1119. *Locally Compact abelian group の normed ring ニ就イテ*

小平　邦彦（東京文理大）

角谷　静夫（阪　大）

G ヲ *locally compact abelian group* トシ

G ノ Haar measure ニ関シテ G ノ上デ square integrable ナ G ノ上デ定義サレタ complex valued measurable functions 全体ノ作ル Hilbert space ヲ $L^2(G)$ ニテ表ハス。G 上ノ translation $g \to g-a$ ハ $L^2(G)$ ノ unitary transformation U_a ヲ induce スル。$L^2(G)$ ノ bounded linear transformation B ノ全体 $\mathfrak{B}$ ハ

$$(1) \quad \|B\| = \sup_{\|x\| \leqq 1} \|B(x)\|$$

ナル norm ニ関シテ（commutative デハナイ）normed ring ヲ作ルが、ソノ中デ特ニ U_a ナル形ノ unitary transformation ノ finite complex linear combination ニヨッテ (1) ノ norm ニ関シテ一様近似サレ得ルヤウナ bounded linear transformation B ノ全体 R ハソレ自身デ一ツノ commutative ナ normed ring ヲ作ッテキル。即チ R ハ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ

$$(2) \quad \left\| B - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_{a_i} \right\| < \varepsilon$$

トナル如キ $a_i \in G$ ト complex numbers α_i $(i=1, \cdots\cdots, n)$ が存在スル如キ $B \in \mathfrak{B}$ 全体ノ作ル normed ring デアル。

此ノ normed ring R ノ maximal ideal ノ一般ノ形ヲ決メヨウト云フノが本談話ノ目的デアル。先ヅ M

ヲ R ノ任意ノ maximal ideal トスレバ $R\to R/M$ = the ring of complex numbers ナル homomorphism ヲ與ヘルカラ、コノ homomorphism ヲ φ_M ニテ表ハセバ $a\to U_a\to\varphi_M(U_a)\equiv\chi_M(a)$ ハ group G ノ complex number $\chi_M(a)$ ニヨル representation ヲ與ヘル。シカモ $|\chi_M(a)|=|\varphi(U_a)|\leqq\|U_a\|=1$, $|(\chi_M(a))^{-1}|=|\chi_M(a^{-1})|\leqq 1$ デアルカラ $|\chi_M(a)|=1$ トナリ、シタガッテ $\chi_M(a)$ ハ G ノ上デ定義サレタ character デアル。シカシ $\chi_M(a)$ ガ G 上デ連續デアルカドウカト云フコトハ分ラナイ。

次ニ逆ニ任意ノ G ノ character (必ズシモ連續デナイ) ヲ與ヘルト コレニ對シテ normed ring R ノ maximal ideal M ガ決ッテ $\chi(a)=\chi_M(a)$ トナルコトヲ証明シヨウ。コノタメニハ normed ring R ヲ "concrete" ニ represent スルコトヲ考ヘル。

先ヅ G ノ pontjaguin ノ意味ノ character group ヲ G^* ニテ表ハス。G^* ハ Pontrjaguin ノ topology ニ関シテ locally compact デアルカラ、G^* ノ Haar measure ヲ使ッテ G^* 上ノ Hilbert space $L^2(G^*)$ ヲ作ルコトガ出来ル。シカモ G^* ノ上ノ Haar measure ヲ適當ニ normieren シテ置ケバ Plancherel ノ定理ガ成立スル。即チ任意ノ $x(g)\in L^2(G)$ ニ對シテ

