



Title	連續幾何學二就テ
Author(s)	岩村, 聯
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 254, p. 283-313
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75056
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1123. 連續幾何學 = 就テ

岩 村 聯 (東京)

定義ハ後デ下スエトニシテ, 目標ヲ先ニ述ベマス。ソ
レハ可約ナ連續幾何ニ一般次元函数ヲ導入スルコトト, 可
約ナ連續幾何ヲ既約ナモノノ直和ニ中ニ束同型ニ embed
スルコトデス。J. von Neumann ニヨレバ, 既約ナ
連續幾何ニハ實數値次元函数ガ導入サレマス (Lectures
on Continuous Geometries, part I 以後 C.
G. I. ト略記)

又可約ナモノニ一般次元函数ヲ導入スルタメノ殆ド完
全ナ準備ガ C. G. III デ整ヘラレテオマスガ, 如何ナ理由ニ
ヨルモノガ, 最後ノ結果迄ハ示サレテ居リマセン。C. G. III

1 諸結果ト J. Halperin が與ヘタ補題 (Trans. Amer. vol. 44) を使ヘバ, 後述1 様=比較的簡單=目標=到達シマス。既約+モノノ直和1 中=embed スルコトモコレ=伴ッテ實現サレマスガ, 單=束同型=embed サレルト云フダケデ, 一般1 $join \times meet$ = ヲイヲハ如何ナツテホルカーズワカリマセン。此1 點が何トカトラナイモ1 デセウカ。

§ 1

L ハ最大元 1, 最小元 0 ヲ有スル complemented, modular ナ束トスル。 L ノ元ヲ $a, b, \dots, x, y, \dots$ デ表ハシ, 半順序 $\preceq$ $join$ ヲ $a + b$, $meet$ ヲ $a \cdot b$ デ表ハス。任意個數 (有限ト限ラズ) ノ元ノ $join$, $meet$ ヲ (存在スレバ) $\sum, \prod$ デ表ハス。 $a + b = a + x = b + x$, $a \cdot b = a \cdot x = b \cdot x$ ナル x ガ存在スルコトヲ $a \sim b$ ト記ス (即チ $\sim$ $transitive$ デハナイ)。 $a \preceq c$, $a \succeq c$ ハ夫々 $a \sim b \preceq c$, $a \sim b \succeq c$ ナル b ガ存在スルコトヲ表ハス。

$a \preceq c$, $a \succ c$ ハ夫々 $a \preceq c$, $a \succeq c$ デヤッテ $a \sim c$ ガナイコトヲ表ハス。

$\mathcal{Q}$ ハ半順序加法群 (半順序が加法デ保存サレル) トスル。 f ヲ L ノ上ヲ定義サレテ $\mathcal{Q}$ ノ中ノ値ヲ取ル函數トスル。常ニ $f(a) \geq 0$ ナラバ, f ハ positive デアルト云

フ。恒等式 $f(a+b) + f(ab) = f(a) + f(b)$ が成立ス
 1バ, f は (一般) modular functional デアルト云
 フ。 $ab=0$ ナルスミテ, a, b 対シテ $f(a+b) = f(a)$
 $+ f(b)$ が成立スレバ, f は modular functional デ
 アル。

f が sharply positive modular functional
 デアレバ, $a \sim b$ スハ $a \leq b$ スハ $a \not\leq b$ = 従ッテ夫
 レ $f(a) = f(b)$ スハ $f(a) < f(b)$ スハ $f(a) > f(b)$
 1ナル。 positive modular functional デアル
 ト云フダケナラバ, $< \text{及} \geq$ ハ $\leq$ 及 $\geq$ デ置キ換ヘシレ
 ネバナラナイ。

f が positive modular functional デ,
 $f(a) \leq f(b)$ スハ $f(a) \geq f(b)$ = 従ッテ必ズ $a \leq b$
 スハ $a \not\leq b$ ナルトキニ, f は (一般) 次元函数 デアルト
 云フ。此ノトキ f は sharply positive ナル。 f が
 實數値次元函数 ナラバ, 任意ノ a, b ニツキテ $a \not\leq b$ ナ
 ルヲケデアル。スベテノ a, b ノ間ニ $a \leq b$ が成立スレ
 バ, L 上ノ sharply positive modular function-
 al ハ (若シ存在スレバ) 次元函数 デアル。

以下 シバラク C. G. III カラ差留ッテ必要ナ定數ト結果
 トヲ (少シ変形シテ) 抜キ出シテ見ル。而シ § 2 以後ニ於
 テモ C. G. III ノ其他ノ結果モ引用サレル。

完全束 L が complemented, modular デ, 連續

性, 公理

I) $a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_\xi \geq a_{\xi+1} \geq \dots$ (ξ, φ は超限順序数) + ラベ $b + \prod_{\xi < \varphi} a_\xi = \prod_{\xi < \varphi} (b + a_\xi)$

II) I) の双対

ヲ満タストキ, L は連続幾何デアルト云フ。以後 L は常ニ連続幾何ヲ表ハス。補充が *unique* デアルヤウ + 元ノ全体ヲ L の *center* ト言ヒ, Z デ表ハス。 Z の元ヲ e, e_0, e^* 等ト記ス。

Z は Boolean algebra デアル。 Z の任意ノ部分集合 $\{e\}$ ニツイテ $\sum e, \prod e \in Z$ デアル; 従ッテ Z は *complete* デアル。 次ノ條件ハ互ニ同値デアル。

i) $e \in Z$ + ラベ $e=0$ スハ $e=1$

ii) スベテノ a, b ニツイテ $a \leq b$ 。

此等ノ條件ガ成立スレバ L は既約, シ + ケレバ L は可約デアルト云フ。

L の部分集合 $\{a_\gamma\}$ (γ は parameter $\in \Gamma$) が独立デアルト云フノハ, Γ の任意ノ互ニ素ナ部分集合 Γ_1, Γ_2 ニツイテ $(\sum a_{\gamma_1})(\sum a_{\gamma_2}) = 0$ ($\gamma_i \in \Gamma_i$) トナルコトデアル。コレヲ $\{a_\gamma\} \perp$ ト記ス。後ニ表ハレルノハ Z の部分集合ノ独立ナ場合ガデアル。 $\{e_1, \dots, e_n\} \perp$ ノ必要ナ条件ハ $e_i e_j = 0$ ($i \neq j$) デアル。

$\sim$ は推移的 (transitive), 従ッテ一ツノ對等關係 (equivalence relation) デアル。 L は $\sim$ デ類

$A_a = (x; x \sim a) = \text{分けて類ノ全体ヲ}$ $\mathcal{L} = (A_x; x \in \bar{L})$
 トスル。 $\mathcal{L}$ ノ元ヲ A, B, X, Y 等ヲ表ハス。特ニ $\theta = A_0$,
 $\perp = A$, トスル (何レモ唯一ツノ $\bar{L}$ ノ元カラ成ル類), $a \leq b$
 ノトキ $A_a \leq A_b$, $a \sim b$ ノトキ $A_a \equiv A_b$ ト定メレバ,
 $\leq$ ハ $\mathcal{L}$ ノ半順序ヲ與ヘル。 $a \leq c$, $A_a \leq B \leq A_c$ ナラバ,
 $a \leq b \leq c$ ナル $b \in B$ ガ存在スル。 e, A ガ與ヘラレタト
 ナ $eA = (ex; x \in A)$ ト定メル。 $eA \in \mathcal{L}$ ナアル。

