



Title	淡中先生ノHauptgeschlechtssatz im Minimalen ニツイテノーツノ注意
Author(s)	松島, 興三
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 252, p. 213-217
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75045
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1113. 淡中先生 / Hauptgeschlechtssatz im Minimalen = ツイテノーツノ注意

松島 興三 (名大)

淡中先生ハ談話 1046 = 於テ次ノ興味アル定理ヲ証明シテ居ラレマス。スナハチ、 $\mathbb{Q}$ 代数体 K ノ n 次、アーベル拡大 K/k , K ノ Exponent が n = ナルヤウナ因子群 (α, σ, τ) フトレバ、 K ノ $N_{K/k}(A) = 1$ ナル元 A ハ $k^{1-\lambda}$ ナル形ノ元ノイクツカト $\alpha, \sigma, \tau / \alpha, \tau, \sigma$ ナル形ノ元イクツカノ積トシテ表ハサレ、逆モ成立ツトイフノデアリマス。

中山先生ハコノ定理ヲ談話 1092 = 於テ、興ヘラレタ因子群ト同伴ナ因子群デ、 $\frac{\alpha, \tau}{\alpha, \sigma}$ ノ Norm が 1 = ナルヤウナモノヲイクツカトツテ来レバ一般ノガリョ拡大 = 於テモ、上ノ定理ガ成リ立ツコトヲ証明サレマシタ。

！ コノデハ、淡中先生ノ定理ヲツカヘバ、アーベル拡大ノ場合 = 於テ、Hilbert ノ定理ノ逆 = 相當スルコトガ簡單ニ証明サレルコトヲ注意シテイト思ヒマス。即チ

に $\mathbb{Q}$ - 代数体トシ、ソノアーベル拡大 K/k フトル。 K ノ $N_{K/k}(A) = 1$ ナル元 A ガ常ニ $k^{1-\lambda}$ ナル形ノ元ノミノ積トシテ、表ハサレルナラバ、 K/k ハ zyklisch = ナルトイフコトガ言ヘマス。

K/k がアーベル拡大と假定シテモ、中山先生ノ擴張ガレタ形ノ定理ヲツカッテ K/k が *zyklisch* = ナルコトガ言ヘルカドウカハ、マダ余ヲナイノデアリマスガ、御教示ヲ伺タイト存ジマス。

以下、上ノコトノ証明ヲノベマス。

K/k ヨリ次数ノ低イモノニツイテハ成リ立ツトシテ、
 K/k が *zyklisch* = ナルコトヲ言ヒマス、

K/k ノ次数ヲ n , ソノ Galois 群ヲ G トスル。

1) n が、少クとも二ツノ相異ナル素数デワレル場合、

簡単ノタメ $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2}$ トシ、 $G = G_1 \times G_2$, G_i Order $p_i^{a_i}$ ($i=1, 2$) トシ、 G_1 = 對應スル K ノ部分体ヲ K_1 , G_2 = 對應スルモノヲ K_2 トスル。 (a_{σ}, τ) ヲ K = 於ケル Exponent が n ノ因子トスルバ
Chevalley = ヨリ $N_{K/K_1} (a_{\sigma_1, \tau_1})$ ($\sigma_1, \tau_1 \in G_1$) が
 K_1 = 於ケル Exponent が $p_1^{a_1}$ ノ因子トナリ 假定
 = ヨリ、 $\frac{a_{\sigma_1, \tau_1}}{a_{\tau_1, \sigma_1}} \in b^{1-\lambda}$ ($\lambda \in G_1, b \in K$) ナル形ノ元ノ

積 = ナツテキルカラ

$$N_{K/K_1} \left(\frac{a_{\sigma_1, \tau_1}}{a_{\tau_1, \sigma_1}} \right) \in b^{1-\lambda_1} (b \in K, \lambda_1 \in G_1)$$

ナル元ノ積 = ナルカラ、淡中先生ノ定理ニヨリ、 K_1/k ツイテ、定理ノ假定ガ満サレルコトガワカリ、従ツテ

induction / 假定カラ、 K_1/k が zyklisch, 同様
 $= K_2/k \in \text{zyklisch} = +\text{v}.$ K_1/k ト K_2/k ノ次
 数カ互=素カカラ $K/k \in \text{zyklisch} = +\text{v}.$

2) $n = p^a + 1$ 場合.

