OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	半順序集合ノ直積ニツイテ（續キ）
Author(s)	横山, 金作
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 254, p. 276-283
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75055
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

半順序集合ノ直積ニツイテ（續キ）

横山　金作（阪大）

ラナル平凡ナ因子ヲ表ス。故ニ $\{Z_{i,j} \mid i=1,\cdots\cdots,n;\ j=1,\cdots\cdots,m\}$ ハ全体トシテ $\{X_1,\cdots\cdots,X_n,*,*,\cdots\cdots,*\}$ ト一致スル。仝様ニシテ $\{Z_{ij}\}$ ハ全体トシテ $\{Y_1,\cdots\cdots,Y_m,*,*,\cdots\cdots,*\}$ ト一致スル。故ニ $\{X_1,\cdots\cdots,X_n\}$ ト $\{Y_1,\cdots\cdots,Y_m\}$ トハ全体トシテ一致スル。

（3°）(1) ヲ素因子ノミカラ分解，(2) ヲ平凡ナ因子ヲ含マヌ任意ノ分解トスル。前証ニヨリ $\{Z_{ij}\}$ ハ全体トシテ $\{X_1,\cdots\cdots,X_n,*,\cdots\cdots,*\}$ ト一致スル。(4) ニ於テ $Z_{i,j}$ ノ中平凡ナ因子ヲ除クト (4) ハ

$$Y_1 = X_{1,1} \textcircled{\cup} \cdots\cdots \textcircled{\cup} X_{1,k_1}$$
$$Y_2 = X_{2,1} \textcircled{\cup} \qquad \textcircled{\cup} X_{2,k_2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Y_m = X_{m,1} \textcircled{\cup} \cdots\cdots \textcircled{\cup} X_{m,k_m}$$

ナル形ニナリ $\{X_{1,1},\cdots\cdots,X_{1,k_1};\ X_{2,1},\cdots\cdots,X_{2,k_2},\cdots\cdots;\ X_{m,1},\cdots\cdots,X_{m,k_m}\}$ ハ $\{X_1,\cdots\cdots,X_n\}$ ト順序ノミヲ異ニスル。

§3. P ガ $\overset{\text{最小元}}{\wedge}$ O 及 $\overset{\text{最大元}}{\wedge}$ e ヲ有スル場合

(A) P が 0 及び e ヲ有スルトキ $P = X_1 \cup \cdots\cdots \cup X_n$ ナラバ $X_i = P \wedge a_i = \{x \mid 0 \leq x \leq a_i\}$ $i = 1, \cdots\cdots, n$ ナル n 個ノ元 $a_1, \cdots\cdots, a_n$ ガ存在シ，P ノ任意ノ元 x ノ X_i 成分ハ $x \wedge a_i$ デアル．即チ，任意ノ direct join ニヨル分解ハ $P = (P \wedge a_1) \cup (P \wedge a_2) \cup \cdots\cdots \cup (P \wedge a_n)$ ナル形ニ書キ表ハサレ，P ノ任意ノ元 x ニ対シ，

$$x = (x \wedge a_1) \cup (x \wedge a_2) \cup \cdots\cdots \cup (x \wedge a_n)$$

ガ成立スル。

証明． e ノ成分ニヨル表現ヲ

$$e = a_1 \cup a_2 \cup \cdots\cdots \cup a_n \qquad a_i \in X_i$$

トスル．P ノ任意ノ元ヲ x，x ノ成分ニヨル表現ヲ $x = x_1 \cup \cdots\cdots \cup x_n$ トスル．$x \leq e$ ヨリ $x_i \leq a_i$ $i = 1, \cdots\cdots, n$ 又レハ x_i ヲ X_i ノ任意ノ元トシテモ成立．a_i ノ成分ニヨル表現ハ $a_i = 0 \cup \cdots\cdots \cup 0 \cup a_i \cup 0 \cup \cdots\cdots \cup 0$ §2 (B) (iii) ニヨリ $x \wedge a_i = 0 \cup \cdots\cdots \cup 0 \cup x_i \cup 0 \cup \cdots\cdots \cup 0 = x_i$ 即チ，P ノ任意ノ元 x ニ対シ $x \wedge a_i$ ガ存在シ，x ノ X_i 成分ヲ表ス。従ッテ $P \wedge a_i \subset X_i$．逆ニ $x \in X_i$ トスレバ $x \leq a_i$ 従ッテ $x = x \wedge a_i$

