OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Invariante Masse I
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 252, p. 217-224
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75046
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

1114. Invariante Masse I

中野秀五郎.

$\mathfrak{R}$ ヲ regular bicompact topological space トシマス。(必ズシモ Hausdorff space デアル必要ハアリマセン). 今 $\mathfrak{R}$ ヲ $\mathfrak{R}$ ヘ移ス Homoomorphismus ノ群ヲ $\mathfrak{H}$ トシマス。($\mathfrak{H}$ ハ必ズシモ Homoomorphismus ノ全体デハナイ) 先ヅ次ノ二定理ヲ証明スルコトヽシマス

定理1. $\mathfrak{H}$ が abelian ナレバ, $\mathfrak{H}$ デ invariant ナ measure m が $\mathfrak{R}$ ノ中ニ存在シマス。($m\mathfrak{R}=1$)

定理2. $\mathfrak{R}$ ノ上ノ任意ノ連続函数 $f(x)$ ニ對シテ函数 $f(Tx)$ ガスベテノ $T\in\mathfrak{H}$ ニ對シテ gleichartig

stetig ナレバ、$\mathfrak{T}$ デ invariant ナ measure m ガ $\mathfrak{R}$ ノ中ニ存在シマス。($m\mathfrak{R}=1$)

此処デ gleichartig stetig トハ、任意ノ正数 ε ニ対シテ、任意ノ点 x_0 ノ近傍 U ヲ適当ニ定メレバ、総テノ $T\in\mathfrak{T}$ ニ対シテ $\underset{x\in U}{\mathrm{Schw}}\, f(Tx)<\varepsilon$ トナルコトデアリマス。

定理2ハ明カニ bicompact topological group ノ Haar measure ノ拡張デアリマス。

§1. 豫備定理

$\mathfrak{R}$ ノ上ノ連続函数全体ノ positive linear Funktional P デ $P(1)=1$ ナル P ノ全体ヲ $\mathfrak{P}$ トシマス。今 $\mathfrak{P}$ ニ次ノヤウナ topology ヲ入レマス。

定義1. $P_0\in\mathfrak{P}$ ノ近傍ヲ任意ノ有限個ノ連続函数 $f_1,\cdots\cdots,f_n$ 及正数 ε ニ対シ

$$|P(f_i)-P_0(f_i)|<\varepsilon \quad (i=1,\cdots\cdots,n)$$

ナル P ノ全体トシマス。但シ f_i ハ $\mathfrak{R}$ ノ上ノ $0\leqq f_i\leqq 1$ ナル連続函数トシマス。

豫備定理1. $\mathfrak{P}$ ハ bicompact Hausdorff space デアリマス。

証明. Tychonoff ノ方法デ次ノヤウニ簡単ニ証明デキマス。

$0\leqq f\leqq 1$ ナル $\mathfrak{R}$ ノ上ノ連続函数ノ全体ヲ $\mathfrak{f}$ トシ

マス。Interval I_f $(0 \leqq x \leqq 1)$ ノ direct produkt $\prod_{f \in F} I_f$ ヲ作ルト，コレハ bicompact Hausdorff space デ，$\mathfrak{P}$ ハ此レニ einbetten サレマス。

故ニ $\mathfrak{P}$ ガ $\prod I_f$ デ closed デアルコトヲ証明スレバヨイ。P_0 ヲ $\mathfrak{P}$ ノ limiting point トシマストPo ∈ ΠIf カラ Po(f) ガ定メラレ Po(f) ≧ 0 デアリマス。今 $f_1, f_2, f_3 \in \mathfrak{f}$ ニ対シテ $\alpha f_1 + \beta f_2 = f_3$ デアッタトシマスト，任意ノ正数ε ニ対シテ

$$|P(f_i) - P_0(f_i)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, 3)$$

トル P ∈ $\mathfrak{P}$ ガ存在シマス。然ル時ハ

$$P(f_3) = \alpha P(f_1) + \beta P(f_2)$$

デアリマスカラ

$$|P_0(f_3) - \{\alpha P_0(f_1) + \beta P_0(f_2)\}| < |\alpha|\varepsilon + |\beta|\varepsilon + \varepsilon$$