$a \sim b$, $b \sim b'$, $ab = a'b' = 0$ ナラバ $a + b \sim a' + b'$
 ナアル。

ソコデ $ab = 0$ ノトキ $A_a + A_b = A_{a+b}$ ト定メル。

次ノコトハ容易ニ確メラレル: 左辺ガ存在スレバ $A+B = B+A$,
 $A+(B+C) = (A+B)+C$ (右辺ガ存在シテ, 此
 1 等式ガ成立スルトイフ意味; 以下同様). $A+X = B+$
 X ノ存在ト $A \leq B$ トハ同値ナリ, X ハ存在スルバ A, B ガ一
 意ニ定マル。此ノ X ヲ $B-A$ ト記ス。 $A \leq B \leq C$, $C-B \leq$
 $C-A$, $B-A \leq C-A$ ハ互ニ同値ナアル。

$\{e_1, \dots, e_n\} \perp$ ナラバ任意ノ $A', \dots, A^n$ ニ對シテ
 $e_1 A' + \dots + e_n A^n$ ガ存在シ, 特ニ $e_1 A + \dots + e_n A =$
 $(e_1 + \dots + e_n) A$ ナアル。

實數ノ zero 0 ニ對シテ $0A = \theta$ ト定メル。整數 $n \geq 0$
 ニ對シテ nA ガ定マリ且ツ $nA + A$ ガ存在スルトキ,
 $(n+1)A = nA + A$ ト定メル。 $n \geq m \geq 0$ ナラバ $nA \geq$
 mA , $(n-m)A = nA - mA$. 一辺ガ存在スレバ

$(n+m)A = nA + mA$. nA が存在し、一辺が存在ス
 レバ $(nm)A = n(mA)$. $\sim$ ノ括弧ヲ省イテ nmA ト記
 ス; 他ノ場合ニモ同様ノ記法ニ從フ. nA が存在スレバ
 $e.nA = n.eA$, $n \geq 1$ ノトキ, 一辺が存在スレバ $n(A+B)$
 $= nA + nB$.

$a \ll b$ トハ, スベテノ e ニ對シテ $ea \leq eb$ 又ハ
 $ea = eb = 0$ トナルコトデアアル. $A \ll B$ トハ, スベテノ
 e ニ對シテ $eA \leq eB$ 又ハ $eA = eB = 0$ トナルコトデア
 アル. $\gg, >>$ ニ同様. $A_a \ll A_b$ ト $a \ll b$ トハ同様デア
 アル.

e_0 ヲ固定シテ, 変換 $a \rightarrow e_0 a$, $A \rightarrow e_0 A$ ヲ考ヘ
 ルト, コレハ次ノ演算, 関係ニツイテ準同型変換デアアル:
 L ニ於ケル演算 $a+b$, ab , 関係 $\leq, \sim, \leq, \ll$, L ノ元
 ト L ノ元トノ間ノ関係 $\in$, L ニ於ケル演算 (可能ナ範圍
 中) $A+B$, $A-B$, nA , eA , 関係 $\leq, \ll$.

§ 2

C. G. III, Theorem 2.7 = ヲレバ: スベテノ $a, b =$
 對シテ,

a) $\{e_1, e_2, e_3\} \perp$, b) $e_1 + e_2 + e_3 = 1$,
 c) $e_1 a \gg e_1 b$, d) $e_2 a \ll e_2 b$, e) $e_3 a \sim e_3 b$
 ナル e_1, e_2, e_3 が存在スル. 此レヲ定義ニ從フテ次ノ様ニ
 言ヒ直シ, 以後 Theorem 2.7* トシテ屢ニ引用スル: ス

ベテノ A, B = 對シテ

$$a) \{e_1, e_2, e_3\} \perp, \quad b) e_1 + e_2 + e_3 = 1,$$

$$c) e_1 A \gg e_1 B, \quad d) e_2 A \ll e_2 B, \quad e) e_3 A = e_3 B$$

トナル e_1, e_2, e_3 が存在スル。最初ノ應用トシテ

補題1. $L, \wedge \leq$ ニツイテ束ヲナス。ソノ meet ヲ $A \wedge B$, join ヲ $A \vee B$ テ表ハス。 nA, nB が存在スルニハ
 $nA \vee nB = n(A \vee B), \quad nA \wedge nB = n(A \wedge B).$

証明. A, B = 對シテ上記ノ e_1, e_2, e_3 ヲ取ツテ置
ク。 nA, nB ノ存在ヲ假定スルニハ, a) = コツテ

$$1) \quad C^n = e_1 nA + e_2 nB + e_3 nA \quad \text{スル}$$

$$D^n = e_1 nB + e_2 nA + e_3 nB$$

が存在シテ

$$2) \quad C^n = ne_1 A + ne_2 B + ne_3 A = nC',$$

$$D^n = ne_1 B + ne_2 A + ne_3 B = nD'.$$

a), b) = コツテ, 任意ノ X = 對シテ

$$3) \quad X = e_1 X + e_2 X + e_3 X$$

トナル。特ニ $X \geq nA, nB$ トスルニハ 1), 3) カラ $X \geq C^n$
ヲ得。又 $nA, nB \geq X$ トスルニハ $D^n \geq X$ トナル。 c), d),
e) カラ

$$c)' \quad ne_1 A \geq ne_1 B, \quad d) \quad ne_2 A \leq ne_2 B,$$

$$e)' \quad ne_3 A = ne_3 B$$

ヲ得ルカラ, $C^n \geq nA, nB$, 又 $nA, nB \geq D^n$ トナル。
従ツテ $C^n = nA \vee nB, \quad D^n = nA \wedge nB.$

$n=1$ のときヲ考ヘテ見レバ, $C' = A \vee B$, $D' = A \wedge B$
 ハ無條件ニ存在スルカラ, $\mathcal{L}$ ハ束デアル, 再ビ nA , nB
 ノ存在ヲ假定スレバ, 2) = ヨツテ

$$nA \vee nB = C^n = nC' = n(A \vee B),$$

$$nA \wedge nB = D^n = nD' = n(A \wedge B).$$

(以上)

變換 $A \rightarrow e$. A が $\mathcal{L}$ ノ束準同型變換デアルコトハ明
 カデアラウ. 任意個數 (有限ト限ラズ) ノ *meet*, *join*
 ニツイテモ, 若シ存在スレバ, $\wedge$ 及ビ $\vee$ ナル記号ヲ使フ.
 次ニ上ノ補題ヲ精密ニスルコトヲ考ヘル.

1. Halperin = コレバ: $a_1 \geq a_2 \geq \dots$, $b \leq a_n$
 $n=1, 2, \dots$ ナラバ $b \leq \prod_{n=1}^{\infty} a_n$ デアル. ソコデ今
 $a_n \in A^n$, $\prod_{n=1}^{\infty} a_n \in A$ トシテ見レバ此ノコトカラ
 $A = \bigwedge_{n=1}^{\infty} A^n$ ラ得ル. 次ニ一般ニ $A^1 \geq A^2 \geq \dots$ ナル
 列ヲ取ツテ考ヘレバ, $a_n \in A^n$, $a_n \geq a_{n+1}$ ナル列 $\{a_n\}$
 ノ取ルコトが出来ルカラ, $\bigwedge_{n=1}^{\infty} A^n$ が存在スルコトニナル.
 $\mathcal{L}$ ハ束デアルカラ, 此ノ事實ニヨツテ, 全然一般ノ可附
 番列 $A^1, A^2, \dots$ ニ對シテモ $\bigwedge_{n=1}^{\infty} A^n$ が存在スルコトニ
 ナル. 此等ノコトノ双對ニ亦成立スルコトハ明カデアアル.
 以上ヲ纏メテ:

補題2. 束 $\mathcal{L}$ ハ可附番ノ意味デ完全束デアル.

