OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	代數曲線ノ Uniformisation ニツイテ（Ⅱ）
Author(s)	有馬, 喜八郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 251, p. 196-212
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75044
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

1112. 代数曲線ノ Uniformisation ニツイテ (II)

有馬 喜八郎 (阪大)

第二章

第一章ニ於テ Ahlfors ノ Schwarz Lemma ヲ利用シテ Uniformisation 問題ヲ取扱ヒマシタガ，コノ章以下デハ Nevanlinna 流ノ理論ニツキカイテミタイト思ヒマス。

(1) $F(x,y)=0$ ハ $x=$ ツキ n 次，$y=$ ツキテ m 次ノ代数方程式トシソノ Riemann 面ヲ R トシマス。又 Geschlecht ヲ p トシマス ($p\geqq 0$)

R ノ normal + 第三種積分

$$J(z,z_0,\alpha,\beta)=\int_{z_0(x_0,y_0)}^{z(x,y)} R(x,y)\,dx$$

α,β ヲ logarithmic + singular point トシテモツ

$\alpha(a,a')$ ガ k 次ノ分岐点ナラバ，α ニテ

$$\frac{1}{k}\log\frac{1}{x-a}+\text{有界ナ函数}$$

$\beta(b,b')$ ガ k' 次ノ分岐点ナラバ，β ニテ

$$\frac{1}{k'}\log(x-b)+\text{有界ナ函数}$$

$J(z,z_0,\alpha\beta)$ ノ実数部分ヲ $G(z,z_0,\alpha,\beta)$ トスレバ $\alpha,$

β ニテ夫々上述ノ如キ性質ヲ有シ他ニテ調和ナ函數トナル。

(2) $x=f(t)$, $y=g(t)$ ハ $|t|<R$ ニテ有理型函數デ $F[x(t), y(t)]\equiv 0$ トス。

$$G\left(\Sigma(f(t), g(t))\, z_0;\ \alpha, \beta\right) = G(t)$$ トス.

$\alpha(a, a')$ ニ於テ

$$y-\alpha = a_l (x-a)^{\frac{l}{k}} + \cdots\cdots$$

トス.

$$\overline{m}(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|^{\frac{1}{k}} + |g(re^{i\theta})-\alpha|^{\frac{1}{k}}}\, d\theta$$

$r \le R$

$t=t_0$ ニテ

$$f(t)-a = A(t-t_0)^{\frac{l}{n}} + \cdots\cdots$$

$$g(t)-a' = B(t-t_0)^{\frac{l}{n}} + \cdots\cdots$$

ナルトキ t_0 ニテ n 回ト算ヘ, $|t_0|<r$ ナルスベテニツキ計算シタ総計ヲ $\overline{n}(r, \alpha)$ トス

然ルトキ普通ノ場合ノ $\log^{|f-a|}$ ノカハリニ上述ノ $G(t)$ ヲ利用シテ Green-Gauss ノ公式ヨリ

$$\overline{m}(r, \alpha) + \int_{r_0}^{r} \frac{\overline{n}(r, \alpha)}{r}\, dr = m(r, \beta) + \int_{r_0}^{r} \frac{\overline{n}(r, \beta)}{r}\, dr + O(1)$$

$$\int_0^r \frac{\overline{n}(r, \alpha)}{r}\, dr = N(r, \alpha)$$ トスレバ

$$\overline{m}(r;\infty)+\overline{N}(r;\alpha)=\overline{m}(r;\beta)+\overline{N}(r;\beta)+O(1)$$

$\overline{T}(r;\alpha)=\overline{m}(r;\alpha)+\overline{N}(r;\alpha)$ トスレバ

（第一基本定理）

$$\overline{T}(r;\alpha)=\overline{T}(r;\beta)+O(1)$$

(3)

$T\left(r;\frac{1}{f-a}\right)$, $T\left(r;\frac{1}{g-a'}\right)$ ト $\overline{T}(r;\alpha)$ ノ関係式ヲ考ヘマス。

