



Title	半順序集合ノ直積ニツイテ（續キ）
Author(s)	横山, 金作
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 254, p. 276-283
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75055
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

半順序集合，直積 = ツイテ (續キ)

横山 金作 (阪大)

ラナル平凡 + 因子ヲ表ス。故ニ $\{Z_{i,j} / i=1, \dots, n, j=1, \dots, m\}$ ハ全体トシテ $\{X_1, \dots, X_n, *, *, \dots, *\}$ ト一致スル。今様ニシテ $\{Z_{i,j}\}$ ハ全体トシテ $\{Y_1, \dots, Y_m, *, *, \dots, *\}$ ト一致スル。故ニ $\{X_1, \dots, X_n\}$ ト $\{Y_1, \dots, Y_m\}$ トハ全体トシテ一致スル。

(3°) (1)ヲ素因子ノミカラ分解, (2)ヲ平凡 + 因子ヲ含マヌ要素ノ分解トスル。前証ニヨリ $\{Z_{i,j}\}$ ハ全体トシテ $\{X_1, \dots, X_n, *, \dots, *\}$ ト一致スル。(4)ニ於テ $Z_{i,j}$ ノ中平凡 + 因子ヲ除クト (4)ハ

$$Y_1 = X_{1,1} \textcircled{1} \dots \textcircled{1} X_{1,l_1}$$

$$Y_2 = X_{2,1} \textcircled{1} \dots \textcircled{1} X_{2,l_2}$$

$$Y_m = X_{m,1} \textcircled{1} \dots \textcircled{1} X_{m,l_m}$$

ナル形ニナリ $\{X_{1,1}, \dots, X_{1,l_1}; X_{2,1}, \dots, X_{2,l_2}, \dots; X_{m,1}, \dots, X_{m,l_m}\}$ ハ $\{X_1, \dots, X_n\}$ ト順序ノミヲ異ニスル。

§3. P が $\wedge 0$ 及 $\wedge e$ ヲ有スル場合

(A) P が 0 及び e を有するトキ $P = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ とならば $X_i = P \wedge a_i = \{x \mid 0 \leq x \leq a_i\}$ $i=1, \dots, n$ となる n 個の元 $a_1, \dots, a_n$ が存在し、 P の任意の元 x は X_i 成分の $x \wedge a_i$ で表れる。即ち、任意の direct join = ヨル分解の $P = (P \wedge a_1) \oplus (P \wedge a_2) \oplus \cdots \oplus (P \wedge a_n)$ となる形 = 書き表はされ、 P の任意の元 x = 對し、

$$x = (x \wedge a_1) \vee (x \wedge a_2) \vee \cdots \vee (x \wedge a_n)$$

が成立する。

証明. e の成分 = ヨル表現ヲ

$$e = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n \quad a_i \in X_i$$

とする。 P の任意の元 x の成分 = ヨル表現ヲ $x = x_1 \vee \cdots \vee x_n$ とする。 $e \geq x$ 故に $a_i \geq x_i$ $i=1, \dots, n$ 之れは x_i が X_i の任意の元トシテ成立。 a_i の成分 = ヨル表現ハ $a_i = 0 \vee \cdots \vee 0 \vee a_i \vee 0 \vee \cdots \vee 0$

§ 2 (B) (iii) = ヨリ $x \wedge a_i = 0 \vee \cdots \vee 0 \vee x_i \vee 0 \vee \cdots \vee 0 = x_i$ 即ち、 P の任意の元 x = 對し $x \wedge a_i$ が存在し、 x の X_i 成分ヲ表す。従って $P \wedge a_i \subset X_i$ 。
 逆 = $x \in X_i$ とスレバ $x \leq a_i$ 従って $x = x \wedge a_i$

$$\therefore P \wedge a_i \supset X_i \quad \text{故に} \quad X_i = P \wedge a_i$$

(B) 0 及び e を有する半順序集合 P : direct join = ヨル分解ヲ $P = (P \wedge a_1) \oplus (P \wedge a_2) \oplus \cdots \oplus (P \wedge a_n)$ とする。 $\{i_1, \dots, i_p\}$ と $\{j_1, \dots, j_q\}$ とが互 = 素トシバ

$$(a_{i_1} \vee a_{i_2} \vee \dots \vee a_{i_p}) \wedge (a_{j_1} \vee a_{j_2} \vee \dots \vee a_{j_q}) = 0$$

証明. $a_{i_1} \vee \dots \vee a_{i_p}$ 及び $a_{j_1} \vee \dots \vee a_{j_q}$
 の成分 = コツヲ書キ表ハシ, 各成分毎 = meet ヲト
 レヨイ。

