



Title	半順序集合ノ直積ニツイテ
Author(s)	横山, 金作
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 253, p. 267-275
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75054
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1122. 半順序集合 / 直積 = ツイテ

横山 金作 (阪大學生)

Birkhoff の半順序集合 / 直積分解 / 一意性ヲ最小元及び最大元ノ両方ノ存在ヲ假定シテ証明シテキマスガ、(Lattice Theory Chap. II. § 30) 片方ヲケリ存在ヲ充分ノ様デス。以下之ヲ証明シマス。推論ヲ明確ニスルタメニ、direct join 及び direct meet ノ概念ヲ導入シテミマシタガ、之等ハ Birkhoff = 依ッテ定義サレテキル直積ト等値ノ概念デアツテ、アル場合ニハ便利デアリカト思ヒマス。以下ノ所論ハ末ノ場合ニハモット簡明ニナリマスガ、コノデハ一般ノ半順序集合 = ツイテ論ズルコトニシマス。

本稿ハセミナリーノ材料ニ推論ヲ加ヘタモノデアリマスガ、ソノ成立ニ當リマシテ特ニ角谷静夫先生ニハ原稿ノ閱讀ソノ他多大ノ御指導ヲ蒙リマシタ。度ニテ拝謝ノ辞ヲ申シ述べマス。

§ 1. 定義 1. X_1, X_2, \dots, X_n 互ニ與ヘラレタ半順序集合トスル。 $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ 十ル n 個ノ元ノ組合セ $[x_1, \dots, x_n]$ ノスベテカラナル集合ヲ P トスル。 $P =$ 於テ = ツノ元ノ間ノ關係 $[x_1, \dots, x_n] = [x'_1, \dots, x'_n]$ 及び $[x_1, \dots, x_n] \geq [x'_1, \dots, x'_n]$ ヲ夫ニ $x_i = x'_i, i = 1, \dots, n$ 及び $x_i \geq x'_i, i = 1, \dots,$

----, $m_i =$ 依テ定義スレバ, P, Δ, \cup 順序 = 関シテ半順序集合トナル. \cup 半順序集合 P ヲ n 個, 半順序集合 X_1, \dots, \dots, X_n 直積ト云ヒ, \cup レヲ $P = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ テ表ハス. $x_i \in [x_1, \dots, x_n]$ 成分ト云フ.

(A) X_1, \dots, X_n ヲ半順序集合 P ノ部分集合トスル. 任意ノ組合セ $[x_1, \dots, x_n]$ ($x_i \in X_i, i=1, \dots, n$) = 對シテ $x_1 \cup \dots \cup x_n$ が存在スルトキ, 7ヲエル $x_1 \cup \dots \cup x_n$ ノ集合ヲ $X_1 \cup \dots \cup X_n$ テ表ス. \cup ノ dual 7 $X_1 \cap \dots \cap X_n$ テ表ス.

定義 2. 半順序集合 P ノ部分集合 $X_1, \dots, X_n =$ 對シ

$$(1) P = X_1 \cup \dots \cup X_n$$

$$(2) x_1 \cup \dots \cup x_n \geq x'_1 \cup \dots \cup x'_n + \tau \Leftrightarrow$$

$$x_i \geq x'_i, i=1, \dots, n$$

が成立スルトキ, $P \wedge X_1, \dots, X_n$ direct join = 分解サレルト云ヒ, $P = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n$, 或ハ

$P = \bigoplus_{i=1}^n X_i$ テ表ハス, direct join, dual 7 direct

meet ト云ヒ, $P = X_1 \otimes \dots \otimes X_n = \bigotimes_{i=1}^n X_i$ テ表ハス.