$x=a$ ナル点ヲ

$$\alpha_1(a,b),\ \alpha_2[a,b_2)\cdots\cdots$$

トシ，ソノ分岐數ヲ k_1, k_2, …… トス。

$$\sum k_i=m$$

然ルトキ

$$T\left(r;\frac{1}{f-a}\right)=\sum k_i\overline{T}(r;\alpha_i)+O(1)$$

第一基本定理ヨリ $\alpha(a,a')=\alpha_1(a,b_1)$ 即チ $a'=b_1$ トスレバ

$$T\left(r;\frac{1}{f-a}\right)=\overline{T}(r;\alpha)\sum k_i+O(1)$$

$$=m\overline{T}(r;\alpha)+O(1)$$

依ッテ次ノ定理ヲ得。

定理 4.

$$\overline{T}(r;\alpha)=\frac{1}{m}T\left(r;\frac{1}{f-a}\right)+O(1)=\frac{1}{m}T(r;f)+O(1)\cdots\cdots$$

同様ニシテ

$$\overline{T}(r,a)=\frac{1}{n}T\left(r,\frac{1}{g-a'}\right)+O(1)=\frac{1}{n}T(r,g)+O(1)\cdots\cdots$$

従ッテ又上式ヨリ

$$\frac{1}{m}T(r,f)=\frac{1}{n}T(r,g)+O(1)\cdots\cdots$$

(注意) Nevanlinna ノトキハ $x=f(z)$, $y=f(a)$ トスレバ $F(x,y)=x-y=0$ トシ, $a(a,a)$ トスレバ

$$\overline{T}(r,a)=T\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$$

トナル。

(十)

Nevanlinna ノ理論デ

$$T(r,f)=T\left(\frac{cf+d}{af+b}\right)+O(1)\qquad a,b,c,d\text{ハ常数}$$

コレヲ $T(r,f)$ ハ一次変換ニヨリ不変デアルト云フコトニシマスト

$\overline{T}(r,a)$ ニツイテ如何ナルコトガ云ヘルデセウカ。

$\overline{T}(r,a)$ ハ $F(x,y)=0$ ノ birational transformation ニヨリ不変デアルコトガ云ヘマス。以下コレニツイテ考ヘマス。

$F(x,y)=0$ ノ Riemann 面ヲ R_F ト書クコトニシマス。

$F(x,y)=0$ ハ x ニツイテ n 次, y ニツイテ m 次ノ irreducible ナ代数方程式トシ

$$X=\varphi(x,y),\quad Y=\psi(x,y)\cdots\cdots(A)$$

ナル変換ヲ考ヘル。

但シ $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ ハ夫々 μ 次, ν 次, 有理函数トス。即チ R_F ノ上ニ於テ異ナル μ 個, ν 個ノ Pole ヲ有スルモノトス。

(A) ト $F(x, y) = 0$ ヨリ, x, y ヲ消去スレバ

$$G(X, Y) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (B)$$

ナル形ノ曲線ニナル。 X ニツイテハ ν 次, Y ニツキ μ 次トナル。

逆ニ (A), (B) ヨリ

$$x = \overline{\varphi}(X, Y)$$

$$y = \overline{\psi}(X, Y)$$

ナル如ク, x, y ハ X, Y ノ有理函数ニテ表ハサル。

$G(X, Y) = 0$ ノ Riemann 面ヲ R_G トス。

以下数段ニ分ケテ $\overline{\varphi}(\gamma, \delta)$ ノ birational transformation ニヨル不変性ヲ証明シマス。

1°

(I) $X = \varphi(x, y)$ ハ R_F ノ分岐点ヂャイ異ナル μ 個ノ点デ一次ノ無限大ニナル。

(II) R_F ハ無限遠点ニ分岐点ヲモタズ且ツ x ノ ∞ ニ對シ X ノ m 個ノ値ハ

$$X_i = A_0^i + A_1^i \frac{1}{x} + \cdots\cdots \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots m$$

