ナ $\mathfrak{h}_f$ カ對應スル σ_f
ノ部分群、 $(a)_{\mathfrak{h}_f}$ ナ因子團 (a) ノ $\mathfrak{h}_f$ = 關係スル部分、
トスレバ $A \in \mathfrak{h}_f = \mathfrak{f}_f$ ナ

$$F_{\mathcal{O}_k/k}(A; (a)) = N_{L/k}(F_{\mathcal{O}_L/k}(A; (a)_{\mathfrak{h}_f}))$$

ナリ。 (以上中山, L.C. 参照)

コノ兩者ヨリ直チニ

補題3. 上と同じ記号, 下 =, $R \in \mathcal{O}_f' \cdot \mathcal{O}_g + \mathfrak{p}$

$$F_{\mathcal{O}_g/\mathfrak{k}}(R; (a)) \in N_{\mathfrak{k}}^*$$

ヲ示ス。

証明. $R = R_1 R_2$; $R_1 \in \mathcal{O}_f'$, $R_2 \in \mathcal{O}_g + \mathfrak{p}$

$$F_{\mathcal{O}_g/\mathfrak{k}}(R; (a)) \equiv F_{\mathcal{O}_g/\mathfrak{k}}(R_1; (a))$$

$$F_{\mathcal{O}_g/\mathfrak{k}}(R_2; (a))$$

$\text{mod } N_{\mathfrak{k}}^*$. 然ルニ右辺, 第一因子ハ補題1 = ヲ

$\mathfrak{p} \in N_{\mathfrak{k}}^*$, 第二因子ハ補題2 = ヲ $\mathfrak{p} \in N_{\mathfrak{k}}^*$. 故ニ
定理カ成立ス

定理1. $\mathcal{O}_g/\mathfrak{k}$ カガ最大拡大トシ

$$\mathcal{O} \supset K \supset L \supset \mathfrak{k}$$

$$1 < e < f < g$$

トスル。ソシテ L / 上, $\mathcal{O}$ ヲ分解体 = ミツ多元環類ハ
常 = $\mathfrak{k}$ / 上, 適當ナ多元環類カラ係数拡大ヲ得ラレル
ト假定スル。又 L^* / 任意, 元 α ハ $\mathcal{O}/L$ / 適當ナ
有限個ノ因子環 $(\mathcal{O})_i$, $\mathcal{O}$ / 適當ナ元 A_i ($i=1, 2, \dots$
 $\dots, n$) = ヲリ

$$\alpha \equiv \prod_{i=1}^n F_{\mathcal{O}/L}(A_i; (\alpha)_i) \text{ mod } N_{\mathfrak{k}}^*$$

ト書ケルトスル。

コノトキ更ニ L カ $K/\mathfrak{k}$ / 最大アーベル体ヲ含ム

トスル。

$$N_{K/k}^* = N_{L/k}^*$$

デアル。即ち k 元デ L/k のあるモアレモ、ハ尚
 K/k のあるデモアル。

(証明) $C \in N_{L/k}^*$ トスル。即ち $\gamma \in L$ ガアツテ

$$C = N_{L/k}(\gamma)$$

然ル一假定=ヨリ

$$\gamma = \prod_i F_{\Omega/L}(A_i; (\alpha)_i)$$

ト書ケル(≡ヨリ=へノ移行ハ同伴+因子團ヲトレバ
 ヨイ) 更=假定=ヨリ

$$((\alpha)_i, \Omega, \mathcal{L}) \sim ((a)_i, \Omega, \mathcal{O})_L$$

ナル Ω/k ノ因子團 $(a)_i$ ガアル。ヨツテ補題2=ヨ
 リ

$$C = N_{L/k}(\gamma) = \prod_i N_{L/k}(F_{\Omega/L}(A_i; (\alpha)_i))$$

$$\equiv \prod_i F_{\Omega/k}(A_i; (a)_i) \pmod{N_{\Omega/k}^*}$$

然ル $A_i \in \mathcal{L} \in \mathcal{O}'$ ノ故カラ補題3=ヨリ此レハ
 $\in N_{K/k}^*$ 。

故= $C \in N_{K/k}^*$ デアル。(終了)

(單=局所類体論(守屋氏ノ一般化サレタ場合ヲ含メ
 テ)=使フ、+ラ上ノ定理ガケデモヨイ、先ガガリ

ある体 K の互に群が最大あーべる体 K の互に群一致スルコトヲ証明スルノハ、帰納法ニヨツテヤルタメニ、低イ次数ヲハ成立ツト假定スル。

而シテ今 $\Omega \supset A \supset K$ (A ハ最大あーべる体) トスルバ假定ニヨリ $N_{\Omega/A}^* = N_{A_1/A}^*$ (但シ A_1 ハ Ω/A 最大あーべる体)。従ツテ $(A^* : N_{\Omega/A}^*) = (A_1^* : A^*)$ 。コトハ秋月氏, Ann. 112 (終結定理ヲ用ヒテイ純代数的ナ部分) カラ $A^* \bmod N_{\Omega/A}^*$ ノ如何ナル類ニ $F_{\Omega/A}(x; (\alpha))$ ナル形ニカケル。ヨツテ上ノ定理ニヨリ、今度ハ $N_{\Omega/K}^* = N_{A/K}^*$ トナル。