$a_1 \geq a_2 \geq \dots$, $a_n \in A^n$ $n=1, 2, \dots$ ナラバ $\prod a_n \in \bigwedge A^n$
 デアル. $a_1 \leq a_2 \leq \dots$, $a_n \in A^n$ $n=1, 2, \dots$ ナラバ

$$\sum a_n \in \bigvee A^n \text{ for } n \in \mathbb{N}.$$

$a \sim b$ ならば $e(a) = e(b)$ である。ソコデ $a \in A$ / トチ
 $e(A) = e(a)$ ト定メル。

スベテ / a = 對シテ次 / 様ニ b, c, d が存在スレトキ,
 L は ∞ 型デアルト云フ。

$$a \geq b + c = c + d = d + b, \quad bc = cd = db = 0,$$

$$e(a) = e(b).$$

補題3. L は ∞ 型トスル。スベテ / a = 對シテ,
 $a = b^* + c^*$, $b^* \sim c^*$, $b^* c^* = 0$ ナル b^*, c^* が存在ス
ル。從ツテスベテ / A = 對シテ $\frac{1}{2}A$ が存在スル。

証明. L / 元 / 組 (x, y, z) / 間ニ半順序ヲ定義
スル: $x \leq x', y \leq y', z \leq z'$ デアルコトヲ (x, y, z)
 $\leq (x', y', z')$ トスル。『』

$$a \geq x + y = y + z = z + x, \quad xy = yz = zx = 0$$

ナル組 (x, y, z) / 全体トスル。『』 = コノ半順序ノ意味デ
ノ最大元が存在スルコトヲ示サウ。ソレニハ $S = \{(x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma); \gamma \in I'\}$ ヲ『』 / 任意ノ全順序部分集合トシテ, 『』 /
中ニ S / 上界ガ少クモ一ツアルコトヲ示セバ十分デアル。

(Zorn の補題). $x = \sum_\gamma x_\gamma, y = \sum_\gamma y_\gamma, z = \sum_\gamma z_\gamma$.

$\gamma \in I'$ トスレバ $a \geq x + y = y + z = z + x$ ハ明白。所ガ
 $(x_\gamma; \gamma \in I')$ 等ハ L / 全順序部分集合デアレカラ, L /
連続性ノ公理カラ容易ニ $xy = \sum_\gamma x_\gamma y_\gamma$ 等ヲ得ル。從ツテ
 $xy = yz = zx = 0$ トナル。此ノ (x, y, z) ハ S / 一ツ
ノ上界 $\in I'$ デアル。

T / 極大元, $\sim$ ヲ (b^*, c^*, d^*) トシ
 $a^* = b^* + c^* (= c^* + d^* = d^* + b^*)$ ト置ケバ, $a \geq a^*$. 今

$a = a^* + a'$, $a^* a' = 0$ トル a' ヲ取ツテ

$$a' \geq b' + c' = c' + d' = d' + b',$$

$$b'c' = c'd' = d'b' = 0, \quad e(a') = e(b')$$

トスル。 $b = b^* + b'$, $c = c^* + c'$, $d = d^* + d'$ トスル
 心算易 =

$$a \geq b + c = c + d = d + b, \quad bc = cd = db = 0$$

ヲ得ル。(註) $\sim$ ル故 $(b^*, c^*, d^*) \leq (b, c, d) \in T$. 所
 か (b^*, c^*, d^*) $\wedge T$ / 極大元デアルカラ此ノ不等式
 ハ實ニ等式トナル。特ニ $b^* = b$.

$$\text{故ニ} \quad b' = b b' = b^* b' \leq a^* a' = 0.$$

従ツテ $a' \leq e(a') = e(b') = 0$ トナル。

従ツテ $a = a^* = b^* + c^*$ $\sim$ シテ $b^* \sim c^*$, $b^* c^* = 0$
 (以上)

(註) $bc = 0$ ノ証明シテ置ク。

$$bc = (b^* + b')(c^* + c') \leq (a^* + b')(a^* + c') = (a^* + a')(a^* + b')(a^* + c'),$$

$$\text{modularity} = \exists \text{ ヲテ, } = a^* + a'(a^* + b')(a^* + c'),$$

$$\text{所テ} \quad a'[a^* + b')(a^* + c') = a'(a^* + b')a'(a^* + c'),$$

$$\text{modularity} = \exists \text{ ヲテ, } = (a'a^* + b')(a'a^* + c').$$

$$a'a^* = 0, \quad b'c' = 0 \text{ デアルカラ結局 } bc \leq a^* + 0 = a^*,$$

$$\text{全ク同様ニ} \quad bc \leq a'$$

$$\text{従ツテ} \quad bc \leq a^* a' = 0$$

サテ n ヲ自然数トシテ, $D \frac{1}{n} \uparrow$ が存在シ,

2) $A \ll \frac{1}{n} \uparrow$ トラバ $A = \theta$ デアルトキニ, L ハ n 型デア
ルト云フ。C. G. III, Theorem 3.2 及ビ 3.6 ヲ纏メテ
吾々ノ言葉デ言ヘバ: L ハ n 型 ($n = 1, 2, \dots, \infty$) ノ
連続幾何ノ直和 $\sum \oplus L^n \quad 1 \leq n \leq \infty$ ニ分解サレル。此
処デ連続幾何ノ直和ハ次ノ様ニ定義サレル。

λ ヲ或ル parameter トシ, λ ノ各々ノ値ニ連続幾
何 L^λ が對應シテ居ルトスル。 $\lambda = L^\lambda$ ノ元 a^λ ヲ對應サ
セル一價函数ヲ $\sum \oplus a^\lambda$ ト記シ, 斯様ニ $\sum \oplus a^\lambda$ ノ全体ヲ
 $\sum \oplus L^\lambda$ ト記ス。 $\sum \oplus L^\lambda$ = 普通ノ半順序ヲ導入スル;
 $\sum \oplus a^\lambda \leq \sum \oplus b^\lambda$ ハスベテ, $\lambda = \text{ツイテ}$ $a^\lambda \leq b^\lambda$ デ
アルコトヲ定メル。 $\sum \oplus L^\lambda$ ハ此ノ半順序ニツイテ連続
幾何ヲナス。ソレヲ L^λ ノ直和ト云フ。

ソコデ問題ハ各々ノ L^n = 次元函数ヲ導入スルコト
ト, L^n ヲ更ニ既約トモノ直和ノ中ニ embed スル
コトトニナル。ソレ故以テ n 型 ($1 \leq n \leq \infty$) ノ L が
考ヘレバ宜シイ。

§ 4

∞ 型ノ連続幾何ニ次元函数ヲ導入スルダケトラバ,
問題ハ次ノ様ニ簡潔ニ解ケテシマフ。 L ハ ∞ 型デアルト
スル。

スベテ, $A = \text{對シテ}$ $\frac{1}{2} A$ が存在スル。任意ノ $A, B = \text{對}$

シテ $\frac{1}{2}A \leq \frac{1}{2}I \leq I - \frac{1}{2}B$ デアルカラ, $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ が存
 在スル。 $A+B$ が存在スレバ $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}(A+B)$ デアル。
 $\frac{1}{2}(A \vee B) = \frac{1}{2}A \vee \frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}(A \wedge B) = \frac{1}{2}A \wedge \frac{1}{2}B$
 デアル。 従ッテ $A \leq B$ + ラバ $\frac{1}{2}A \leq \frac{1}{2}B$ デアル。