(3) $x^*(g^*) = \int_G x(g)(g, g^*)\,dg, \quad x^* = P(x)$

ト置ケバ（但シ積分ハ *limit in mean* ノ意味ニトル）
$x^*(g^*) \in L^2(G^*)$ デアッテシカモ

(4) $\int_{G^*} |x^*(g^*)|^2 dg^* = \int_G |x(g)|^2 dg$

（即チ $\|x^*\| = \|x\|$）ヲ得ル．更ニ任意ノ $x^*(g^*)$
$\in L^2(G^*)$ ニ對シテ

(5) $x(g) = \int_{G^*} x^*(g^*)\,\overline{(g, g^*)}\,dg^*, \quad x = Q(x^*)$

ト置ケバ（但シ積分ハ *limit in mean* ノ意味ニトル）

$x(g) \in L^2$ デアリ、シカモ (4) ガ成立スル．最後ニ
P ト Q トハ互ニ *inverse operator* デ $PQ = 1, QP = 1$
ガ成立スル。今 $L^2(G)$ ノ *bounded linear operator*
A ニ *correspond* スル $L^2(G^*)$ ノ *bounded linear operator* ヲ A^* トスレバ（即チ $A^* = PAQ$），明カニ

(6) $\|A^*\| = \|A\|$

デアリ、シカモ $A = U_a$ ナルトキ A^* ハ

(7) $x^*(g^*) \to (a, g^*)\,x^*(g^*)$

ナル *operator* 即チ (a, g^t) ナル函數ヲ掛ケル
operator デアル。シタガッテ $A = \sum_{i=1}^n \alpha_i U_{a_i}$ ナル

A ニ對シテハ A^* ハ

$$(8)\quad x^*(g^*) \longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (a_i, g^*)\right) x^*(g^*)$$

ナル operator デアル. ヨッテ

$$(9)\quad \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_{a_i}\right\|$$
$$= \left\|\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_{a_i}\right)^*\right\|$$
$$= \sup_{g^* \in G^*} \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (a_i, g^*)\right|$$

即チ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_{a_i}$ ナル operator ノ norm ハ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (a_i, g^*)$ ナル G^* ノ上デ定義サレタ almost periodic function ノ G^* 上ノ sup. ト一致スル. 然ルニ $b^*(g^*)$ ヲ G^* ノ上デ定義サレタ任意ノ complex valued almost periodic function (Bohr ノ意味ノ) トスルトキ, 任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ

$$(10)\quad \sup_{g^* \in G^*} \left| b^*(g^*) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (a_i, g^*)\right| < \varepsilon$$

ナル如キ character (g, g^*) ノ finite linear combination $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (a_i, g^*)$ ガ存在スルカラ, 結局

$\boxed{\text{定理 1}}$ normed ring R ハ G^* 上デ定義サレタスベテノ complex valued almost periodic function ノ作ル normed ring AP(G^*) ト isomorph 且ツ isometric デアル。

但シ AP(G^*) ニ於テハ ring product ハ普通ノ意味ノ函数ノ掛ケ算デアリ（即チ $b_1^* b_2^*(g^*) = b_1^*(g^*) b_2^*(g^*)$）又 norm ハ

$$(11) \quad \|b^*\| = \sup_{g^* \in G^*} |b^*(g^*)|$$

ニヨッテ與ヘラレル。

良ク知ラレタ如ク任意ノ topological group G ニ對シテ、若シモ G 上ニ sufficiently many almost periodic functions ガ存在スレバ（即チ任意ノ $g_1, g_2 \in G$, $g_1 \neq g_2$, ニ對シテ $b(g_1) \neq b(g_2)$ ナル G 上デ定義サレタ continuous almost periodic function $b(g)$ ガ存在スルナラバ）、G ヲ dense ナ subgroup ニ含ム如キ compact Group $\overline{G}$ ガ存在シテ G 上デ定義サレタ任意ノ continuous almost periodic function $b(g)$ ハ $\overline{G}$ デノ continuous function $\overline{b}(\overline{g})$ ニ拡張出来ル。$\overline{G}$ ノコトヲ G ノ compactified group ト呼ブ。

逆ニ $\overline{G}$ 上デ定義サレタ任意ノ continuous function $\overline{b}(\overline{g})$ ハ明カニ $\overline{G}$ デ almost periodic デアリ、シタガッテソノ G 上ノ部分 $b(g)$ ハ G 上ニテ almost periodic ニナル。此ノ如クシテ結局 G 上