(B) $P = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n$ ナルトキ, $x_1 \cup \dots \cup x_n = x'_1 \cup \dots \cup x'_n$ ($x_i, x'_i \in X_i$) ナル $x = \wedge x_i = \wedge x'_i, i=1, \dots, n$ ナルコトが必要 = シテ充分ナ

アル。即ち P の各元 X_i 成分ハ一意ニキマル。 $dual \exists$ 成立。

(C) $P = X_1 \cup \dots \cup X_n$ トキ, $X'_i \ni X_i =$ 同型ノ任意ノ半順序集合トシ ($i = 1, \dots, n$), X'_1, \dots, X'_n ノ直積ヲ $P' = X'_1 \times \dots \times X'_n$ トスレバ, $P' \wedge P =$ 同型デアアル。 $P = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n =$ ツイテモ同様。

念ノタメ同型ノ定義ヲ述ベル。半順序集合 P ヲ半順序集合 $P' =$ 寫ス一対一ヲ両單調ト変換ガ存在スルトキ, $P' \wedge P =$ 同型 (順序同型) デアルトイフ。

(D) 直積 $P = X_1 \times \dots \times X_n =$ 於テ, 各因子 X_i ハ夫々最小元 0_i ヲ有スルトスル $[0_1, \dots, 0_{i-1}, x_i, 0_{i+1}, \dots, 0_n]$ ナル P ノ元ノスベテノ集合ヲ X'_i トスレバ, $X'_i \wedge X_i =$ 同型デア X'_1, \dots, X'_n $direct\ join$ = 分解サレル。即チ $P = X'_1 \cup X'_2 \cup \dots \cup X'_n$

(D') 直積 $P = X_1 \times \dots \times X_n =$ 於テ, 各因子 X_i ハ夫々最大元 e_i ヲ有スルトスル。 $[e_1, \dots, e_{i-1}, x_i, e_{i+1}, \dots, e_n]$ ナル P ノ元ノスベテノ集合ヲ X'_i トスレバ, $X'_i \wedge X_i =$ 同型デア X'_1, \dots, X'_n $direct\ meet$ = 分解サレル。即チ $P = X'_1 \cap X'_2 \cap \dots \cap X'_n$ 。

(C), (D) (D') = ヨリ同型ノ半順序集合ヲ同一視スルナラバ, 最小元 (最大元) ノ存在ノ下ニ $direct\ join$ ($direct\ meet$) ト直積トハ等値ノ概念デアアルコトガ分ル。

§2. (A) direct join = 関シ次ノコトが成立スル。

(i) $P = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ + ルトキハ因子ノ順序ヲ全ク勝手ニカヘテ $P = X_{k_1} \cup X_{k_2} \cup \dots \cup X_{k_n}$ トスルコトが出来ル。

(ii) $X_1 \cup (X_2 \cup X_3)$ が意味ヲモツテラバ $X_1 \cup X_2 \cup X_3$ ㉔意味ヲモツテラバハ一致スル。 $(X_1 \cup X_2) \cup X_3$ が意味ヲモツテラバ、 $X_1 \cup X_2 \cup X_3$ ㉔意味ヲモツテラバハ一致スル。 $(X_1 \cup X_2) \cup X_3$ 及ビ $X_1 \cup (X_2 \cup X_3)$ が共ニ意味ヲモツテラバ両者ハ一致スル。

老婆心ナカラ、 $x_1 \cup x_2 \cup x_3$ ㉔存在カラ $x_1 \cup x_2$ ㉔存在ハ一般ニ出テコトイ。

(B) $P = X_1 \cup \dots \cup X_n$ + ルトキ、 P ㉔有限個ノ元 x, y, \dots, w ㉔成分ヲ表シ

$$x = x_1 \cup \dots \cup x_n$$

$$y = y_1 \cup \dots \cup y_n$$

$$w = w_1 \cup \dots \cup w_n$$

トスル。

(i) 若シ $x_i \cup y_i \cup \dots \cup w_i$ ($i = 1, \dots, n$) ㉔存在シテ夫レ $x_i \cup y_i \cup \dots \cup w_i \in X_i$ ($i = 1, \dots, n$) ㉔トシテ $x \cup y \cup \dots \cup w$ ㉔存在シ、 $\forall i$ ㉔成分ハ $x_i \cup y_i \cup \dots \cup w_i$ ㉔テ P ㉔。