(C) (A) ト同ジ假定, 下 =, P / 任意 / 部分半順序
 集合 $Q =$ 対 $\vee$, $(Q \wedge a_1) \odot \dots \odot (Q \wedge a_n)$ の意味ヲモ
 ヅ. 特ニ $Q = \{x \mid 0 \leq x \leq f\}$ ナラバ $Q = (Q \wedge a_1) \odot \dots$
 $\dots \odot (Q \wedge a_n)$. 従ッテ $Q = P \wedge b$ ナラバ $Q = (P \wedge c_1)$
 $\odot \dots \odot (P \wedge c_n)$ $c_i = b \wedge a_i, i = 1, \dots, n$

(D) (A) ト同ジ假定, 下 =

$$(P \wedge a_1) \odot \dots \odot (P \wedge a_i) = P \cdot (a_1 \vee \dots \vee a_i)$$

証明. 左辺 / 存在ハ § 2 (E) (i) = ヨリ明カ. 右辺 /
 存在ハ P / 任意 / 元 x / 成分 = コル表現ヲ $x = x_1 \vee \dots$
 $\dots \vee x_n$ トスルトナリ, § 2 (B) (ii) = ヨリ $x \wedge (a_1 \vee \dots$
 $\dots \vee a_i) = x_1 \vee \dots \vee x_i$ ナルコトヨリ明カナラベ。而
 シテ等式 / 成立スルコトハ容易ニ確メラレル。

(E) 0 及び e / 有スル半順序集合 P / direct
 join = コル = 通り / 分解ヲ

$$P = (P \wedge a_1) \odot \dots \odot (P \wedge a_n)$$

$$P = (P \wedge b_1) \odot \dots \odot (P \wedge b_m)$$

トスル. $a_i \wedge b_j = c_{i,j}$ トスルト

$$P = \bigodot_{i,j} (P \wedge c_{i,j})$$

証明. §2 定理ノ証明 (1), (2) $\rightarrow$ (5) カラ明カ.

(F) $P \neq 0, 1$ トスル.

$$P = (P \wedge a_1) \vee (P \wedge a_2) \vee \cdots \vee (P \wedge a_n)$$

ナルトキ $a_1 \vee \cdots \vee a_{i-1} \vee a_{i+1} \vee \cdots \vee a_n = b_i,$

$i = 1, \dots, n$ トオクト

$$P = (P \vee b_1) \wedge (P \vee b_2) \wedge \cdots \wedge (P \vee b_n)$$

且ツ, $P \vee b_1, \dots, P \vee b_n$ ノ夫々 $P \wedge a_1, \dots, P \wedge a_n =$
同型デアル.

証明. P ノ任意ノ元ヲ x トシ

$$x = x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n \quad x_i \in P \wedge a_i$$

トスル. b_i ヲ成分ヲ表ハセバ

$$b_i = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n$$

$$\begin{aligned} \therefore x \vee b_i &= x_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n = x_1 \vee b_i \\ &= (x \wedge a_1) \vee b_i \end{aligned}$$

$$\Delta \text{ 様ニシテ } x \vee b_i = (x \wedge a_i) \vee b_i \quad i = 1, \dots, n$$

之レハ P ノ任意ノ元 x ニ對シテ成立ス. 依テ

$$P \vee b_i \subset (P \wedge a_i) \vee b_i$$

$$\text{然レ } P \vee b_i \supset (P \wedge a_i) \vee b_i$$

$$\text{故ニ } P \vee b_i = (P \wedge a_i) \vee b_i$$

$P \vee b_i$ ノ任意ノ元ヲ $x^i \vee b_i$ トスル. $i = 1, \dots, n$

各 $x^i \vee b_i = (x^i \wedge a_i) \vee b_i$ ヲ成分ヲ表スト

$$x^1 \vee b_1 = (x^1 \wedge a_1) \vee a_2 \vee a_3 \vee \cdots \vee a_n$$

$$x^2 \vee b_2 = a_1 \vee (x^2 \wedge a_2) \vee a_3 \vee \cdots \vee a_n$$

$$x^n \cup b_n = a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup (x^n \cap a_n)$$

$$\begin{aligned} \therefore (x^1 \cup b_1) \cap (x^2 \cup b_2) \cap \dots \cap (x^n \cup b_n) \\ = (x^1 \cap a_1) \cup (x^2 \cap a_2) \cup \dots \cup (x^n \cap a_n) \end{aligned}$$

即ち $P \cup b_i$ / 任意 / 元 $x^i \cup b_i$ ($i = 1, \dots, n$) 一致シ

$\bigcap_{i=1}^n (x^i \cup b_i)$ が存在シ $\bigcup_{i=1}^n (x^i \cap a_i) =$ 等シイ。 P / 任意 /