デ定義サレタスベテノ complex valued almost periodic function ノ作ル normed ring $AP(G)$ ハ $\overline{G}$ 上デ定義サレタスベテノ complex valued continuous functions ノ作ル normed ring $C(\overline{G})$ (但シ $C(\overline{G})$ ニ於ケル ring product 及ビ norm ハ $AP(\overline{G})$ ノトキト同ジヤウニ定義スル。實ハ $\overline{G}$ ガ compact デアルカラ $AP(\overline{G})$ ト $C(\overline{G})$ トハ同ジモノデアル)ト isomorphic 且ツ isometric デアル。

然ルニ $C(\overline{G})$ ノ maximal ideal ト $\overline{G}$ ノ點トノ間ニ one-to-one correspondence ノアルコトハ良ク知ラレタ事實デアルカラ G ノ代リニ G^* ヲ取ッテ考ヘレバ (G^* ハ locally compact abelian デアルカラ sufficiently many almost periodic function ガ存在スル)

$\boxed{\text{定理 2}}$ Normed ring R ハ G ノ character group G^* ノ compactified group $\overline{G^*}$ 上デ定義サレタスベテノ complex valued continuous functions ノ作ル normed ring ト isomorph 且ツ isometric デアリ、シタガッテ R ノ maximal ideal M ト $\overline{G^*}$ ノ點 $\overline{g}^*$ トノ間ニ one-to-one correspondence ガ成立スル。シカモ R ノ maximal ideals M ノ作ル space $\mathfrak{M}$ ハ (weak topology

ヲツケレバ $\overline{G}^*$ ト homeomorph デアル。

更ニ進ンデ今度ハ $\overline{G}^*$ ノ点 $\overline{g}^*$ ト、G ノ continuous トハ限ラナイ任意ノ character トノ間ニ one-to-one correspondence ガアルコトヲ示サウ。コノタメ先ヅ G^* ヲ compactify シテ $\overline{G}^*$ ヲ得ル方法ヲ思ヒ出シテ見ル。G^* ヲ compactify シテ $\overline{G}^*$ ヲ得ルニハ先ヅ G^* 上ニ

$$(14)\quad V_\alpha(g_0^*) = \{ g^* \mid |b_i^*(g^*) - b_i^*(g_0^*)| < \varepsilon,\ i = 1, \cdots\cdots, n \},$$

$$\alpha = \{ b_1^*, \cdots\cdots, b_n^*;\ \varepsilon \},$$

$$b_i^* \in AP(G^*),\quad i = 1, \cdots\cdots, n$$

ナル形ノ近傍系 $\mathfrak{V}_\alpha = \{ V_\alpha(g_0^*) \mid, g_0^* \in G^* \}$ ニヨッテ uniform topology ヲ導入シ、コノ uniform topology ニ関シテ G^* ヲ compactify スレバヨカッタノデアッタ。然ルニ任意ノ $b^*(g^*) \in G^*$ 及ビ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ対シテ (10) ヲ満足スル如キ character (a, g^*) ノ finite linear combination $\sum_{i=1}^n \lambda_i (a, g^*)$ ガ存在スルカラ，結局

$$(15)\quad W_\beta(g_0^*) = \{ g^* \mid |(a_i, g^*) - (a_i, g_0^*)| < \varepsilon,\ i = 1, \cdots\cdots, n \},$$

$$\beta = \{ a_1, \cdots\cdots, a_n;\ \varepsilon \},\quad a_i \in G,\quad i = 1, \cdots\cdots, n$$

ナル如キ近傍系 $\mathcal{W}_\beta=\{W_\beta(g_0^*)\mid g_0^*\in G^*\}$ ニヨル uniform topology ヲ考ヘテモ同ジコトデアル。

次ニGトデ定義サレタ必ズシモ連續デナイ character ノ全体ヲ G^{**} トスル。G^{**} ハGヲ discrete group 考ヘタトキノGノ character group デアル。