但シ $A_1^i \neq 0$

(I), (II) ノ假定ヲナスモ一般性ヲ失ハナイコトヲ証明シマ

ス。

(I)ノ假定ニツイテ(I)ノ假定ガ成立セズトスレバ次ノ如ク考フ。

$$\varphi(x, y) = X_0$$

ガ無限点ト モ亦分岐点ト モ相異ナル μ 個ノ根 $\alpha_1(a_1, b_1)$, $\alpha_2(a_2, b_2)$ …… $\alpha_\mu(a_\mu, b_\mu)$ ノ simple ノ根ヲ有スルモノトス。

$X' = \dfrac{1}{X - X_0}$ トオキ(X, Y)ノ Riemann 面 R_G ト(X', Y')ノ Riemann 面 R_G ヲ考ヘレバ，放數分岐点ノ分岐數ハ不変ナリ。

今 $x = f(t)$, $y = g(t)$, $F(x, y) = 0$ ノトキ $\Gamma(r, \alpha)$ ヲ他ノ場合ト區別スルタメ $\Gamma(r, f, g, \alpha)$ ト記スコトニス。

$x = f(t)$, $y = g(t)$ ヲ $\varphi(x, y)$ ニ代入シ

$$X(t) = \varphi[f(t), g(t)] = \overline{F}(t)$$

トス，コノ transformation ニヨリ α ハ R_G 上ノ点ニ移ッタトス。

定理(I)ヨリ

$$\overline{\Gamma}(r, \overline{F}, G, \alpha) = \frac{1}{\mu}\Gamma(r, \overline{F}) + O(1)$$

又

$$X'(t) = \frac{1}{X(t) - X_0} = \frac{1}{\overline{F}(t) - X} = \overline{\overline{F}}(t)$$

トス。

コレニ α' ハ $R_{F'}$ 上ノ α' ニ変ッタトスレバ

$$\overline{T}(r, \overline{F}, G', \alpha') = \frac{1}{\mu} T(r, \overline{F}) + O(1)$$

$\overline{\overline{F}}(t) = \dfrac{1}{\overline{F}(t) - X_0}$ トレ故

$$T(r, \overline{F}) = T(r, \overline{\overline{F}}) + O(1)$$

$$\therefore \quad \overline{T}(r, F, G, \alpha) = \overline{T}(r, \overline{\overline{F}}, G'\alpha') + O(1)$$

故ニ (I) トル假定ヲナスモ，不変性ニ影響ナシ

(II) ノ假定ニツイテ

x_0 ハ x_0 ニ對應スル m 個ノ y ノ値ハ有限デ異ナリ，又夫々ニ對スル $X = g(x, y)$ ノ m 個ノ値モ有限デ異ナレ如キ x ノ數値トス。

$$X_i = A_0^i + A_1^i (x - x_0) + \cdots\cdots \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, m)$$

但シ $A_1^i \neq 0$

$x = x_0 + \dfrac{1}{x'}$ トル変換ヲ施セバ所要ノ假定ガ成立ス。

ソノトキノ Riemann 面ヲ $R_{F'}$ トス。

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

ニ對シ $x' = \dfrac{1}{f(t) - x_0} = f'$, $y = g(t)$ ヲ考ヘル。

定理ニヨリ

$$\overline{T}(r, f, F, \alpha) = \frac{1}{m} T(r, f) + O(1)$$

α ガ α' ニ変ッタトスレバ

$$\overline{T}(r, f', F', \alpha') = \frac{1}{m} T(r, f') + O(1)$$

$f'(t) = \dfrac{1}{f(t)-x_0}$ ヨリ

$$T(r, f') = T(r, f) + O(1)$$

故ニ　$$\overline{T}(r, f, F, \alpha) = \overline{T}(r, f', F', \alpha') + O(1)$$

トナリ，不変性ニ影響ナシ．

2°.