故ニ

$$P_0(f_3) = \alpha P_0(f_1) + \beta P_0(f_2)$$

従ッテ $P_0 \in \mathfrak{P}$ デアリマス。

§2. 定理1ノ証明

況ノ topological measure m ニ対シテ，$(m\mathfrak{P} = 1)$

$$P(f) = \int f\,dm \qquad (f \text{ ハ連続函数})$$

ニヨッテ positive linear Functional ($P(1)=1$) ガ得ラレ、又逆モ成立シマスカラ此処デハ此ノカハリニ P ヲ考ヘマス。(詳細ハ topologische Masse 数物記事)

$T\in\mathfrak{T}$ ニ対シテ $f(Tx)$ トシテ得ル連続函数ヲ f_T デ表ハシマス。又 $P(f_T)$ トシテ得ラレル f ノ positive linear Funktional ヲ TP デ表ハシマス。即チ

$$TP(f)=P(f_T)$$

デアリマス。

総ベテノ f ニ対シテ

$$P(f_T)=P(f)$$

即チ $TP=P$

ナル P ノ全体ヲ $\mathfrak{k}_T$ デ表ハスト、$\mathfrak{k}_T$ ハ $\mathfrak{k}$ デ closed デアリマス。

如何トナレバ、P_0 ヲ $\mathfrak{k}_T$ ノ limiting point トスレバ任意ノ f 及ビ正数 ε ニ対シ

$$|P(f)-P_0(f)|<\varepsilon,\quad |P(fT)-P_0(fT)|<\varepsilon$$

ナル $P\in\mathfrak{k}_T$ ガアリ、従ッテ

$$|P_0(f)-P_0(Tf)|<2\varepsilon$$

故ニ $P_0=TP_0$

今、$\mathfrak{T}$ ヲ abelian トシ、有限個ノ $T_1,\cdots,T_n\in\mathfrak{T}$ ニ対シテ

$$P_k = \left\{ \frac{1}{k^n} (1 + T_1 + \cdots\cdots + T_1^{k-1}) \right.$$

$$\left. \cdots\cdots (1 + T_n + \cdots\cdots + T_n^{k-1}) \right\} P$$

ト置クト、明カニ $P_k \in \mathfrak{y}$ $(k = 1, 2, \cdots\cdots)$ デアリマス。$\mathfrak{y}$ ガ bicompact デアカラ、P_k ノ limiting point P_0 ガアリマス。然ルトキハ任意ノ正数ε及ビ f ニ對シテ、$(0 \leqq f \leqq 1)$

$$|P_k(f) - P_0(f)| < \varepsilon, \quad |P_k(fT_i) - P_0(fT_i)| < \varepsilon$$
$$(i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

ナル k ガアリ、然カニ

$$|P_k(f) - P_k(fT_i)| \leqq \frac{2k^{n-1}}{k^n} = \frac{2}{k}$$

故ニ

$$|P_0(f) - P_0(fT_i)| < 2\varepsilon + \frac{2}{k}$$

從ツテ $P_0 = T_i P_0$ デアリマス。從ツテ

$$\mathfrak{y}_{T_1}\ \mathfrak{y}_{T_2} \cdots\cdots \mathfrak{y}_{T_n} \neq 0$$

故ニ $\bigcap_{T \in \mathcal{T}} \mathfrak{y}_T \neq 0$ デアリマス。然カニ $P \in \bigcap_{T \in \mathcal{T}} \mathfrak{y}_T$ ナル P ハ $\mathcal{T}$ デ invariant デアリマス。

§3. 定理2ノ証明

$P_0 \in \mathfrak{y}$ ニ對シテ、又

$$(\alpha_1 T_1 + \cdots\cdots + \alpha_n T_n) P_0 \in \mathfrak{y}$$

$$\alpha_1 + \cdots\cdots + \alpha_n = 1, \quad \alpha_i \geqq 0, \ T_i \in \mathfrak{T}$$

