



Title	Invariante Masse II
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 252, p. 225-230
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75047
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

III.5. Invariante Masse II

中野 秀五郎

§4. 単一性

定理 2 = 於て如何ナル場合 = Invariante Masse
 が unique = ナルカヲ考へて見ル。§3 / 証明ヨリ明
 カナキ $\alpha_i =$, 任意ノ $P =$ 對シ

$$(\alpha_1 T_1 + \dots + \alpha_n T_n) P$$

$$(T_i \in \mathcal{T}, \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1, \alpha_i \geq 0)$$

1 limiting point トシテ Invariante Functional P_0 が得ラレ、然カ $\in P_0$ / 任意ノ近傍間 =
 正数 $\varepsilon =$ 對シテ $0 \leq f \leq 1$ ノ夾ヘレバ

$$(1) \text{Schw}_{T \in \mathcal{T}} (\alpha_1 T_1 + \dots + \alpha_n T_n) P(fT) < \varepsilon$$

ナル $(\alpha_1 T_1 + \dots + \alpha_n T_n) P$ が存在スル。今 $\mathcal{R}$ 1
 一点 $x_0 =$ 對シテ

$$P(f) = f(x_0)$$

ナル P 7 トレバ, (1) ハ

$$(2) \text{Schw}_{T \in \mathcal{T}} \{ \alpha_1 f(T_1 T x_0) + \dots + \alpha_n f(T_n T x_0) \} < \varepsilon$$

トナル。故ニ $T x_0$ カスベテ $T =$ 對シテ $\mathcal{R}$ / 中ヲ dense
 = 動クナレバ (2) ヨリ

$$\alpha_1 f(T_1 x) + \dots + \alpha_n f(T_n x) < \varepsilon \quad (x \in \mathcal{R})$$

トナル。故ニ任意、 $f = \text{對シテ}$ ($0 \leq f \leq 1$)

$$P_0(f) + \varepsilon \leq \alpha_1 f(T_1 x) + \dots + \alpha_n f(T_n x) \\ \leq P_0(f) + \varepsilon$$

トモ $\alpha_1 T_1 + \dots + \alpha_n T_n$ が存在スル。今 Q ヲ他、
invariant functional トスレバ、此式カラ

$$P_0(f) + \varepsilon \leq Q(f) \leq P_0(f) + \varepsilon$$

従ヒテ $Q(f) = P_0(f)$ トナル。故ニ次ノ定理が成立
ス。

定理3 $\mathcal{R}$ ヲ *bicompact*, $\mathcal{Y}$ ヲ *transformation*
group トスス。若シモ

- 1) $\{f(Tx)\}, (T \in \mathcal{Y})$ が *gleichartig stetig*
- 2) $\{Tx_0\} (T \in \mathcal{Y})$ が $\mathcal{R}$ 内 *dense* ナル様ナ
 $x_0 \in \mathcal{R}$ が存在スレバ $\mathcal{Y}$ = 関シテ *invariant*
measure が唯一ツ存在スル。

此ノ定理ニ於ケル條件1)ハ次ノ *topological*
ノ條件ヲ置換ヘラレルコトヲ注意シマス。

1') $x_1, x_2 \in \mathcal{R}$ ($x_1 \neq x_2$ 場合ニ含ム), $U(x_1)$
ヲ任意ノ x_1 ノ近傍トシタトキ, x_1, x_2 ノ近傍 V_1, V_2
ヲ適當ニ定メレバ, スベテノ $T \in \mathcal{Y}$ ニ對シテ

$$V_1(TV_2) \neq \emptyset \quad \text{ナラバ} \quad TV_2 \subset V_1$$

トナル。

*Invariant measure*ノ *uniqueness*ハ

Ergodentheorie = 重要 + 関係がアリマス。

例へバ, P_0 が unique + レバ スベテ $x \in \mathcal{R}$
= 對シテ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x) + f(Tx) + \dots + f(T^{n-1}x)}{n} = P_0(f).$$