$\sigma = \sigma_1 \times \sigma_2 \times \dots \times \sigma_s$; σ_i ハ zyklisch トス
 レバ、今ト全様ニシテ、 σ/σ_i ハ zyklisch = +ルコ
 ト可言ヘルカラ、 $s \leq 2$ テ+ケレバ+ラ+イ、今 $s=2$
 テアルトスル。

$$\sigma = \sigma_1 \times \sigma_2, \quad \sigma_i = (\sigma_i),$$

$$\sigma_i \text{ノ Order } p^{a_i} \quad (i=1, 2)$$

トスル。

$(a_{\sigma, \tau})$ ノ Exponent カルノ因子團トスレバ假

定ヨリ $\frac{a_{\sigma, \tau}}{a_{\tau, \sigma}} \text{ハ } b^{1-\lambda} \text{ト+ル形ノ元ノ積ニ+ルカ } b^{1-\sigma_1}$

$b^{1-\sigma_2} \text{ト+ル形ノ元ノ積ト考ヘテヨイコトハ明ラカデア}$

ル。今

$$\frac{a_{\sigma_1, \sigma_2}}{a_{\sigma_2, \sigma_1}} = \frac{C_{\sigma_1}}{C_{\sigma_1}^{\sigma_2}} \cdot \frac{C_{\sigma_2}^{\sigma_1}}{C_{\sigma_2}}$$

トカケテキルトスル。

因子團 $(a_{\sigma, \tau}) = \text{對應トル } (a_{\sigma, \tau}, K, \sigma)$ ノ

Transformer $\sigma \{U_\sigma\}$ トシ、 $U_\sigma, C_{\sigma_1}, U_{\sigma_2}, C_{\sigma_2}$
 ノ考ヘレバ、

$$U_{\sigma_1} C_{\sigma_1} \cdot U_{\sigma_2} C_{\sigma_2} = U_{\sigma_1 \sigma_2} a_{\sigma_1, \sigma_2} C_{\sigma_1}^{\sigma_2} C_{\sigma_2}$$

$$= u_{\sigma_2 \sigma_1} a_{\sigma_1, \sigma_2} c_{\sigma_1}^{\sigma_2} c_{\sigma_2}$$

$$= u_{\sigma_2} u_{\sigma_1} \frac{a_{\sigma_1, \sigma_2}}{a_{\sigma_2, \sigma_1}} \cdot c_{\sigma_1}^{\sigma_2} c_{\sigma_2}$$

$$= u_{\sigma_2} c_{\sigma_2} u_{\sigma_1} c_{\sigma_1} \frac{a_{\sigma_1, \sigma_2}}{a_{\sigma_2, \sigma_1}} \frac{c_{\sigma_1}^{\sigma_2}}{c_{\sigma_1}} \frac{c_{\sigma_2}}{c_{\sigma_2}^{\sigma_1}}$$

$$= u_{\sigma_2} c_{\sigma_2} \cdot u_{\sigma_1} c_{\sigma_1}$$

だから

$$v_{\sigma_1} = u_{\sigma_1} c_{\sigma_1}, \quad v_{\sigma_2} = u_{\sigma_2} c_{\sigma_2},$$

$$\sigma = \sigma_1^{\pi_1} \sigma_2^{\pi_2} \text{ , トキ, } v_{\sigma} = v_{\sigma_1}^{\pi_1} v_{\sigma_2}^{\pi_2} \text{ トオケル,}$$

Transformer $\{v\}$ = 対応スル因子群 $(b_{\sigma, \tau})$

、 $(a_{\sigma, \tau})$ ト同伴デ、

$$b_{\sigma, \tau} = b_{\tau, \sigma}$$

ナラ条件ヲミケル。

シカラバ、 $b_{\sigma, \tau} \in K$ デアル。何トナラバ

$$b_{p, \sigma \tau} b_{\sigma, \tau} = b_{p, \sigma, \tau} b_{p, \sigma}^{\tau}$$

$$b_{\tau, p \sigma} b_{p, \sigma} = b_{\tau, p, \sigma} b_{\tau, p}^{\sigma}$$

$$b_{p \tau, \sigma} b_{p, \tau}^{\sigma} = b_{p, \tau, \sigma} b_{\tau, \sigma}$$

ノ三ツヲカケ合セテ、上ノ条件ヲツケルハ、 $b_{p, \sigma} = b_{p, \sigma}^{\tau}$

カ出ルカラデアル。

シカラバ

$$(a_{\sigma, \tau}, K, \sigma) = (b_{\sigma, \tau}, K, \sigma)$$

$$= (\alpha_1, K_1, \sigma_1) \times (\alpha_2, K_2, \sigma_2)$$

(但し K_1 は σ_2 = 對應スル体、 K_2 は σ_1 = 對應スル体)

ト分解出來テ、コレハ $(\alpha_{\sigma, \tau})$, Exponent が $n +$
ルコト = 及スル。

故 = σ は *zyklisch* デキレバ + ラ + イ。