ルヲ自然数トシ, スベテノ $k \geq n$ = 對シテ $A^k \in \mathcal{L}$ が
 對應シテ $A^k = 2A^{k+1}$ 即チ $A^{k+1} = \frac{1}{2}A^k$ デアルトスル。
 斯様ニ對應 $k \rightarrow A^k$ $k \geq n$ ヲ $\{A^k\}_n$ スハ簡單ニ $\{A\}$
 ト記ス。 $\{A^k\}_n \equiv \{B^k\}_m$ ハ, $A^l = B^l$ + ル $l \geq n, m$
 が存在スルコトト定義スル。 $\{A^k\}_n \leq \{B^k\}_m$ ハ,
 $A^l \leq B^l$ + ル $l \geq n, m$ が存在スルコトト定ムル。

$\{A^k\}_n \equiv \{B^k\}_m$ + ラバスベテノ $j \geq n, m$ = 就
 イテ $A^j = B^j$, 又 $\{A^k\}_n \leq \{B^k\}_m$ + ラバスベテノ
 $j \geq n, m$ = ツイテ $A^j \leq B^j$ デアル。 従ッテ $\equiv$ ハ對等
 關係デアル。 $\{A\}, \{B\}, \dots \equiv$ 種類ニ合ケテ, 類ヲ $\mathcal{O},$
 $\mathcal{L}, \dots$, 其ノ全体ヲ $\mathcal{K}$ トスル。

$\{A\} \in \mathcal{O}, \{B\} \in \mathcal{L}, \{A\} \leq \{B\}$ + ラバ $\mathcal{O} \leq \mathcal{L}$ ト
 スル。 $\mathcal{O} \leq \mathcal{L}$ + ラバ 任意ノ代表 $\{A^*\} \in \mathcal{O}, \{B^*\} \in \mathcal{L}$
 = 對シテモ $\{A^*\} \leq \{B^*\}$ が成立スル。 従ッテ $\leq$ ハ $\mathcal{K}$ ノ半
 順序ヲ與ヘル。

次ニ演算 $\mathcal{O} + \mathcal{L}$ ヲ定義スル。 $\mathcal{O}, \mathcal{L}$ ノ代表ヲ任意ニ
 取ッテ, 未ダ $\{A^k\}_n$ 及ビ $\{B^k\}_m$ トスル。 $C^i = A^i + B^i$
 ハスベテノ $i \geq l = 1 + \max(n, m)$ = 對シテ存在シ,

$C^i = 2C^{i+1}$ デアル。此ノ $\{C^i\}_i$ ノ含ム類 C ハ $\{A^k\}_n$, $\{B^h\}_m$ ノ選ビ方ニ関係ナク, α ト ω トデ一應ニ定マル。
 $C = \alpha + \omega$ トスル。

次ノ事實ハ殆ンド明白デアラウ, $\alpha \leq \alpha + \omega = \omega + \alpha$.
 $\alpha + (\omega + C) = (\alpha + \omega) + C$. $\alpha \leq C$ ナラバ $\alpha + \omega \leq C + \omega$.
 $\alpha \leq C$ ナラバ, $\alpha + \omega = C + \omega$ ナル ω ガ存在シテ,
 α ト ω トデ一應ニ定マル。アル自然数 m ニツイテ $2^m \alpha \leq 2^m C$ ナラバ,
 $\alpha \leq \omega$ デアル。従ツテ $\mathcal{A}$ ハ或ル半順序加法群 $\mathcal{A}$ ニ拡張サレル。

$A = \{A^k\}_k \in \mathcal{A}$, $A' = A + \omega$ ノ $\mathcal{A}$ 内ニ對應サセテ $\alpha = \varphi(A)$ トスル。

φ ハ one-to-one ナ對應デアツテ, $A \leq B$ ト $\varphi(A) \leq \varphi(B)$ トハ同値デアル。

又 ii) $A+B$ ガ存在スレバ $\varphi(A+B) = \varphi(A) + \varphi(B)$ デアル。特ニ iii) $\theta = \varphi(\theta)$ ハ $\mathcal{A}$ ノ zero デアル。

所ガ一般ニ, $\mathcal{A}$ ノ ∞ 型ノ限ラズ, 半順序加法群 $\mathcal{A}$ ト, $\mathcal{A}$ ノ $\mathcal{A}$ ノ一部ヘノ寫像 φ トガアツテ, 上記 i), ii), iii) ガ成立スレバ, 次ノ様ニシテ $\mathcal{A} =$ (一般) 次元函数ガ導入サレル。
 $a \in A$ ノトキ $f(a) = \varphi(A)$ ト定義スル。

$f(\theta) = \varphi(\theta) = \theta$. 又 $a+b = \theta$ ナラバ $f(a+b) = f(a) + f(b)$, 従ツテ f ハ modular functional デアル。
 $a \in A$, $b \in B$ トスルト $a \leq b$ ト $A \leq B$ ハ同値, $A \leq B$ ト $\varphi(A) \leq \varphi(B)$ トハ同値, 従ツテ $a \leq b$ ト $f(a) \leq f(b)$

トが同値ニナル。ソレ故 f ハ次元函数デアアル。

§ 5

$e_1, e_2 \in \mathcal{P}$ トラバ $e_1, e_2 \in \mathcal{P}$ トナル様ナ, $\mathcal{Z}$ ノ部分集合 $\mathcal{P}$ ヲ一ツ固定シテ考ヘル。

$eA = eB$ ナル $e \in \mathcal{P}$ が存在スルコトヲ $A = B(\mathcal{P})$ ト記ス。 $=(\mathcal{P})$ ハ $\mathcal{L}$ = 於ケル對等關係デアアル。 $\mathcal{L}$ ヲ演算 $+, -, \vee, \wedge$ ナ有スル代數系ト考ヘレバ, $=(\mathcal{P})$ ハソノ合同 (congruence) ヲ與ヘル。即チ例ヘバ $A' + B'$ ト $A'' + B''$ トが存在シ $A' = A''(\mathcal{P}), B' = B''(\mathcal{P})$ トラバ, $A' + B' = A'' + B''(\mathcal{P})$ トナル。

ソノデ $\mathcal{L}$ ヲ $=(\mathcal{P})$ デ類 $(A), (B), \dots; (A) = (X; X = A(\mathcal{P}))$ ニ分チ, 類ノ全体ヲ $(\mathcal{L}) = ((A); A \in \mathcal{L})$ トシテ, $(\mathcal{L})$ = 剰餘系トシテノ演算 $+, -, \vee, \wedge$ ヲ導入スル。即チ例ヘバ $(A) + (B)$ が存在スルトイフノハ, $A' + B'$ が存在スルヤウナ $A' \in (A)$ ナビ $B' \in (B)$ がアルコトトシ, 此ノトキ $(A) + (B) = (A' + B')$ ト定義スル。 $(\mathcal{L})$ ハ演算ニツイテ $\mathcal{L}$ = 準同型デアアル。従ツテ $\vee, \wedge$ ニツイテ束公理ヲ満たス。 $\vee, \wedge$ カラ半順序 $\leq$ ヲ $(\mathcal{L})$ = 導入スレバ, $eA \leq eB$ ナル $e \in \mathcal{P}$ が存在スルコトト $(A) \leq (B)$ トが同値ニナル。又 $e \in \mathcal{P}$ トラバ $(eA) = (A)$ デアル。従ツテ $\mathcal{L}$ ノ諸性質カ $(\mathcal{L})$ = 翻譯サレル。ソレヲ幾ツカ導ゲテ見ヨウ。

$(A) + (B)$ が存在スレバ $(A) \leq (A) + (B) = (B) + (A)$.
 一方、 (B) が存在スレバ $(A) + ((B) + (C)) = ((A) + (B)) + (C)$.
 $(B) = (A) + (C) + \nu(C)$ / 存在ト, $(B) - (A)$ / 存在ト
 $(A) \leq (B)$ トハ互 = 同値デ, コノトヲ $(C) \wedge (A) \vdash (B)$ ト
 デ一意 = 定マリ, $(C) = (B) - (A)$ デアル. $(B) + (C)$ が
 存在シ $(A) \leq (B)$ + ラバ $(A) + (C) \leq (B) + (C)$.
 $(A) \leq (B) \leq (C)$, $(C) - (B) \leq (C) - (A)$, $(B) - (A) \leq (C) - (A)$
 ハ互 = 同値デアル.