1°ヨリ (I), (II) ノ假設ヲナスモ一般性ヲ失ハザルコトヲ証明セラレシ故，以後 (I), (II) ノ假設ノモトニ議論ヲ進メルモノトシマス．

初メニ $\overline{m}(r, \alpha)$, $\overline{N}(r, \alpha)$ ニツイテ注意ヲナシ，ソレニツイテ論スルコトニシマス．

$\alpha(a, a')$ ニ於テ

$$y - a' = a_l (x-a)^{\frac{l}{k}} + \cdots\cdots$$

$$\therefore \quad |y-a'|^{\frac{1}{k}} = |x-a|^{\frac{1}{k}} \cdot S(x)$$

$S(x)$ ハ有界ナ函数トス．

故ニ

$$|g(re^{i\theta})-a'|^{\frac{1}{k}} = |h(re^{i\theta})-a|^{\frac{1}{k}} S(r, e^{i\theta})$$

$$\therefore \quad \overline{m}(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|^{\frac{1}{k}} + |h(re^{i\theta})-a'|^{\frac{1}{k}}} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|} d\theta + O(1)$$

故ニ

$$\frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|}\,d\theta - \overline{\overline{m}}(r,f,a)$$

トスレバ

$$\overline{T}(r,a) = \overline{\overline{m}}(r,f,a) + \overline{N}(r,a) + O(1)$$

故ニ $\overline{m}(r,a)$ ノ代リ $\overline{\overline{m}}(r,f,a)$ ヲ考ヘル。

(A) R_G ノ無限点ニツイテ考ヘル。

假定(I)ニヨリコレニハ μ 個ノ單純極 $a_1(a_1, b_1)\cdots\cdots a_\mu(a_\mu, b_\mu)$ ガ對應ス。

$a_i(a, b_i)$ ノ近傍ニテハ

$$X = \frac{R_i}{x-a_i} + C_0 + C_1(x-a_i) + \cdots\cdots (1) \qquad R_i \neq 0$$

inversion ニヨリ $\quad x - a_i = P\left(\frac{1}{X}\right)$

但シ P ニハ $\frac{1}{X}=0$ ニテ正則ナ函數

$a_i(a_i, b_i)$ ハ分岐点デナイカラ $y-b_i$ ハ $x-a_i$ ノ正則ナ函數，故ニ $\frac{1}{X}=0$ ノ近傍デ $\frac{1}{X}$ ノ正則ナ函數トナル故ニ $Y=\psi(x,y)$ ハ $\frac{1}{X}=0$ 從ツテ $X=\infty$ デuniformナ函數トナリ，R_G ノ無限点ハ分岐点デハナイ。

故ニ上ノ注意ト(1)式ヨリ a_i ノ對應点ヲ A_i トスレバ

$$\overline{T}(r,f,F\,a_i) = \overline{T}(r,\overline{F},G,A_i) + O(1)$$

トナルコトヲ知ル。

(B) R_F ノ無限点ニハ假定(II)ヨリ

R_F ノ無限点ニテ

$$X = A_0 + \frac{A_1^i}{x} + \cdots\cdots \qquad (2) \qquad A_1^i \neq 0$$

inversion ニヨリ

$$\frac{1}{x} = P(X - A_0^i)$$

R_F ノ無限点ハ分岐点デナイカラ，従ッテ

$$y = Q(X - A_0^i)$$

$$\therefore \quad Y = \psi(x, y) \Rightarrow R(X - A_0^i)$$

$P(X - A_0^i)$, $Q(X - A_0^i)$, $R(X - A_0^i)$ ハ uniform ナ函数デアルコト R_F ノ無限遠点ノ對應点A ハ分岐点デナイ。