元 x ト スル

$$\begin{aligned} x &= (x \cap a_1) \cup \dots \cup (x \cap a_n) \\ &= (x \cup b_1) \cap (x \cup b_2) \cap \dots \cap (x \cup b_n) \end{aligned}$$

$$\text{故} = P = (P \cup b_1) \cap (P \cup b_2) \cap \dots \cap (P \cup b_n)$$

$$\text{今 } \bigcap_{i=1}^n (x^i \cup b_i) \geq \bigcap_{i=1}^n (y^i \cup b_i) \text{ ト スル}$$

$$\bigcup_{i=1}^n (x^i \cap a_i) \geq \bigcup_{i=1}^n (y^i \cap a_i)$$

$$\therefore x^i \cap a_i \geq y^i \cap a_i$$

$$\text{従} \Rightarrow (x^i \cap a_i) \cup b_i \geq (y^i \cap a_i) \cup b_i$$

$$\therefore x^i \cup b_i \geq y^i \cup b_i$$

$$\text{故} = P = (P \cup b_1) \circledast (P \cup b_2) \circledast \dots \circledast (P \cup b_n)$$

最後 $= P \cap a_i$ / 元 $x \cap a_i = P \cup b_i$ / 元 $x \cup b_i$

ヲ 対応 セル ヲ $\exists$ $P \cup b_i$ が $P \cap a_i =$ 同型 $\neq$ /
ト が 合ル。

(G) 以上主トシテ direct join = ヲ イテ 述べタ

コレヲ $dual \wedge direct meet$ = ツイテスツテ成立スル。

(H) $P \neq 0, e$ トスル。

$$P = (P \wedge a) \oplus (P \wedge b) \iff P = (P \vee a) \odot (P \vee b)$$

(K) 0 スル e ヲ有スル半順序集合ノ素因子ヘノ分解ニ於ケル因子ノ個數ハ $direct join$ ノ場合ニ $direct meet$ ノ場合ニ一致スル。

§ 4. コノ § 一ニ於テハ P ハ 0 スル e ヲ有スル半順序集合トスル。

(A) P ノ $direct join$ = ヨル分解ニ於テ一ツノ因子ノ最大ノ元トナリケル元ノスツヲノ集合ヲ C_1 トスルト

(i) $a \in C_1$ ナルタメニハ $P = (P \wedge a) \oplus (P \wedge b)$ ナル $b \in C_1$ ガ存在スルコトガ必要ニシテ且ツ充分デアイル。(§ 2 (E) (ii), § 3 (D))

(ii) $a, b \in C_1$ ナラバ $a \wedge b \in C_1$ (§ 3 (E))

(iii) P ガ素因子ノミカラナル $direct join$ = 分解サレルナラバ, P ノ有限部分集合 $A = \{0, a_1, \dots, a_n\}$ ガ存在シ, C_1 ハ A ノ部分集合ノ $join$ 全体ト一致スル。(§ 2. 定理 (E); § 3 (D))

(B) P ノ $direct meet$ = ヨル分解ニ於テ一ツノ因子ノ最小ノ元トナリケル元ノ集合ヲ C_2 トスルト

(i) $a \in C_2$ + ルタ $x = \wedge P = (P \vee a) \odot (P \vee b)$
 + ル $b \in C_2$ が存在スルコトが 必要 = ヲテ 且ツ 充分デ
 アル。

(ii) $a, b \in C_2$ + ラバ $a \vee b \in C_2$

(iii) P が 素 因 子 ノミカラ + ル *direct meet* = 分
 解サレル + ラバ, P ノ 有限部分集合 $B = \{e, b_1, \dots, b_n\}$
 が存在シ, C_2 ハ B ノ 部分集合ノ *meet* 全体ト一致スル。

(C) $C_1 = C_2$ (§3 (H))

コノ一致スル集合ヲ P ノ *Center* ト呼ブ。 *Center* C
 ハ *lattice* ヲ作ル。 ($a, b \in C$ + ラバ $P =$ 於テ $a \vee b$,
 $a \wedge b$ が存在シ C = 属スル)

(D) P ノ *Center* C ハ P ノ 自己同型置換 = ヨッ
 テモ, 逆ノ自己同型置換 = ヨツテモ不変デアアル。

証明. 逆ノ自己同型置換 f = ツイテ証明スル。
 $a \in C$ トスルト $P = (P \wedge a) \odot (P \wedge b)$ + ル b が存在ス
 ル。

容易 = 分ル様 = $P = (P \vee f(a)) \odot (P \vee f(b))$

$\therefore f(a) \in C$

(E) P ノ *Center* C ノ 各元ハ一ツ面シテ唯一ツノ補
 元ヲモテ, ヲノ補元ハ又ハリ C = 属スル。

証明. $a \in C$ トスルト $P = (P \wedge a) \odot (P \wedge b)$ + ル
 b が存在シ $a \vee b = e$, $a \wedge b = 0$ 即チ, a ハ補元 b
 ヲモツ。 a ノ任意ノ補元ヲ x , ヲノ成分ヲ x_1, x_2 トスレ

$$1^{\circ} \quad x = x_1 \cup x_2, \quad a = a \cup 0 \quad b \neq 0$$

$$a \cup x = a \cup x_2 = a \cup b \quad \therefore x_2 = b$$

$$2^{\circ} \quad a \cap x = x_1 \cup 0 = 0 \cup 0 \quad \therefore x_1 = 0$$

$$\therefore x = x_1 \cup x_2 = b$$

—— (ix) 上) ——