$L =$ 於テモ同様ニ, $ea = eb + \nu e \in \mathcal{P}$ が存在スル
 コトヲ $a = b(p)$ ト定義スル. $=(p)$ ハ L / 束合同ヲ與
 ヘル. $(a) = (x; x \equiv a(p))$, $(L) = \{(a), a \in L\}$
 トシテ L / 剰餘系 (L) ヲ作レバ, コレハ $L =$ 準同型ナ
 束トナリ, 従ッテ *complemented, modular* デアル.
 $\leq, \sim, \wedge, \vee$ / 一ツテ $\mathcal{P}$ デ表ハスコトニスレバ,
 $(a) \mathcal{P} (b) \wedge ea \mathcal{P} eb + \nu e \in \mathcal{P}$ / 存在ト同値ニナル.
 (コレハ一々試ミテ見レバ直チ = ヲカル). $\forall e \in \mathcal{P}$ + ラ
 バ $(ea) = (a)$ デアル. 此シカラ $\sim$ / 推移性ガ出ル.
 $\sim$ ハ $(L) =$ 於ケル對等關係トナルカラ, 此レデ (L) ヲ類
 $(A)^*, (B)^*, \dots$ ニ分ケテ, 類ノ全体ヲ $(L)^*$ トスル. 斯
 様ニ記号ヲ用キルノハ, (L) ト $(L)^*$ トノ間ニ次ノ様ニ關係
 が成立スルカラデアル.

$ea \in eA + \nu e$ が存在スルコトヲ $a \in A(p)$ ト記ス.
 $a \in A$ + ラバ $a \in A(p)$ デアル. 前記ノ $\mathcal{P}$ ヲ $\sim$ トシテ見

レバ, $a \in A(p)$: トキ, $(a) \sim (b)$ ト $b \in A(p)$ トが同値デアルコトがワカル。従ッテ $\sim = \text{ヨル } (L) \text{ノ類別 } (L)^*$ ハ $(A)^* = \{(a); a \in A(p)\}$ ノ全体 ($A \in L$) トシテ與ヘラレル。ソレ故 類 $(A)^*$ ハ以後或ル $A \in L$ デ與ヘラレタモト考ヘル。

次ノ條件 1) ト 2), 2) ト 3), 3) ト 4) が互ニ同値デアルコトハ明瞭: 1) $(A)^* = (B)^*$, 2) $(A)^*$ ト $(B)^*$ トが共通元ヲ有スル 3) $e \in A$ ト $e \in B$ トが共通元ヲ有スル様ナ $e \in p$ が存在スル, 4) $A = B(p)$ 此ノ 1) ト 4) トヲ比較シテ見レバ; (L) ト $(L)^*$ トハ $(A) \leftrightarrow (A)^*$ ガ one-to-one - 對應スル。ソコデ演算 ト半順序ノ定義サレタ (L) ヲ, (L) ノ $\sim = \text{ヨル 類別 } (L)^*$ ト考ヘル。従ッテ $(a) \in (A)$ ナル關係ガ意味ヲ有スル。 $(a) \in (A)$ ノ必要十分ノ條件ハ, $a \in A(p)$, 即チ $e a \in e A$ ナル $e \in p$ が存在スルコトデアル。ソレテ $(A) + (B)$ ノ存在ハ, $(a) \in (A)$, $(b) \in (B)$, $(a)(b) = (0)$ ナル (a) , (b) ノ存在ト同値デアル。此ノトキ $(a) + (b) \in (A) + (B)$ トナル。又 $(a) \in (A)$, $(b) \in (B)$, $(A) \leq (C) \leq (B)$ ナレバ, $(a) \leq (c) \leq (b)$ ナル $(c) \in (B)$ が存在スル事モ容易ニ知ラレル。

以上ハ L , L ト其ノ剩餘系 (L) , (L) ノ關係トシテ殆ド trivial ナ事許リデアッタ。次ノ補題ハ証明ヲ要スルカモ知レナイ:

補題 4. $(a_m) \geq (a_{m+1})$, $A^m \geq A^{m+1}$, $(a_m) \in (A^m)$

$m = 1, 2, \dots$ とし、 $a_m^* \geq a_{m+1}^*$, $a_m^* \in A^m$,
 $(a_m^*) = (a_m) + \text{ル } a_1^*, a_2^*, \dots$ が存在スル。

証明. 1. α) $a^* \in A \geq B$, 1. β) $(a^*) \geq (b) \in (B)$
 デアルトキ =, 2. α) $a^* \geq b^*$, 2. β) $b^* \in B$, 2. γ) (b^*)
 $= (b)$

+ル b^* が存在スルコトヲ示サシ。

1. β) = ヲツテ, $e_1 a^* \geq e_1 b$, $e_2 b \in e_2 B$ +ル $e_1, e_2 \in \mathcal{P}$
 が存在スル。 $e = e_1, e_2$ トスレバ $e \in \mathcal{P}$ デアル。ソレ
 テ

$$e a^* \geq e b, \quad e b \in e B.$$

e ノ補充ヲ e' トスル: $e + e' = 1$, $ee' = 0$. 1. β) カ
 ラ $e' a^* \in e' A \geq e' B$ ヲ得ル。能ソテ $e' a^* \geq b' \in e' B$
 +ル b' が存在スル。

$$b^* = e b + b' \text{ トスルニ, } e + e' = 1 = \text{ヨツテ}$$

$$a^* = (e + e') a^* = e a^* + e' a^* \geq e b + b' = b^* \dots$$

..... 2. α)

$$\text{又 } e b b' \leq e b e' = 0. \text{ カラ}$$

$$b^* \in e B + e' B = (e + e') B = B \dots\dots 2. \beta)$$

$$\text{又 } e b^* = e e b + e b' = e b + e b', \quad e b' \leq e e' = 0$$

カラ

$$e b^* = e b' \quad \text{ソレテ } e \in \mathcal{P} \dots\dots 2. \gamma)$$

サテ $a_1^*, a_2^*, \dots$ ハ次ノ様ニ作ラレル。上記 1. α),
 1. β) = 於テ $a^* = 1$, $A = \dagger$, $B = A'$, $(b) = (a_1)$ ト

シテ $a_1^* = b^*$ トスレバ $a_1^* \in A'$, $(a_1^*) = (a_1)$. a_m^* 迄
 定ス. ッキトキ, 1. α), 1. β) テ $a^* = a_m^*$, $A = A^m$, $B = A^{m+1}$,
 $(b) = (a_{m+1})$ トシテ $a_{m+1}^* = b^*$ トスレバ $a_m^* \geq a_{m+1}^*$,
 $a_{m+1}^* \in A^m$, $(a_{m+1}^*) = (a_{m+1})$.