デアリマス。$(\alpha_1 T_1 + \cdots\cdots + \alpha_n T_n) P_0$ ノ全体ノ $\mathfrak{P}$ デ ノ closure テ $\mathfrak{P}_{P_0}$ トシマス。シカルトキハ $P \in \mathfrak{P}_{P_0}$ ニ對シ $\mathfrak{P}_P \subset \mathfrak{P}_{P_0}$ トルコトハ容易ニ知ラレマス。又 $P \in \mathfrak{P}_{P_0}$ ニ對シテナラレ定ニスレバ

$$\underset{T \in \mathfrak{T}}{Schw} P(fT) \leqq \underset{T \in \mathfrak{T}}{Schw} P_0(fT)$$

モ明カデアリマス。$\mathfrak{P}$ ガ bicompact デアルカラ $Q \in \mathfrak{P}_{P_0}$ デ

$$\underset{T \in \mathfrak{T}}{Schw} Q(fT) = \underset{P \in \mathfrak{P}_{P_0}}{\inf} \left\{ \underset{T \in \mathfrak{T}}{Schw} P(fT) \right\}$$

トルQガ存在シマス。然ルトキハ任意ノ $S \in \mathfrak{T}$ ニ對シテ又

$$\underset{T \in \mathfrak{T}}{Schw} Q(fT) = \underset{T \in \mathfrak{T}}{Schw} SQ(fT)$$

デナケレバナリマセン。然ルトキハ

$$Q(fT) = Q(f) \qquad (T \in \mathfrak{T})$$

トルコトガ次ノ如キ証明デキマス。

今 $T_1, T_2 \in \mathfrak{T}$ ニ對シ

$$d(fT_1, fT_2) = \underset{x \in \mathfrak{X}}{\sup} \left| f(T_1 x) - f(T_2 x) \right|$$

ト置ケバ

$$d(fT_1 S, fT_2 S) = d(fT_1, fT_2) \qquad (S \in \mathfrak{T})$$

デアリマス。

fT が gleichartig stetig デアリマスカラ，此ノ metric ニ対シテ total beschränkt デアリマス。即チ任意ノ正数 ε ニ対シ

$$d(fT_i, fT_j) \geqq \varepsilon \qquad (i \neq j)$$

ナル $T_1, \cdots\cdots, T_n$ ハ有限個ヨリ存在シナイ。今 $T_1, \cdots\cdots, T_n$ が最大数トシマス。若シ

$$\underset{T \in \mathfrak{T}}{\text{Schw}}\, Q(fT) > 3\varepsilon$$

トシマス。又 T_1 ヲ

$$Q(fT_1) > \underset{T \in \mathfrak{T}}{\text{Sup}}\, Q(fT) - \varepsilon$$

トナル様ニ出来マス。今

$$Q_1 = \frac{T_1 + \cdots\cdots + T_n}{n} Q$$

トオケバ，明カニ

$$\inf_T Q(fT) \leqq Q_1(fT) \leqq \sup_T Q(fT)$$

然ルニ $Q_1(fT) = Q_1\left(f \frac{T_1 + \cdots\cdots + T_n}{n} T\right)$

即チ

$$Q_1(fT) = \frac{1}{n}\{Q_1(fT_1 T) + \cdots\cdots + Q_1(fT_n T)\}$$

又

$$d(fT_1, fT_i T) < \varepsilon$$

ナルiガ存在シナケレバ ナラヌカラ

$$|Q_1(fT_1)\ Q(fT_2T)| \leqq d(fT_1, fT_2T) < \varepsilon$$

ヨリ

$$Q(fT_2T) > Q_1(fT_1) - \varepsilon > \sup_T Q(fT) - 2\varepsilon$$

故ニ

$$Q_1(fT) \geqq \inf_T Q(fT) + \frac{\varepsilon}{n}$$

従ッテ

$$\operatorname{Schw}_T Q_1(fT) < \operatorname{Schw}_T Q(fT)$$

トナッテ矛盾シマス。故ニ

$$Q(fT) = \hat{\zeta}(f)$$

デアリマス。

次ニ $P(fT) = P(f)$ ナルP ノ全体ヲ $\mathfrak{p}_f$ トシマスト

以上ヨリ $\bigcap_f \mathfrak{p}_f \neq 0$

ガ知ラレマス。故ニ $P \in \bigcap_f \mathfrak{p}_f$ ハ $\mathfrak{p}$ デ invariant デア

リマス。

—— 18. 3. 10 ——