故ニ (2) ヨリ容易ニ

$$\bar{T}(r, f, F, \alpha) = \bar{T}(r, \bar{F}, G, A) + O(1)$$

(C) 次ニ $\alpha_i(a_i, b_i)$ ガ R_F ノ上ノ分岐数 r_i ノ分岐点ノ場合

$$X = X_i + C_1^i (x - a_i)^{\frac{l_i}{r_i}} + \cdots\cdots \qquad C_1^i \neq 0$$

$$\therefore \quad (X - X_i)^{\frac{1}{l_i}}$$

$$= (x - a_i)^{\frac{1}{r_i}} \left[C_1^i + \alpha_1 (x - a_i)^{\frac{1}{r_i}} \cdots \right]^{\frac{1}{l_i}} \cdots\cdots (3)$$

故ニ

$(x - a_i)^{\frac{1}{r_i}}$ ハ $(X - X_i)^{\frac{1}{l_i}}$ デ級数展開サレ．従ッテ $y - b_i$ モ $(X - X_i)^{\frac{1}{l_i}}$ デ従ッテ $Y = \psi(x, y)$ モ $(X - X_i)^{\frac{1}{l_i}}$ デ展開可能デアル．

従ッテ $\alpha_i(a_i, b_i)$ ニ對應スル R_G 上ノ点 A_i ハ分岐數 l_i ノ分岐点トナル.*

(3) ヨリ

$$\frac{1}{2\pi l_i}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|\overline{F}(t)-X_i|}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi r_i}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(t)-a_i|}\,d\theta + O(1)$$

又, $x-a_i = f(t)-a_i = (t-t_0)^{r_i n}[A+\cdots\cdots]$ $A\neq 0$

トスレバ

$$(\overline{F}(t)-X_i)^{\frac{1}{l_i}} = (t-t_0)^n [C_1^i+\cdots]^{\frac{1}{l_i}}[A+\cdots\cdots]^{\frac{1}{r_i}}$$

$$\therefore\quad F(t)-X_i = (t-t_0)^{\frac{l_i n}{r_i}}[C_1^i\cdots\cdots](A\cdots\cdots)^{\frac{l_i}{r_i}}$$

故ニ

$$\overline{N}(r, \alpha_i) = \overline{N}(r, A_i)$$

故ニ

$$\overline{T}(r, f, F\ \alpha_i) = \overline{T}(r, \overline{F}, F\ A_i) + O(1)$$

(D) $\alpha(a, b)$ ガ R_F ノ分岐点デナイトキ

$\alpha(a, b)$ ニ對應スル R_G ノ点ヲ A トス。

$$X = X_0 + A_n(x-a)^n + \cdots\cdots \qquad A_n \neq 0$$

モシ $n>1$ ナラバ $x-a$, ハ $(X-X_0)^{\frac{1}{n}}$ ニテ従ッテ $y-b$ モ従ッテ $Y=\psi(x, y)$ モ $(X-X_0)^{\frac{1}{n}}$ ニテ展開サレテ次ノ分岐点トナル.*

$$X-X_0 = (x-a)^n[A_n+\cdots\cdots] \cdots\cdots\cdots (4)$$

(4) ヨリ

$$\frac{1}{2\pi n}\int \log^+ \frac{1}{\overline{F}(t)-X_0}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int \log^+ \frac{1}{|f(t)-a|}\,dt + O(1)$$

$$\therefore\ \overline{m}(r, f, a) = \overline{m}(r, \overline{F}, A) + O(1)$$

同様ニ

$$\overline{N}(r, f, a) = \overline{N}(r, \overline{F}, A)$$

$$\therefore\ \overline{T}(r, f, F, a) = \overline{T}(r, \overline{F}, G, A) + O(1)$$