—— (以上) ——

サテ上記ノヤウナ $\mathcal{P}$ ($e_1, e_2 \in \mathcal{P}$ ナラバ $e_1, e_2 \in \mathcal{P}$) が
 更ニ, $\exists e_1 > e_2 \in \mathcal{P}$ ナラバ $e_1 \in \mathcal{P}$ デアルト云フ條件
 ノ満タストキ, $\mathcal{P}$ ハ 双對 ideal (Z) ト言ハレル. 双
 對 ideal $\mathcal{P}$ が $\neq Z$ デ, $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{O}_Z$ ナル双對 ideal が必ズ
 $\mathcal{O}_Z = \mathcal{P}$ ナル $\mathcal{O}_Z = Z$ デアルトキ, $\mathcal{P}$ ハ 極大双對 ideal デ
 アルト言ハレル. 以後 $\mathcal{P}$, $\mathcal{O}_Z$ 等ハ Z ノ 極大双對 ideal ノ
 表ハスコトニスル. (A), (α) 等ガ何レノ $\mathcal{P}$ デ構成サレタモ
 ノデアルカラ明示スル必要ガアルトキニハ $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(\alpha)$ 等
 ト記ス.

任意ノ $e =$ 對シテ $\mathcal{M}(e) = (\mathcal{P}; e \in \mathcal{P})$ トスレバ,
 Boole 代数 Z ハ 集合束 ($\mathcal{M}(e); e \in Z$) デ同型ニ表現
 サレル. ソレ故 e ト $\mathcal{M}(e)$ トヲ區別シナイコトニスル.
 従ツテ $e \in \mathcal{P}$ ト $\mathcal{P} \in e$ トハ同じ内容ヲ有スル. $1 = \mathcal{M}(1)$ ハ
 Z ノ 極大双對 ideal 全体ノ集合, $0 = \mathcal{M}(0)$ ハ 空集合デ
 アル. $e \in \mathcal{P}$ ナル e ノ $\mathcal{P}$ ノ近傍ト定義スレバノ即チ $\mathcal{M}(1)$
 = bicomact Hausdorff Space トナル.

補題5. A, B ガ與ヘラレタトスル. スベテノ $\mathcal{P}$ ニッ
 イテ $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ ナラバ, $A \subseteq B$ デアル.

証明. 任意 $\mathcal{P}$ = 對シテ, $eA \leq eB$ + ル $e \in \mathcal{P}$ が存在スル。スベテ $\mathcal{P}$ = 就イテ斯様 + e ヲ對應サセレバ,

$1 = m(1)$, open coveringヲ得ル。ソノ中カラ finite covering $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ ヲ取出ス: $e_1^* + \dots + e_n^* = 1$,

$e_i^* A \leq e_i^* B$, $i = 1, 2, \dots, n$. e_i^* ノ補元ヲ e_i' トシ

テ, $e_1 = e_1^*$, $e_j = e_1' + \dots + e_{j-1}'$, e_j^* トスレバ,

$$\{e_1, \dots, e_n\} \perp, \quad e_1 + \dots + e_n = 1,$$

$$e_i A \leq e_i B \quad i = 1, \dots, n$$

従ッテ

$$A = e_1 A + \dots + e_n A \leq e_1 B + \dots + e_n B = B.$$

—— (以上) ——

補題6. 各々, $(\mathcal{L}) = \mathcal{P}(\mathcal{L})$ ハ全順序集合デアール。

証明. 任意 $(A), (B)$ ヲ取ル. Theorem 2.9^{*}ニ於ケル e_1, e_2, e_3 ヲ取レバ $e_1 + e_2 + e_3 = 1$, $e_1 A \leq e_1 B$, $e_2 A \leq e_2 B$, $e_3 A = e_3 A$. 何レカ $e_i \in \mathcal{P}$ デアールが, e_1 又ハ e_2 又ハ $e_3 \in \mathcal{P}$ = 従ッテ $\mathcal{P}(A) \geq \mathcal{P}(B)$ 又ハ $\mathcal{P}(A) \leq \mathcal{P}(B)$ 又ハ $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ トナル。

—— (以上) ——

§ 6

以後 $\bar{L}$ ハ n 型 ($n < \infty$) 又ハ ∞ 型トシ, 少クモ2箇ノ元ヲ有スルモノトスル。然ツテ端 = $(+)$ $>$ (θ) デアール。
 n 型ノ $\bar{L}$ ヲ考ヘルトキハ $\Delta = \Delta_n = (k \cdot n^{-1}; k = 0, 1, \dots, n)$ トスル, ∞ 型ノ $\bar{L}$ ヲ考ヘルトキハ $\Delta = \Delta_\infty = (k \cdot 2^{-m};$

$\lambda = 0, 1, \dots, 2^m, m = 1, 2, \dots$ トスル。 L が n 型ノトキハ $n^{-1}+$ が存在シテ $(n^{-1}+) > (\theta)$, ∞ 型ノトキハ $2^{-m}+$ ($m = 1, 2, \dots$) が存在シテ $(2^{-m}+) > (\theta)$ デアル。 従ッテ何レノ場合ニモ, $\lambda \in \Delta$ ナラ $\lambda+$ が存在シテ, $\delta > \lambda, \delta \in \Delta$ ナラ $(\delta+) > (\lambda+)$ デアル。 以後 $\lambda, \delta, \dots$ ハ Δ ノ元トスル。

補題 7. L が n 型ノトキニハ, 任意ノ $(A) = \text{對シテ}, (A) = (\lambda+)$ ナル λ が存在スル。 L が n 型デモ ∞ 型デモ $\sup \Delta^0 = \inf \Delta'$ が成立スル; 但シ $\Delta^0 = (\lambda; (\lambda+) \leq (A))$, $\Delta' = (\delta; (A) \leq (\delta+))$ 。

証明. $\sup \Delta^0 \leq \inf \Delta'$ ハ明白。 又 (A) が全順序集合デアルカラ, Δ ハ Δ^0 ト Δ' トヲ盡サレハ, Δ_∞ ハ区間 $[0, 1]$ デ稠密デアルカラ, ∞ 型: L ニツイテハ $\sup \Delta^0 = \inf \Delta'$ トナル。 L が n 型ナラバ $\lambda = \max \Delta^0$, $\delta = \min \Delta'$ が存在シテ $\lambda = \delta$ ナハ $\lambda + n^{-1} = \delta$ トナル。 従ッデ $\lambda + n^{-1} = \delta$ トシテ矛盾ヲ出セバ証明ハ終ル。

$\lambda + n^{-1} = \delta$ ノ意味ハ, $(\lambda+) < (A) < (\delta+)$,

$$(\delta+) = (\lambda+ + n^{-1}+) = (\lambda+) + (n^{-1}+)$$

$(B) = (A) - (\lambda+)$ トオケバ $(\theta) < (B) < (n^{-1}+)$ トナル。 Theorem 2.7* = ヲツテ, 次ノ e_1, e_2, e_3 が存在スル:

$$e_1 + e_2 + e_3 = 1, \quad e_1 B \gg e_1 n^{-1}+, \quad e_2 B \ll e_2 n^{-1}+, \\ e_3 B = e_3 n^{-1}+.$$

何レカ e_i が $\in \mathcal{P}$ デアル。 $e_1 \in \mathcal{P}$ トスレバ $(B) \geq (n^+)$ トナツテ $(B) < (n^+)$ = 反スル。 $e_2 B \ll n^+$ デアルカラ $e_2 B = \theta$ 。 所ガ $(\theta) < (B)$ デアルカラ, $e_2 \notin \mathcal{P}$ 。
 $e_3 \in \mathcal{P}$ トスレバ $(B) = (n^+)$, ソレハ $(B) < (n^+)$ = 反スル。