$\therefore$ $P \wedge a_i \supset X_i$ 故ニ $X_i = P \wedge a_i$

(B) 0 及ビ e ヲ有スル半順序集合 P ガ direct join ニヨル分解ヲ $P = (P \wedge a_1) \cup (P \wedge a_2) \cup \cdots\cdots \cup (P \wedge a_n)$ トスル．$\{i_1, \cdots\cdots, i_p\}$ ト $\{j_1, \cdots\cdots, j_q\}$ トガ互ニ素ナシバ

$$(a_{i_1} \cup a_{i_2} \cup \cdots \cup a_{i_p}) \cap (a_{j_1} \cup a_{j_2} \cup \cdots \cup a_{j_q}) = 0$$

証明. $a_{i_1} \cup \cdots \cup a_{i_p}$ 及び $a_{j_1} \cup \cdots \cup a_{j_q}$ ヲ成分ニヨッテ書キ表ハシ，各成分毎ニ meet ヲトレバヨイ。

(C) (A)ト同ジ假定ノ下ニ，Pノ任意ノ部分半順序集合Qニ対シ，$(Q \wedge a_1) \vee \cdots \vee (Q \wedge a_n)$ ハ意味ヲモツ．特ニ $Q = \{x \mid 0 \leqq x \leqq q\}$ トラバ $Q = (Q \wedge a_1) \vee \cdots \vee (Q \wedge a_n)$．從ッテ $Q = P \wedge b$ トラバ $Q = (P \wedge c_1) \vee \cdots \vee (P \wedge c_n)$ $c_i = b \wedge a_i$, $i = 1, \cdots, n$

(D) (A)ト同ジ假定ノ下ニ

$$(P \wedge a_1) \vee \cdots \vee (P \wedge a_i) = P \wedge (a_1 \cup \cdots \cup a_i)$$

証明. 左辺ノ存在ハ §2 (E) (i) ニヨリ明カ。右辺ノ存在ハアトノ性質ノ元xノ成分ニヨル表現ヲ $x = x_1 \cup \cdots \cup x_n$ トスルトキ，§2 (B) (ii) ニヨリ $x \wedge (a_1 \cup \cdots \cup a_i) = x_1 \cup \cdots \cup x_i$ トナルコトヨリ明カデアル。尚ソノ等式ノ成立スルコトハ容易ニ確メラレル。

(E) 0及ビeヲ有スル半順序集合Pノ direct join ニヨル二通リノ分解ヲ

$$P = (P \wedge a_1) \vee \cdots \vee (P \wedge a_n)$$

$$P = (P \wedge b_1) \vee \cdots \vee (P \wedge b_m)$$

トスル．$a_i \wedge b_j = c_{i,j}$ トスルト

$$P = \bigvee_{i,j} (P \wedge c_{i,j})$$

証明. §2 定理ノ証明 ((1), (2) → (5)) カラ明カ。

(F) P ヲ o. e トスル。

$$P = (P \cap a_1) \textcircled{$\cup$} (P \cap a_2) \textcircled{$\cup$} \cdots\cdots \textcircled{$\cup$} (P \cap a_n)$$

ナルトキ $a_1 \cup \cdots\cdots \cup a_{i-1} \cup a_{i+1} \cup \cdots\cdots \cup a_n = b_i$.