$$\cup x_n = 0 \quad \therefore x_i = 0$$

(ii) $x_i \in X_i, y \subseteq x_i$ とする。 y の成分 = 3 個表現
 $\exists y = y_1 \cup y_2 \cup \dots \cup y_n, y_i \in X_i$ とする。 $y \subseteq x_i$
 \exists 成分 \neq 表すと $y_1 \cup y_2 \cup \dots \cup y_n \subseteq 0 \cup 0 \cup \dots \cup 0$
 $\cup x_i \cup 0 \cup \dots \cup 0$

$$\therefore j \neq i \text{ ならば } y_j = 0 \quad \therefore y = y_i \in X_i$$

(iii) $x \cap y \cap \dots \cap w = p$ とおき $p = p_1 \cup p_2 \cup \dots$
 $\cup p_n, p_i \in X_i$ とする。 $p_i \subseteq x_i, y_i, \dots, w_i$. \exists
 $q_i \subseteq x_i, y_i, \dots, w_i$ とし任意に $q_i \in P$ とする。 $x_i \in X_i$
 \exists するから (ii) = $\exists \parallel q_i \in X_i$. 故 $= q_1 \cup \dots \cup q_n = q$
 \exists 存在する。 $q \subseteq x, y, \dots, w \quad \therefore q \subseteq p \quad \therefore q_i \subseteq p_i$

$$\therefore p_i = x_i \cap y_i \cap \dots \cap w_i$$

(iv) $i = 1$ として一般性を失わずに

$$x = x \cup 0 \cup \dots \cup 0$$

$$y = y \cup 0 \cup \dots \cup 0$$

.....

$$w = w \cup 0 \cup \dots \cup 0$$

よって x, y, \dots, w の成分 = 3 個表現 \exists する。

$x \cup y \cup \dots \cup w = p$, 成分 = 3 個表現 $\exists p = p_1 \cup p_2$
 $\cup \dots \cup p_n$ とする。 $x = x \cap p = x \cap p$ ((c) (iii))

$$\therefore x \subseteq p_1 \quad \text{同様にして } y \subseteq p_1, \dots, w \subseteq p_1$$

$$\therefore p \subseteq p_1 \quad \therefore p = p_1 \in X_1$$

(D) $P \cong X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n$ とする X_i と X_j と

共通集合 ($i \neq j$) の高々一つノ元ヲ含ム。特ニ、 P が 0
ヲ有スルトキハ $X_i \supset X_j$ ト、共通集合ハ 0 ナルカラナ
ル。

(E) $P = X_1 \cup \dots \cup X_n$ デ且テ P ハ 最小元 0 ヲ含
ムトスル。

(i) X_1, \dots, X_n ノ中カラ任意ニトツタ m ($\leq n$)
個 (但シ重複ヲ許サナイ) $X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_m}$ = 對シ
 $X_{k_1} \cup \dots \cup X_{k_m}$ ハ意味ヲエツ。

(ii) 集合 $\{1, \dots, n\}$ ノ任意ノ分割ヲ d_1, d_2, \dots
 \dots, d_k トシ $\bigcup_{i \in d_1} X_i = A_1, \dots, \bigcup_{i \in d_k} X_i = A_k$ トオクト
 $P = A_1 \cup \dots \cup A_k$

証明. X_1, \dots, X_n ノ中カラトツタ m 個ヲ $X_1, X_2,$
 \dots, X_m トシテモ一般性ヲ失ハナイ。 $x_1 \in X_1, \dots,$
 $x_m \in X_m$ = 對シ, $x_1 \cup \dots \cup x_m \cup 0 \cup \dots \cup 0$ ハ
存在スル。然ツテ $x_1 \cup \dots \cup x_m$ モ存在シ両者ハ一致ス
ル。 x_1, \dots, x_m ハ夫々 X_1, \dots, X_m ノ任意ノ元デア
ルヲ $X_1 \cup \dots \cup X_m$ ハ意味ヲエツ。 $x_1 \cup \dots \cup x_m \geq$
 $y_1 \cup \dots \cup y_m$ + ラバ $x_1 \cup \dots \cup x_m \cup 0 \cup \dots \cup 0 \geq$
 $y_1 \cup \dots \cup y_m \cup 0 \cup \dots \cup 0$