— (以 上) —

$[A] = \sup \Delta^0 = \inf \Delta^1$ ト定ムル。 $\mathcal{P}$ デ明示スルトキ $[\mathcal{P}(A)]$ ト記ス。 定義カラ $0 \leq [A] \leq 1$, 又 $(A) \leq (B)$ ナラバ $[A] \leq [B]$, 又 $[A] < [B]$ ナラ $(A) < (B)$ デアル。 $(A) \leq (B)$ ノトキ即チ $(B) - (A)$ ガ存在スルトキ $[B] - [A] = [(B) - (A)]$ デアルコトガ容易ニワカル。 ソレ故 $(A) + (B)$ ガ存在スレバ $[(A) + (B)] = [A] + [B]$ トナル。

特ニ $\mathcal{L}$ ガ n 型ノトキハ $(A) \leq (B)$ ト $[A] \leq [B]$ ト同値ニナル。 従ツテコノ場合ニハ §4 末尾ノ所論ト同様ニ, (L) = 次元函数ガ導入サレテ, 其ノ取ル値ハ $0, n^-, 2 \cdot n^-, \dots, 1$ デアル。 ソレ故 (L) ハ n 次元ノ連続線何デ既約デアル。 シカシ此レカラ述ベルヤツナ $\overline{(L)}$ ノ構成ニハ, n 型デモ ∞ 型デモ同ジコトデアル。

変数 $\mathcal{P}$ ノ實數値函数 $f(\mathcal{P}), g(\mathcal{P})$ = 普通ノ半順序 $\leq$ ト束演算 $f \vee g, f \wedge g$ ヲ導入スル: 例ヘバ $(f \vee g)(\mathcal{P}) = \max \{ f(\mathcal{P}), g(\mathcal{P}) \}$ 。 サテ (L) ハ全順序集合デアルカラ, $(A) \vee (B), (A) \wedge (B) \wedge (A) \wedge (B)$ = 等シイ。

従って $[(A \vee B)] = [(A) \vee (B)] = \max \{ [(A)], [(B)] \}$.
 ソレ故 $[\phi(A)]$ が, A で定まる ϕ の函数と見れば $f_A(\phi)$
 と記せば $f_{A \vee B} = f_A \vee f_B$ とナル。同じ理由で $f_{A \wedge B} =$
 $f_A \wedge f_B$ とナル。 $f_A(\phi)$ の定義によつて, $\bar{\Delta}$ の値を取
 ル; 但し $\bar{\Delta}$ の實数空間に於ける Δ の closure であつて
 $\bar{\Delta}_n = \Delta_n$, $\bar{\Delta}_\infty = [0, 1]$ である。

$\epsilon \leq f_A(\phi) \leq \delta$ 即ち $\epsilon \leq [\phi(A)] \leq \delta$ は, $\epsilon \epsilon^+ \leq$
 $\epsilon A \leq \epsilon \delta^+$ とナル ϕ の近傍 ϵ が存在スルコト同値である。
 此の近傍 ϵ に属スル任意の $\phi = \psi$ には $\epsilon \leq f_A(\phi) \leq \delta$
 とナルワケである。定義により,

$$f_A(\phi) = \sup \{ \epsilon; \epsilon \leq f_A(\phi) \} = \inf \{ \delta; f_A(\phi) \leq \delta \}$$

であるから:

補題 8. f_A は ϕ の連続函数である。

コトは C. G. III, Theorem 2.13 を引用スル: スベテの自
 然数 m に対して mA が存在スルノハ, $A = \theta$ のトキに限
 ル。

補題 9. $f_A = f_B$ ならば $A = B$.

証明. A, B の代り $A \vee B, A \wedge B$ を考へればヨイ
 カラ, $A \geq B$ と假定スル。 $C = A - B$ とシテ $C = \theta$ を示せ
 ば足りル。 $(C) = (A) - (B)$ であるカラ $f_C = 0$ (常數
 zero)。従つて, $\epsilon > 0$ とスレバ, 任意の ϕ によつて
 $\phi(C) < \phi(\epsilon^+)$ 。補題 6 カラ $C < \epsilon^+$ とナル。 ϵ が ∞
 型ノトキ $\epsilon = 2^{-m}$ とシテ見れば, スベテの自然数 $m =$

對シテ $2^m C$ が存在スルコトニナル; 從ツテ固ヨリ mC が存在スル。ソレ故 $C = \theta$. L が n 型ノトキハ $n = n^1$ トシテ見レバ, $C \ll n^1$ が証明サレレバヨイコトガワカル。任意ノ $e \neq 0$ ニ對シテ, $e \in \mathcal{P}$ ナル $\mathcal{P}$ が存在スル。 $C \leq n^1$, $\mathcal{P}(C) < \mathcal{P}(n^1)$ デアルカラ, $eC < en^1 \leq n^1$. $e \neq 0$ ハ任意デアッタカラ, $C \ll n^1$.

——(以上)——

ソレ故 $A \rightarrow f_A$ ハ one-to-one + 對應デアアル。ソレハ束演算ヲ保存スル。從ツテ束同型對應デアアル。又 $A+B$ が存在スレバ $f_{A+B}(\mathcal{P}) = [(A)+(B)] = [(A)] + [(B)] = f_A(\mathcal{P}) + f_B(\mathcal{P})$. 實數値連續函數 (変數 $\mathcal{P}$) / 束群 $\mathcal{P}$ 上トスレバ $\mathcal{L}$ ニ於ケル加法 $= \mathcal{O}$ $=$ 於ケル加法が對應シ ($f_{A+B} = f_A + f_B$), θ $=$ 對應スル f_θ ハ明カ $= \mathcal{O}$, zero: $f_\theta = 0$ デアルカラ, §4 / 所論デ, L $=$ 次元函數が導入サレル。即チ $a \in A$ ノトキ $f_a = f_A$ トスル, 或ハ f_a ヲ L カラ $\mathcal{O}$ へノ寫像ト見テ $D(a) = f_a$ トスレバ D がソノ次元函數デアアル。

定理1. *bicompact space* $\mathcal{M}(1)$ 上デ定義サレタ實數値函數 $f(\mathcal{P})$ / 作ル束群 $\mathcal{P}$ 上トスレバ $\mathcal{L}$ ハ $A \leftrightarrow f_A =$ ヨツテ $\mathcal{O}$ / 中ニ演算 $+$, $-$ (可能ト範圍デ) 及ビ束演算ニツイテ同型ニ表現サレル。

$a \in A$ ノトキ $D(a) = f_A$ トスレバ D ハ L 上ノ次元函數デアアル。 $\mathcal{L}$ $=$ 對應スル $\mathcal{O}$ / 部分集合 (從ツテ D / 値域)

ハ、スベテ $f = \text{ツイテ}$ $f(p) \in \overline{\Delta}$ デアルヤウナ $f \in \mathcal{O}$
 ノ全体デアル。

証明。 最後ノ部分カケガ問題デアル。即チ連続函数
 f ガ常ニ $\overline{\Delta}$ ノ値ヲ取ルトキニ、 $f = f_A$ ナル A ヲ求
 マルコトデアル。

任意ノ $\alpha \in \overline{\Delta}$ ト任意ノ正数 ε トニ對シテ、 $\alpha - \varepsilon < \alpha$
 $\leq \alpha \leq \alpha < \alpha + \varepsilon$ ナル α ガ存在スルコトニ注意スル。
 f ヲ上記ノ極大函数トスル。 ε ヲ或ル正数トスル。