$i = 1, \cdots\cdots, n$ トオクト

$$P = (P \cup b_1) \textcircled{$\cap$} (P \cup b_2) \textcircled{$\cap$} \cdots\cdots \textcircled{$\cap$} (P \cup b_n)$$

且ツ, $P \cup b_1, \cdots\cdots, P \cup b_n$ ハ夫々 $P \cap a_1, \cdots\cdots, P \cap a_n$ ニ同型デアル。

証明. P ノ任意ノ元ヲ x トシ

$$x = x_1 \cup x_2 \cup \cdots\cdots \cup x_n \qquad x_i \in P \cap a_i$$

トスル。b_1 ヲ成分デ表ハセバ

$$b_1 = a \cup a_2 \cup \cdots\cdots \cup a_n$$

$$\therefore \quad x \cup b_1 = x_1 \cup a_2 \cup \cdots\cdots \cup a_n = x_1 \cup b_1$$
$$= (x \cap a_1) \cup b_1$$

公様ニシテ $x \cup b_i = (x \cap a_i) \cup b_i \qquad i = 1, \cdots\cdots, n$

之レハ P ノ任意ノ元 x ニ對シテ成立ツ。依テ

$$P \cup b_i \subset (P \cap a_i) \cup b_i$$

然ルニ $P \cup b_i \supset (P \cap a_i) \cup b_i$

故ニ $P \cup b_i = (P \cap a_i) \cup b_i$

$P \cup b_i$ ノ任意ノ元ヲ $x^i \cup b_i$ トスル。$i = 1, \cdots\cdots, n$

各 $x^i \cup b_i = (x^i \cap a_i) \cup b_i$ ヲ成分デ表スト

$$x^1 \cup b_1 = (x^1 \cap a_1) \cup a_2 \cup a_3 \cup \cdots\cdots \cup a_n$$

$$x^2 \cup b_2 = a_1 \cup (x^2 \cap a_2) \cup a_3 \cup \cdots\cdots \cup a_n$$

$$x^n \cup b_n = a_1 \vee a_2 \vee \cdots\cdots \vee (x^n \wedge a_n)$$

$$\therefore \quad (x^1 \vee b_1) \cap (x^2 \vee b_2) \wedge \cdots\cdots \wedge (x^n \vee b_n)$$

$$= (x^1 \wedge a_1) \vee (x^2 \wedge a_2) \vee \cdots\cdots \vee (x^n \wedge a_n)$$

即チ $P \cup b_i$ ノ任意ノ元 $x^i \vee b_i$ $(i = 1, \cdots\cdots, n)$ ニ對シ

$\bigwedge_{i=1}^{n} (x^i \vee b_i)$ ガ存在シ $\bigcup_{i=1}^{n} (x^i \wedge a_i)$ ニ等シイ。P ノ任意ノ

元 x ニトスルト

$$x = (x \wedge a_1) \vee \cdots\cdots \vee (x \wedge a_n)$$

$$= (x \vee b_1) \wedge (x \vee b_2) \wedge \cdots\cdots \wedge (x \vee b_n)$$

故ニ $P = (P \vee b_1) \cap (P \vee b_2) \wedge \cdots\cdots \cap (P \vee b_n)$

今 $\bigwedge_{i=1}^{n} (x^i \vee b_i) \geqq \bigwedge_{i=1}^{n} (y^i \vee b_i)$ トスルト

$$\bigcup_{i=1}^{n} (x^i \wedge a_i) \geqq \bigcup_{i=1}^{n} (y^i \wedge a_i)$$

$$\therefore \quad x^i \wedge a_i \geqq y^i \wedge a_i$$

從ツテ $(x^i \wedge a_i) \vee b_i \geqq (y^i \wedge a_i) \vee b_i$

$$\therefore \quad x^i \vee b_i \geqq y^i \vee b_i$$

故ニ $P = (P \vee b_1) \textcircled{\cap} (P \vee b_n) \textcircled{\cap} \cdots\cdots \textcircled{\cap} (P \vee b_n)$

最後ニ $P \wedge a_i$ ノ元 $x \wedge a_i = P \vee b_i$ ノ元 $x \vee b_i$ ヲ對應サセルコトニヨリ $P \vee b_i$ ガ $P \wedge a_i$ ニ同型ナモノトガ分ル。