G^{**} ト $\overline{G}^*$ (G^* ノ compactified group) トガ實ハ同ジモノデアルコトヲ示サウ。コノタメニ G^{**} ノ topology ヲ考ヘル。コレハ明カニ

$$(14)\quad W_\beta(g_0^{**})=\{g^{**}\mid |(a_i,g^{**})-(a_i,g_0^{**})|<\varepsilon,\ i=1,\cdots\cdots,n\}$$

$$\beta=\{a_1,\cdots\cdots,a_n;\varepsilon\},\ a_i\in G,\ i=1,\cdots\cdots,n$$

ナル近傍系ニヨッテ與ヘラレル。コレト(13)トヲ比較スレバ G^* ヲ compactify シテ $\overline{G}^*$ ヲ得ルトキノ G^* ノ uniform topology ハ G^* ヲ G^{**} ノ subgroup ト考ヘタトキニ G^{**} ノ topology ニヨッテ G^* ノ上ニ induce サレル relative topology ト equivalent デアルコトガ分ル。

ヨッテ結局 $\overline{G}^*$ ハ G^{**} ノ中デノ G^* ノ closure ニ過ギナイコトヲ知ル。ヨッテ又 $\overline{G}^*$ ハ G^{**} ノ closed subgroup デアル。

次ニ $\overline{G}^*=G^{**}$ ナルコトヲ示スタメニ $\overline{G}^*$ ガ G^{**} ノ proper subgroup デアルトセヨ。然ルトキハ $\overline{G}^*$ ノ

上ニテ identically 1 デアッテ G^{**} ノ上デハ identically 1 デナイヤウナ G^{**} ノ continuous character ガ存在スル筈デアル。然ルニ G^{**} ノ continuous character モ G^* ノ continuous character モ共ニ G ノ element ニヨッテ與ヘラレテキルカラ此ノ様ナコトハ起リ得ナイ。

ヨッテ結局

$\boxed{\text{定理3}}$ G ノ charcter group G^* ノ compactified group $\overline{G}^*$ ハ G ヲ discrete group ト考ヘタトキノ G ノ character group G^{**} ト同ジモノデアル。

ヲ得ル。更ニ定理2ト定理3トヲ組合ハセレバ次ノ定理ヲ得ル。

$\boxed{\text{定理4}}$ normed ring R ノ maximal ideal M ト G ノ必ズシモ continuous デハナイ character $\chi(a)$ トノ間ニ one-to-one correspondence ガ次ノ様ニツク:

R ノ任意ノ maximal ideal M ニ對シテ $R \to R/M$ ナル homomorphism ヲ φ_M トスレバ $a \to \varphi_M(U_a) = \chi_M(a)$ ハ group G ノ必ズシモ continuous デハナイ character デアリ、逆ニ任意ノ G ノ必ズシモ continuous デハナイ character $\chi(a)$ ニ對シテ $\chi_M(a) = \chi(a)$ トナル如キ R ノ maximal ideal M ガ存在スル。

コレデ最初ニ述ベタ結局ガ証明サレタワケデアル。更ニ上ノ証明ニヨッテ同時ニ次ノコトモ示サレタワケデアル：

$\boxed{\text{定理5}}$ G ノ任意ノ必ズシモ continuous デナイ character $\chi(a)$ ト，任意ノ $a_1, \cdots\cdots, a_n \in G$ 及ビ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ G ノ continuous character $\chi'(a)$ ガ存在シテ

$$(15) \quad |\chi(a_i) - \chi'(a_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, \cdots\cdots, n$$

トナル。

此ノ定理ハ simultaneous approximation ニ關スル Kronecker-Weyl ノ定理ノ拡張ト見ルコトガ出来ル。

尚　上ノ証明ヨリワカル如ク $A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_{a_i}$ ナル形ノ bounded linear operator A ノ norm $|||A|||$ ハ locally compact ナ group G ノ algebraic ナ性質（即チ $a_1, \cdots\cdots, a_n$ 間ノ algebraic relation）及ビ $\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_n$ ノミニ depend スルモノデアッテ、G ヲ locally compact ニスル如キ topology ノ入レ方ニハ無関係デアル。依ッテ例ヘバ G ヲ discrete ト考ヘタトキノ A ノ norm ヲ考ヘレバヨイノデアル。