



Title	Maximales Ideal ノ擴大ニツイテ
Author(s)	河田, 敬義
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 250, p. 163-166
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75040
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1108

~~256~~ Maximal Ideal, 拡大 = ツイテ

河田 敬 義 (東京大理)

1ルム環 \mathcal{R}_1 , 部分環 \mathcal{R}_2 が同シ, 1ルム = 閉シテ又
→ ツ / 1ルム環ヲ作レトキ =, 何特 \mathcal{R}_2 , Maximal
Ideal (M. I.) が \mathcal{R}_1 , M. I. = マデ 拡大 # レル カトイ
フ問題 = ヲ イテ ハ 例 ハ G. Silov, 論文 (Doklady,
29 (1940), S. 83) が ナル。

本誌 談話 927, (210頁) 及ビ 944, () = 於
テ 無條件 = コノ ヲ ウチ 拡大 が 出来る コトヲ 假定 シテ 証明

シテキル点 = ツイテ角谷氏カラ御注意タイタビイヌ。此
 処デハ, ソノ場合 = 適用サレルーツノ M.I. ノ拡大 = 関
 スル補題ヲ証明シテ前巻註ノ補ヒトシタイ。

『補題. 任意ノ $x \in \mathcal{R}_1$ = 対シテ或ハ $\bar{x} \in \mathcal{R}_1$ ガ對
 應シテ \mathcal{R}_1 , スベテノ M.I. M_1 = 対シテ

$$\bar{x}(M_1) = \overline{x(M_1)}$$

ヲ満足スルモノトスル。

今, $\mathcal{R}_2 \ni y$ = 対シテ又 $\mathcal{R}_2 \ni \bar{y}$ 有アレバ \mathcal{R}_2 ,
 任意ノ M.I. \mathcal{M}_1 ノ M.I. = マデ拡大サレル。』

(証明) 今 \mathcal{R}_2 ノーツノ M.I. M_2 ガ如何ナル \mathcal{R}_1 ノ M.
 I. M_1 = ε 含まレタイトスレバ, 各 M_1 = 対シテ $x_1(M_1) \neq 0$
 ナル $x_1 \in M_2$ ガアル。 \mathcal{R}_1 ノ M.I. 全体 \mathcal{M}_1 ノ *bikompaakt*
 ナル故, 適當 = $M_2 \ni x_1, \dots, x_n$ 有トレバ

$$M_2 \ni y = x_1 \cdot \bar{x}_1 + \dots + x_n \cdot \bar{x}_n$$

ハ $\mathcal{M}_1 \ni M_1$ = 対シテ常 = $y(M_1) > 0$ トナル。

今

$$m = \max_{M_1 \in \mathcal{M}_1} y(M_1), \quad n = \min_{M_1 \in \mathcal{M}_1} y(M_1) > 0$$

トシ

$$z = m e - y$$

トオケバ

I. Gelfand, Normierter Ring (Proc. Math.,
 9, S. 11, Satz 8') カラ $z \in \mathcal{R}_2$ トイレバ。

$$\lim \sqrt[n]{\|z^n\|} \geq m = |z(M_2)|$$

$z \in \mathcal{R}_1$ トミルハ

$$\lim \sqrt[n]{\|z^n\|} = \max_{M_1 \in \mathcal{M}_1} |z(M_1)| = m - \epsilon$$

トナリ, $\epsilon > 0$ ト予値スル。(証了)

ツイデ = Silov / 定理 介紹シテオカウ。(証明ハ若干簡單ナル様デアアル)

『定理 (Silov) \mathcal{R}_1 = 対シテハ \bar{z} / 存在ハ假定シテイカ, $\mathcal{R}_2 \ni y$ = 対シテハ補題 如キ $\bar{y} \in \mathcal{R}_2$ / 存在ヲ假定スル。(即 $\bar{y}(M_2) = \overline{y(M_2)}$)』

然ラバ \mathcal{R}_2 / 任意ノ M.I. ハ \mathcal{R}_1 / M.I. = 延長サレル。」

(証明) (I) \mathcal{R}_1 / M.I. 全体ヲ \mathcal{M}_1 , \mathcal{R}_2 / M.I. 全体ヲ \mathcal{M}_2 ト書ク。

先ヅ, スベテ $M_2 \in \mathcal{M}_2 =$ 対シテ $x(M_2) = \text{reell}$ ($x \in \mathcal{R}_2$) ナラバ スベテ $M_1 \in \mathcal{M}_1 \rightarrow$ 對シテ $x(M_1) = \text{reell}$ トナル。

何トナレバ $x = (a + bi)$ ($b \neq 0$) ハ \mathcal{R}_2 中逆元ヲモツ。 $\mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_1$ ナラ $x(M_1) \neq \text{reell}$ ナル $M_1 \in \mathcal{M}_1$ ハナラバ得ナシ。

之レナラ $x \in \mathcal{R}_2 =$ 對スル $\bar{x} \in \mathcal{R}_2$ ハ

$$\bar{x}(M_1) = \overline{x(M_1)}, M_1 \in \mathcal{M}_1$$

トナルコトオカワカル。

何トナレバ $\frac{1}{2}(x+\bar{x}), \frac{1}{2i}(x-\bar{x}) = \text{ツイテ上}$ 場合ヲ適用スレバヨイ。

之レカラアトハ補題ノ証明ト全ク同シデアル。

(II) 別証。

$\mathcal{M}_1, \exists M_1 = \text{対シテ } M_1 \in \mathcal{R}_2 = M_2 \text{ヲ作り, } \forall \text{ 全体ヲ } \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \text{トスル。コノ } M_1 \rightarrow M_2 \text{ノ對應ハ } \mathcal{M}_1 \text{ in } \mathcal{M}_2 \text{ノ連續對應デ, } \mathcal{M}_1 \text{ガ } \textit{bikompaakt} \text{デアルカラ, } \mathcal{M}_1 \text{ハ } \mathcal{M}_2 \text{中ノ閉集合デアル。}$

今 $\mathcal{M}_1 \neq \mathcal{M}_2$ トシテ矛盾ニ導ク。 \mathcal{M}_2 ハ *bikompaakt normal* デアルカラ $M_2^0 \in \mathcal{M}_2 - \mathcal{M}_1 = \text{対シテ}$

$$f(M_2^0) = 1, f(M_2) = 0, M_2 \in \mathcal{M}_1$$

ナル \mathcal{M}_2 上ノ実連続函数 f が存在スル。 \mathcal{R}_2 ノ $x = \text{対シテ } \bar{x}$ 存在スルトイフ假定カラ *Gelfand, Satz 16* カラアル $x \in \mathcal{R}_2 = \text{対シテ}$

$$|f(M_2) - x(M_2)| < \varepsilon, M_2 \in \mathcal{M}_2$$

が成立スル。再ビ *Gelfand, Satz 8'* カラ,

$$\mathcal{R}_2 \ni x, \quad \lim_{M_2 \in \mathcal{M}_2} \sqrt[n]{\|x^n\|} = \max_{M_2 \in \mathcal{M}_2} |x(M_2)| \geq 1 - \varepsilon$$

$$\mathcal{R}_1 \ni x, \quad \lim_{M_1 \in \mathcal{M}_1} \sqrt[n]{\|x^n\|} = \max_{M_1 \in \mathcal{M}_1} |x(M_1)|$$

$$= \max_{M_2 \in \mathcal{M}_2} |x(M_2)| \leq \varepsilon$$

即チ矛盾ヲ生ジタ。

(西大 = 三六八)