(G) 以上主トシテ direct join ニツイテ述ベタガ

コレラノ dual ハ direct meet ニツイテモ亦成立スル。

(H) P ヲ $0, e$ トスル。

$P=(P\wedge a)\textcircled{u}(P\wedge b) \rightleftarrows P=(P\vee a)\textcircled{n}(P\vee b)$

(K) 0 及ビ e ヲ有スル半順序集合ノ素因子ヘノ分解ニ於ケル因子ノ個数ハ direct join ノ場合モ direct meet ノ場合モ一致スル。

§4. コノ§ニ於テハ P ヲ 0 及ビ e ヲ有スル半順序集合トスル。

(A) P ノ direct join ニヨル分解ニ於テーツノ因子ノ最大ノ元トナリウル元ノ全ベテノ集合ヲ C_1 トスルト

(i) $a\in C_1$ ナルタメニハ $P=(P\wedge a)\textcircled{u}(P\wedge b)$ ナル $b\in C_1$ ガ存在スルコトガ必要ニシテ且ツ充分デアル。(§2(E)(ii), §3(D))

(ii) $a, b\in C_1$ ナラバ $a\wedge b\in C_1$ (§3(E))

(iii) P ガ素因子ノミカラナル direct join ニ分解サレルナラバ, P ノ有限部分集合 $A=\{0, a_1, \cdots\cdots, a_n\}$ ガ存在シ, C_1 ハ A ノ部分集合ノ join 全体ト一致スル。(§2. 定理(E); §3(D))

(B) P ノ direct meet ニヨル分解ニ於テーツノ因子ノ最小ノ元トナリウル元ノ集合ヲ C_2 トスルト

(i) $a \in C_2$ ナルタメニハ $P = (P \cup a) \textcircled{\cap} (P \cup b)$ ナル $b \in C_2$ ガ存在スルコトガ必要ニシテ且ツ充分デアル。

(ii) $a, b \in C_2$ ナラバ $a \cup b \in C_2$

(iii) P ガ素因子ノミカラナル direct meet ニ分解サレルナラバ，P ノ有限部分集合 $B = \{e, b_1, \cdots\cdots, b_n\}$ ガ存在シ，C_2 ハ B ノ部分集合ノ meet 全体ト一致スル。

(C) $C_1 = C_2$ (§3 (H))

コノ一致スル集合ヲ P ノ Center ト呼ブ．Center C ハ lattice ヲ作ル．($a, b \in C$ ナラバ P ニ於テ $a \cup b$, $a \cap b$ ガ存在シ C ニ属スル)

(D) P ノ Center C ハ P ノ自己同型置換ニヨッテモ，逆ノ自己同型置換ニヨッテモ不変デアル。

証明．逆ノ自己同型置換ニツイテ証明スル。$a \in C$ トスルト $P = (P \cap a) \textcircled{\cup} (P \cap b)$ ナル b ガ存在スル。

容易ニ分ル様ニ $P = (P \cup f(a)) \textcircled{\cap} (P \cup f(b))$

$\therefore \quad f(a) \in C$

(E) P ノ Center C ノ各元ハ一ツ而シテ唯一ツノ補元ヲモチ，ソノ補元ハマタハリ C ニ属スル。

証明．$a \in C$ トスルト $P = (P \cap a) \textcircled{\cup} (P \cap b)$ ナル b ガ存在シ $a \cup b = e$, $a \cap b = 0$ 即チ，a ハ補元 b ヲモツ．a ノ任意ノ補元ヲ x, ソノ成分ヲ x_1, x_2 トスレ

ゆえ $x = x_1 \cup x_2$, $a = a \cup 0$ より

$$a \cup x = a \cup x_2 = a \cup b \qquad \therefore \quad x_2 = b$$

また $a \cap x = x_1 \cup 0 = 0 \cup 0 \qquad \therefore \quad x_1 = 0$

$\therefore \quad x = x_1 \cup x_2 = b$

—— (以 上) ——