サテ、一般ノ場合ニ $\Omega/L = K$ なるある体ニ戻スルコトヲ適用スルバ容易ニ L ノイカナル元ニ $F_{\Omega/L}$ ノ形ニカケ定理ノ適用出来ル。

然レ、モット代数的ニスルヲカケ違ムコトトシヨウ。

然レ、次々ニ剰余群ハ巡回群ナル *Hauptreihe* ナモツ

コトヲ群トスルがらある拡大 Ω/K ヲ考ヘル。而シテ Ω/K 最大あーべる体ヲ L トシ、 Ω/L ノ任意ノ中間体ノ上ノ Ω ナ分解体ニモツ多元環類ハ L ノ上ノソレカラ極数拡大ヲ得ラレルトスル。然ラバ

$$N_{\Omega/K}^* = N_{L/K}^* \quad \text{ナラヌ。}$$

(証明) 上ノ定理ヲ次々ニ適用スルバヨイ。

補題4. (秋月, l.c.) L が有限拡大 Ω/k ,
 がらある中間体 L , k_f が L の k に対する Galois 部分群,
 $[\Omega:L] = h$ とする。

然らば

$$((a), \Omega, \sigma)^h \sim ((b), L, \sigma/k_f)$$

但し $\sigma = k_f P_0 + k_f R_0 + \dots + k_f Q_0$,

而して $P_0 \pmod{k_f}$ の k_f の k による剰余類を $\bar{P}$ で表はせ、

$$b_{\bar{P}, Q} = N_{\Omega/L}(a_{P_0, Q_0}) \prod_{H \in k_f} \frac{a_{P_0, Q_0, H}}{a_{(FQ)_0, H}}$$

更 = $\exists (b) = \text{対して}$

$$F_{L/k}(\bar{P}, (b)) = F_{\Omega/k}(P_0, (a))$$

補題5. 上と同じ假定、下 = L^* 、如何なる元

$\sigma \in$

$$\sigma = \prod_{i=1}^n F_{\Omega/L}(A_i; (\alpha)_i)$$

と書けるとする $((\alpha)_i \in \Omega/L$ 、因子環; $A_i \in k_f$). 而して
 $((\alpha)_i, \Omega, k_f)$ は多元環類 h の上、多元環類
 から係数拡大で得られるとする。

更 = Ω/k 、ある因子環 $(b) = \text{対して}$

$$((b), \Omega, \sigma)^h \sim ((\beta), L, \sigma/k_f)$$

とする。しかるに $\bar{P} \in \sigma/k_f = \text{対して}$

$C = F_{L/k}(\bar{P}; (\beta))$ の適当な Ω/k 、因子環 $(\alpha)_i$
 及び $A_i \in k_f = \exists$

$$1 \quad C \equiv F_{\mathcal{O}/k} (P_0, (b)) \prod F_{\mathcal{O}/k} (A_i, (a)_i) \pmod{N_{\mathcal{O}/k}^*}$$

(但し $P_0 \in \overline{P}$, 代表元)

(証明) 補題 4 = ヲリ

$$C = F_{L/k} (\overline{P}, (\beta)) \equiv F_{\mathcal{O}/k} (P_0, (b)) \pmod{N_{L/k}^*}$$

即ち $d = C \cdot F_{\mathcal{O}/k} (P_0, (b))^{-1} \not\equiv 0 \pmod{N_{L/k}^*}$,
 $d = N_{L/k}(\delta)$. 然ルニ

$$\delta = \prod_{i=1}^n F_{\mathcal{O}/L} (A_i; (\alpha)_i)$$

ト書ケル。而シテ

$$((\alpha)_i, \mathcal{O}, h_i) \sim ((a)_i, \mathcal{O}, \sigma)_L$$

トナリ。

補題 2 = ヲリ

$$\begin{aligned} d = N_{L/k}(\delta) &= \prod_{i=1}^n N_{L/k} (F_{\mathcal{O}/L} (A_i; (\alpha)_i)) \\ &\equiv \prod_{i=1}^n F_{\mathcal{O}/k} (A_i, (a)_i) \pmod{N_{\mathcal{O}/k}^*} \end{aligned}$$

故ニ

$$\begin{aligned} C &= d \cdot F_{\mathcal{O}/k} (P_0, (b)) \\ &\equiv \prod_{i=1}^n F_{\mathcal{O}/k} (A_i; (a)_i) \cdot F_{\mathcal{O}/k} (P_0, (b)) \pmod{N_{\mathcal{O}/k}^*} \end{aligned}$$