上ニテ完全ニ証明ヲ了ス。

(注意) (C), (D) ニ於ケルγノ展開式ニ於テ分数指数ガ消エルカ，又ハ l_i，又ハソヨリモ小サイ共通分母ヲ有スルコトハナイ。

例ヘバ (D) ノ場合ニ $a(a, b) =$ 点 $A(X_0, Y_0)$ ガ対応スルトス。

今 A ヲ通ル Riemann 面ノ枚数ガ n 個ヨリ少クナイトス。

Xガ R_F ノ上デaノ廻リヲ一回マワレバ $X - X_0$ ハ $2n\pi$ ダケ偏角ガ増ス。従ッテ X ト $A(X_0, Y_0)$ ヲ結ブ直線ハ cycle A ノ近傍ヲ一回以上マワル故ニ一対一ノ対応ヲナサズコレハ birational transformation ノ假設ニ反ス。

l_i ノトキモ全ク同様ナリ。

故ニ

定理(II) $\overline{T}(r; a)$ ハ birational transformation ニヨリ不変ナリ。

(5) エ；5 デハ geschlecht $p \geqq 2$ トス。

$F(x,y)=0$ ハ第一章ノ條件ヲ満足スルモノトス．$\varphi(x,y)$ ヲ $(p,0)$ ナル automorphic function トス。

$$\overline{u}(x)=\log\frac{\left|\frac{dz}{dx}\right|}{1-|z|^2}$$

トスレバ

$$\Delta_x \overline{u}=4e^{2\overline{u}}$$

Riemann 面ノ無限点デハ $\overline{u}(x)=-2\log|x|$ ＋有界函数，m 次ノ分岐点 (b,b') デハ $\overline{u}(x)=\frac{1-m}{m}\log|x-b|$ ＋有界函数

$u(t)=\overline{u}(f(t))$ トスレバ $\Delta_t u(t)$

$$=\Delta_t \overline{u}[f(t)]=\Delta_x \overline{u}\left|\frac{dx}{dt}\right|^2$$

今 Riemann 面ノ分岐点 α_i ノ分岐数ヲ m_i $(i=1,2,\cdots\cdots k)$，無限遠点ヲ β_i $(i=1,\cdots\cdots m)$ トス。

$\overline{u}[f(t)]$ ニ第一基本定理ノトキト同ジ準備ノモトニ Green-Gauss ノ公式ヲ用ヒ

$$\sum_{i=1}^{k}(m_i-1)T(r,\alpha_i)-2\sum_{i=1}^{m}T(r,\beta_i)+O(1)$$

$$=-\int_{r_0}^{r}\left[\frac{2}{\pi}\int e^{2\overline{u}}\left|\frac{dx}{dt}\right|^2 d\omega\right]\frac{dr}{r}$$

但シ $d\omega$ ハ面積要素トス。

第一基本定理ニヨリ Riemann 面上ノ任意ノ点ノ

トスレバ

$$\left[\sum_{i=1}^{R}(m_i-1)-2m\right]\mp(r,\rho)+O(1)$$

$$=\int_{r_0}^{r}\left[\frac{2}{\pi}\int\frac{\left|\frac{dz}{dx}\right|^2\left|\frac{dx}{dt}\right|^2}{(1-|z|^2)^2}dw\right]\frac{dr}{r}$$

然ルニ

$$\sum(m_i-1)-2m=2p-2$$

$$\therefore\quad(2p-2)\mp(r,\rho)+O(1)=\int_{r_0}^{r}\frac{A(r)}{r}dr\quad\cdots\cdots(1)$$

但シ $$A(r)=\frac{2}{\pi}\int\frac{\left|\frac{dz}{dx}\right|^2\left|\frac{dx}{dt}\right|^2}{(1-|z|^2)^2}dw$$

今 Riemann 面 R_F が birational transformation ニヨリ R_G ニナッタモノトス。B_G ノ $(p,0)$ ノ automorphic function ヲ $z'(X,Y)$ トスレバ容易ニ $z=\frac{az'+b}{cz'+d}$ （但シコノ一次分数式ハ単位円ヲ自身ニ移スモノナリ）ナル関係アルコトヲ知ル。