然テ $x_1 \geq y_1, \dots, x_m \geq y_m$ 故ニ $x_1 \cup \dots \cup x_m$
 $= X_1 \cup \dots \cup X_m$

(iii) (E) (i) 及ビ (B) (i) カラ明カデア
ル。

(F) 任意ノ分解ニ於テ, 唯一つノ元カラ成ル因子ヲ平

是十因子ト云ヒ、一ツノ因子ヲ除キ他ノ因子ガ悉ク平凡ナルトキ平凡十分解トイフ。平凡十ラザル分解ヲ有セズ而モ平凡十ラザル因子ヲ素因子ト云フ。

(G) P ガ0ヲ有スル十ラズ *direct join* = ヨル分解 = 於テ平凡十因子ハ0ノミカラナリ、平凡十因子ハ除クコトが出来ル。

証明。前半ハ明カ。後半ニツイテ $P = X_1 \cup \dots \cup X_n$ トシ、 X_1, \dots, X_n ノ中カラ平凡十因子ヲ除イタモ、 X_{k_1}, \dots, X_{k_m} トスル。 $X_{k_1} \cup \dots \cup X_{k_m}$ ハ意味ヲモツ ((E) (i)) 而シテ $P = X_{k_1} \cup \dots \cup X_{k_m}$ ナルコトハ明カデアラウ。

定理。最小元0ヲ有スル半順序集合ヲ P トスル。 P ガ素因子ノミカラナル *direct join* = 分解ナレバ、カナル分解ハ一意ニキマル。平凡十因子ヲ含マズ任意ノ分解ハコノ分解ニ於テ因子ヲ適當ニ組ニ分ケ括弧ニ括ルコトニヨツテ得ラレル。 ((E) (ii) 参照)

証明 (1°) P ノ *direct join* = ヨル二通りノ分解ヲ

$$P = X_1 \cup \dots \cup X_n \quad (1)$$

$$P = Y_1 \cup \dots \cup Y_m \quad (2)$$

トスル。 X_i ト Y_j トノ共通集合ヲ $Z_{i,j}$ トオクト

$$X_i = Z_{i,1} \cup \dots \cup Z_{i,m} \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

$$Y_j = Z_{1,j} \cup \dots \cup Z_{n,j} \quad j = 1, \dots, m \quad (4)$$

が成立スル。(4)ヲ証明セテ。 Y_j ノ任意ノ元ヲ y トシテ

(1) = \exists ル表現ヲ $y = x_1 \cup \dots \cup x_n$, $x_i \in X_i$ トスル。

$$x_i \subseteq y, y \in Y_j \quad \therefore x_i \in Y_j \quad ((c)(ii))$$

$$\text{従テ } x_i \in Z_{i,j} \quad \therefore Y_j \subset Z_{1,j} \cup Z_{2,j} \cup \dots \cup Z_{n,j}$$

逆 = $x_i \in Z_{i,j}$, $i = 1, \dots, n$ トスルト $x_i \in Y_j$,

$i = 1, \dots, n$ ヲ $x_1 \cup \dots \cup x_n$ ガ存在スル。 故テ

$$x_1 \cup \dots \cup x_n \in Y_j \quad ((c)(iv))$$

$$\text{故テ } Y_j = Z_{1,j} \cup Z_{2,j} \cup \dots \cup Z_{n,j}$$

$$= Z_{1,j} \oplus Z_{2,j} \oplus \dots \oplus Z_{n,j}$$

(3)ヲ (1) = $\lambda \cup$

$$P = \bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{j=1}^m Z_{i,j} = \bigoplus_{i,j} Z_{i,j} \quad (5)$$

(2°) 今 (1) = (2)ニ共ニ素因子ノミヨリナル direct joinトスル。(3)ニ於テ X_i ガ素因子ナルコトカテ

$\{Z_{i,1}, \dots, Z_{i,m}\}$ ハ全体トシテ $\{X_i, *, *, \dots, \dots, \pi\}$ ト一致スル。 茲ニ $*$ ハ 0ノミカ

(紙面都合上 以下次号)