トアリマス。コレ= 就テハ後= 書リコトトシマス。

§5. 殆週期函数

Heurmann / almost periodic Funktion / Mean / 存在ヲ定理2カラ 証明シタセウ。

此処デハ almost periodic Funktionヲ
幾分拡張シテ 定義シマス。即チ

$\mathcal{R}$ ヲ topological space, $\mathcal{T}$ ヲ $\mathcal{R}$ ノ 変
換群, $\mathcal{R}$ ノ 連続函数 $f(x)$ デ $\{f(Tx)\}$ ($T \in \mathcal{T}$)
ガ uniform metric

$$d(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|$$

= 関シテ total beschränkt / 特 $f(x)$ ヲ $\mathcal{T}$ = 関
スル 殆週期 函数ト 定義シマス。

然ルトキハ §3ノ 証明ヨリ明カナリ = 總テノ 殆週期
函数 f = 對シテ

$$M(fT) = M(f), \quad M(1) = 1$$

ナル positive linear functional M ガ
存在スル。

然かも定理3/2)ヲ満足シテキレバ *unique* ナ
 マス。

定理2デ $\mathcal{R}$ *bicompact* ナシテアルノハ P_0 ヨ
 リ *measure* ヲ誘出スルノト定理3/1)カヲ
 $\{f(Tx)\}$ ガ *total beschränkt* ナルコトヲ証
 明スルノ一ツケ必要ナリデ、其ノ他ハ全々 *topology*
 ガ不要ナリマス。然シ *topology* ヲ入レテ考ヘタカ
 オ尚一層一般ナリマス。又 $\mathcal{R}$ ハ *bicompact*
 ナクドモ、拡大シテ *bicompact* = シテ考ヘテモヨ
 イコトデスカラ、其氣カヲ見レバ *bicompact* 1場合ガ
 一般ニモ知レマセン。

§6 locally bicompact 1 場合

定理1及ビ2ニ於テモ §5ニ述ベタルヤリ = $\mathcal{R}$ ガ
bicompact ト云フコトハ本質的デハアリマセン。然
 シヨ1場合デモ得ラレル *invariant measure*
 ハ何時モ $m(\mathcal{R}) = 1$ デアリマス。此処デハ $m(\mathcal{R}) =$
 $+\infty$ ノ場合ヲ考ヘテ見マセウ。其ノタメニハ豫備定理1
 ヲ少シ拡大シナケレバナリマセン。

$\mathcal{M}$ ヲ *semi-ordered linear space*
 トシマス。今 $\mathcal{M}$ ノ *Functional* P デ次ノ如キモ1
 ヲ考ヘマス。

$$0 \leq P(a) \leq \infty \quad (a \geq 0) \quad P(0) = 0$$

$$P(\alpha a + \beta b) = \alpha P(a) + \beta P(b) \quad (\alpha, \beta \geq 0)$$

此ノ如キ P 、全体ヲ $\mathcal{P}$ トシマス。 P_0 、近傍ヲ

$$|P(a_i) - P_0(a_i)| < \varepsilon \quad (P_0(a_i) < +\infty + \varepsilon)$$

$$P(a_i) > \frac{1}{\varepsilon} \quad (P_0(a_i) = +\infty + \varepsilon)$$

$$a_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ナル P トシマス。 然ルトキハ

豫備定理 2. $\mathcal{R}$ は bicompact Hausdorff space デアリマス。

次 = locally bicompact space $\mathcal{R}$ 、
上ノ measure m = ツイテノ注意ヲ述ベマセウ。

f ヲ $\mathcal{R}$ 、上デ連続ニシテ $E[\alpha: |f(x)| > 0]$
ノ closure が bicompact ナ函数 f 、全体トシ
マス。 然ルトキハ

豫備定理 3. f 、positive linear Functional P ト $\mathcal{R}$ 、上ノ measure m ト一対一
ニ

$$P(f) = \int_{\mathcal{R}} f dm$$

ナルヤウニ對應セシメラレル。

§ 2 ノ証明カラ直チニ $\mathcal{R}$ 、定理ガ得ラレマス。

定理 4. $\mathcal{R}$ が locally bicompact ナル
場合。

次ノ如キ P 及ビ $e \in f (e > 0)$ が存在スルベ

即チ

$$(*) \quad 0 < \alpha < \frac{P(eT)}{P(e)} < \beta \quad (T \in \mathcal{T})$$

ナルベ、 $\mathcal{T}$ が abelian ノ時ハ、常ニ

$$P_0(e) = 1, \quad P_0(fT) = P_0(f)$$

ナル P_0 が存在スル。

(*) ハ *topological* = 次ノ條件ヲ置換ヘルコトが出来る。

(**) $\mathcal{R}$ ノ上ニ点集合 S ト open set U が存在
シテ、 $\bar{U}$ ハ *bicompact* 且ツ $TU (T \in \mathcal{T})$ ト S
トハ必ず共通点ガアッテ其ノ個數ハ有限デアール。

又 §3 ヨリ定理 2 ノ拡張トシテ

定理 5. (*) ヲ満足スル P, e が存在シ、且ツ

$P(fT)$ が T ノ函数トシ左側殆ど期函数ナルトキハ

$P_0(e) = 1, P_0(fT) = P_0(f)$ ナル P_0 が存在スル。