故ニ $$\frac{|dz|}{1-|z|^2}=\frac{|dz'|}{1-|z'|^2}$$

故ニ $A(r)$ ハ birational transformation ニ対シ不変ナルコトヲ知ル。

又定理(II)ニヨリ $\mp(r,\rho)$ モ不変ナル故 birational transformation ニヨリ第一章ノ條件ヲ満足セシメ得ル故

定理Ⅲ　geschlecht $p \geqq 2$ ナルトキ

$$(2p-2)T(r,\infty) = \int^{r} \frac{A(r)}{dr} dr + O(1)$$

次ニ第一章ノ條件ヲ $F(x,y)=0$ ガ満足スルトキ

$$\frac{\left|\frac{dz}{dt}\right|^2 \left|\frac{dx}{dt}\right|^2}{1-|z|^2} \leqq \frac{R}{R^2-|t|^2}$$

コレヲ用ヒテ $t = re^{i\theta}$ トスレバ

$$A(r) \leqq \frac{2}{\pi}\int_0^r\int_0^{2\pi} \frac{R^2 r\,dr\,d\theta}{(R^2-r^2)^2} = \frac{2r^2}{R^2-r^2}$$

$$\int_{r_0}^{r} \frac{A(r)}{r} \leqq \int_0^r \frac{2r\,dr}{R^2-r^2} = \log\frac{R^2}{R^2-r^2} = \log\frac{1}{R-r} + O(1)$$

故ニ定理(Ⅲ)ヨリ

$$(2p-2)T(r,\infty) \leqq \log\frac{1}{R-r} + O(1)$$

birational transformation ヲ施シテ考ヘレバ

定理Ⅳ　$T(r,\infty) \leqq \frac{1}{2p-2}\log\frac{1}{R-r} + O(1)$

定理Ⅰ＝ヨリ

$$T(r,\infty) = \frac{1}{m}T(r,f) + O(1)$$

故ニ

$$T(r,f) \leqq \frac{m}{2p-2}\log\frac{1}{R-r} + O(1)$$

故ニ

定理Ⅴ　$x = f(t)$, $y = g(t)$ が $|x| < R$ デ有理型

函数 $F(x, y)=0$ ハ x ニツキ n 次，y ニツキ m 次ノ geschlecht p ($\geqq 2$) ナル代数曲線デ $F[f(t), g(t)] \equiv 0$ ナラバ

$$T(r, f) \leqq \frac{m}{2p-2} \log \frac{1}{R-r} + O(1)$$

$$T(r, g) \leqq \frac{n}{2p-2} \log \frac{1}{R-r} + O(1)$$

定理 VI. 上ノ假設ノモトニ

$$\overline{\lim} \frac{T(r, f)}{\log \frac{1}{R-r}} \leqq \frac{m}{2p-2}$$

系 1. $|t| \leqq R$ ニテノ有理型函数 $x = f(t)$, $y = g(t)$ ガ $f(x, y)=0$ ヲ uniformisation シテイルモノトス，モシ

$$\overline{\lim} \frac{T(r, f)}{\log \frac{1}{R-r}} = \infty$$

ナレバ

$f(x, y)=0$ ノ geschlecht ハ 0 又ハ 1 ナリ.

(注意) 系 1 ハ円内有理型函数ノトキノ picard ノ定理ニ相應シ，定理(III)ハ清水－ahlfors ノ定理ニ對應スルモノト思ハレマス。

上ノ結果ハ次章ノ第二基本定理カラモ得ラレマス。

尚ホ

系2. geschlecht ヒナルフックス函数ヲ $f(t)$ トスレバ

$$\overline{\lim}\frac{T(r,f)}{\log\frac{1}{R-r}}\leqq K \qquad (K\text{ハ finite})$$

但シ $p\geqq 2$

——— (續ク) ———

(西大 ニ三六八)