補題6. $\mathcal{O}_k/k$ を可解拡大とする。

$$k = L_0 < L_1 < L_2 < \cdots < L_{n-1} < L_n = \mathcal{O}_k$$

$$\mathcal{O}_k = \mathcal{O}_0 \supset \mathcal{O}_1 \supset \mathcal{O}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{O}_{n-1} \supset \mathcal{O}_n = \{L\}$$

$\mathcal{O}_{i+1}/\mathcal{O}_i$ 巡回群, $S_i (\in \mathcal{O}_i)$ を $\mathcal{O}_i$ の生成元, 或る代表元とする。

而して $\mathcal{O}_i$ の i = ツイテモ L_i を可解体 = モツ k 上, 多元環類 $\mathcal{O}_k$ を可解体 = モツ適当な類, ($\mathcal{O}_k : L_i$) 乗 = ナツテキルトスル。マタ L_i 上, $\mathcal{O}_k$ を可解体 = モツ類 $\mathcal{O}_k$ 上, ソレカラ係数体拡大ヲ得ラレルトスル。

然ラバ k 上, 如何ナル元 $C (\neq 0) \in$, 適当な n 個 $\mathcal{O}_k/k$ の因子環 $(\alpha)_i$ をトルコト = ヨリ

$$C \equiv \prod_{i=1}^n \bar{F}_{\mathcal{O}_k/k} (S_i; (\alpha)_i) \pmod{N_{\mathcal{O}_k/k}^*}$$

トナル。

(証明) $n=1$, 即ち $\mathcal{O}_k = L_1$ (k 上 = 巡回的) ノトキハ明ラカ。

何者, $C = \bar{F}_{L_1/k} (S_1; (c))$ ナカラデアル。(但シ (c) ハ巡回環 (C, L_1, S_1) ノ因子環ヲ表ハス)。サテ帰納法ヲ証明スルタメ, $n-1$ ノ時ハ成立ツトスル。

$\mathcal{O}_k/L_1$ = ツト考ヘルト定理ノ假設 = 相當スル條件ガミタサレテキルコトハ直チ = 知ラレル。ヨツテ如何ナル $\gamma_1 \in L_1^* =$ 對シテモ $(n-1)$ 個ノ因子環 $(\alpha)_i$ ($i=2,$

-----, n) をとり

$$\gamma_i \equiv \prod_{j=2}^n F_{\mathcal{O}_L/L_1}(S_i; (a)_i) \pmod{N_{\mathcal{O}_L/L_1}^*}$$

と置く。然るに $v = ((a)_i, \mathcal{O}_L, \sigma_i) \sim ((a)_i, \mathcal{O}_L, \sigma_i)_{L_1} + v$
 $(a)_i$ ($i=2, \dots, n$) と書く。

故て, $C \in k^*$ とする。上述より如く $C = F_{L/k}(S_1; (c))$, 而して (C_1, L_1, S_1) は或る $((a)_1, \mathcal{O}_L, \sigma_1)$, $(\mathcal{O}_L: L_1)$ 系 = 同値 = ナル。ヨッテ前補題5 = ヲリ

$$C \equiv F_{\mathcal{O}_L/k}(S_1; (a)_1) \prod_{i=2}^n F_{\mathcal{O}_L/k}^*(S_i; (a)_i) \pmod{N_{\mathcal{O}_L/k}^*}$$

定理2 有限拡大 $K \supset L \supset k$ = 於て, L は K/k の最大アーベル体ヲ含ムとする。

今, K/k の属スルガロア体ヲ $\mathcal{O}_L/k$ とスルとき,
 $\mathcal{O}_L/L$ は可解拡大デアルトシ, 更ニ $\mathcal{O}_L/L$ 任意ノ中間
 体 Λ = 對シ Λ を分解体 = モツ L / 上ノ多元環類ハ $\mathcal{O}_L$ を
 分解体 = モツ適當ノ多元環類ノ $(\mathcal{O}_L: \Lambda)$ 系デアリ, マ
 タ Λ / 上ノ $\mathcal{O}_L$ を分解体 = モツ任意ノ多元環類ハ k / 上
 ノソレカラ係数拡大ヲ得ラレルトスル。

然らば

$$N_{K/k}^* = N_{L/k}^*$$

(証明) $\mathcal{O}_L/L$ は補題5ノ條件ヲミタスカラ, L は

意1元 $\gamma (\neq 0)$ ハ

$$\gamma \equiv \prod_i F_{\mathcal{O}/L}(A_i; (\alpha)_i) \bmod N_{\mathcal{O}/L}^*$$

ヨッテ定理1ニヨリ (ソコノ條件ニミタサレテキルカラ)

$$N_{K/k}^* = N_{L/k}^*$$

— 以 上 —