任意ノ $p = \text{ツイテ}$ 、適當ナル $\varepsilon_p^* \in \Delta$ ト p ノ適當ニ近傍
 e_p^* ヲ取レバ、スベテノ $q \in e_p^* = \text{ツイテ}$ $\varepsilon_p^* \leq f(p) \leq \varepsilon_p^*$
 トナル。即チ $\mathcal{O}(L)$ ノ open covering $(e_p^*; p \in \mathcal{O}(L))$ カラ finite covering $e_1, \dots, e_m$ ヲ
 取出シ、 $e_i = e_{p_i}^* = \text{ツイテ}$ $\varepsilon_{p_i}^*$ ヲ ε_i トスル。コノト
 キ $e_i \cdot e_j = 0$ ($i \neq j$) トシテ置ク (コトガ出来ル): 即チ
 $\{e_1, \dots, e_m\} \perp$ 。ソコデ $A^\varepsilon = e_1 \varepsilon_1 + \dots + e_m \varepsilon_m$
 ハ存在シ、 $e_i A^\varepsilon = e_i \varepsilon_i$ $i = 1, \dots, m$ トナル。任意
 ノ p ヲ取レバ、 $e_1 + \dots + e_m = 1$ デアルカラ、或ル e_i
 ガ $\in p$ 、ソレヲ上式カラ $[p(A^\varepsilon)] = \varepsilon_i$ 。從ツテ常ニ
 $[p(A^\varepsilon)] \leq f(p) \leq [p(A^\varepsilon)] + \varepsilon$

同様ニ、任意ノ正数 ε^* ニ對シテ、適當ナル B^{ε^*} ヲ取レ
 バ、スベテノ $p = \text{ツイテ}$ $[p(B^{\varepsilon^*})] - \varepsilon^* \leq f(p) \leq [p(B^{\varepsilon^*})]$
 トナル。從ツテ $f_{A^\varepsilon} \leq f \leq f_{B^{\varepsilon^*}}$ デアルカラ、定理ノ前半
 ニヨリ、 $A^\varepsilon \leq B^{\varepsilon^*}$

今 $\lim \varepsilon_m = 0$ となる $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots > 0$ を取り

$A = \bigvee_{m=1}^{\infty} A^{\varepsilon_m}$ とスレバ、スベテ m, n をツイテ $A^{\varepsilon_m} \subseteq B^{\varepsilon_n}$ デアルカラ $A \subseteq B^{\varepsilon_n}$. 従ツテ

$$f(p) - \varepsilon_m \leq [p(A^{\varepsilon_m})] \leq [p(A)] \leq [p(B^{\varepsilon_n})] \leq f(p) + \varepsilon_n.$$

$\lim \varepsilon_m = 0$ デアルカラ $[p(A)] = f(p)$. 即チ $f = f_A$.

—— (以上) ——

§ 7

$(a) \in (A)$, トキ $[(a)] = [(A)]$ ト定義スル.

$(a) \in (A)$, $(b) \in (B)$, $(a)(b) = (0) + \text{ラバ}$ $(a) + (b) \in (A) + (B)$, 従ツテ $(a)(b) = (0) + \text{ラバ}$ $[(a) + (b)] = [(a)] + [(b)]$ デアル. 故ニ $[\] = \text{positive modular functional}$ デアル. $[\] = \text{quasi-distance } \delta$ を導入スル:

$$\delta((a), (b)) = [(a) + (b)] - [(a)(b)]$$

δ ハ次ノ諸性質ヲ有スル.

$$\begin{cases} \delta((a), (b)) = \delta((b), (a)) \geq 0, & \delta((a), (a)) = 0, \\ \delta((a), (b)) + \delta((b), (c)) \geq \delta((a), (c)), \\ \delta((a), (b)) + \delta((c), (d)) \geq \delta((a)(c), (b)(d)), \\ \delta((a), (b)) + \delta((c), (d)) \geq \delta((a) + (c), (b) + (d)). \end{cases}$$

従ツテ $\delta(,) = 0$ となる関係ハ $[\]$ の束合同ヲ與ヘル

此ノ合同デ $[\]$ の剰餘束 $(\overline{[\]})$ を作ル. ソノ元即チ剰餘

$\bar{a}, \bar{b}, \dots$ トスル: $(\bar{a}) = (a); \delta(x, (a)) = 0$. $(\bar{L})$ ハ L = 準同型デアルカラ, ソレハ *complemented, modular* デアル. $\delta(a, b) = 0$ +ラバ $[a] = [b]$ デアルカラ, 類 $(\bar{a})$ ノ函数トシテ $[(\bar{a})] = [a]$ ト定義スルコトが出来ル. $[]$ ハ $(\bar{L})$ 上ノ實数值 *sharply positive modular functional* デアル.

(注意) 如何ナル超数列 $(\bar{a}_0) > (\bar{a}_1) > \dots > (\bar{a}_\xi) > (\bar{a}_{\xi+1}) > \dots$, $(\bar{b}_0) < (\bar{b}_1) < \dots < (\bar{b}_\xi) < (\bar{b}_{\xi+1}) < \dots$; ξ < φ ヲ考ヘテモ, 上記ノ事カラ, φ ハ高々第二級ノ順序数デアル. 然レツテ $\varphi = \omega$ ノトキ一上ノマシナ列 $\{(\bar{a}_\xi)\}$ (之ハ自然数トナル), $\{(\bar{b}_\xi)\}$ = 夫々 $\prod_\xi (\bar{a}_\xi), \sum_\xi (\bar{b}_\xi)$ が必ズ存在スルコトが証明サレレバ, $(\bar{L})$ が完全束デアルコトニナル.

$(\bar{L})$ = ヲイテ連続性ノ公理が成立スルコトヲ証明スルトキ $\varepsilon \in \varphi = \omega$ ノ場合ニ限レバヨイワケデアル.

カテ, 任意ノ $(a), (b)$ ノ間 = $\sim$, $\leq$, $\geq$ ノ何レカが成立スルカラ, ソレヲ準同型寫像 $(a) \rightarrow (\bar{a})$ デ $(\bar{L})$ = 持込ンデ見レバ, 任意ノ $(\bar{a}), (\bar{b})$ ノ間 = $\sim$, $\leq$, $\geq$ ノ何レカが成立スル. 従ツテ $[]$ ハ $(\bar{L})$ 上ノ次元函数デアル.

補題 10. $(\bar{a}_m) \geq (\bar{a})$ $m=1, 2, \dots$, $[(\bar{a})] = \inf. [(\bar{a}_m)]$ +ラバ, $(\bar{a})$ ハ $(\bar{a}_m)$ ノ meet $\prod_{m=1}^{\infty} (\bar{a}_m)$ デアル. 即チ, スベテ m = ツイテ $(\bar{b}) \leq (\bar{a}_m)$ +ラバ,

$(\overline{b}) \leq (\overline{a})$ デアル。

証明. $(\overline{c}) = (\overline{b}) + (\overline{a})$ トスレバ $(\overline{a_m}) \geq (\overline{c}) \geq (\overline{a})$
 $m = 1, 2, \dots$ デアルカラ $[(\overline{a})] = \inf. [(\overline{a_m})] \geq [(\overline{c})]$
 $\geq [(\overline{a})]$, 従ッテ $[(\overline{c})] = [(\overline{a})]$. $[]$ は *sharply*
positive デアルカラ $(\overline{c}) = (\overline{a})$, 即チ $(\overline{b}) \leq (\overline{a})$.

—— (VX 上) ——

補題 11. $(\overline{a_m}) > (\overline{a_{m+1}})$ $m = 1, 2, \dots$ 十ラバ,
 $(\overline{a}) = \prod_{m=1}^{\infty} (\overline{a_m})$ が存在シ, $[(\overline{a})] = \inf. [(\overline{a_m})]$

証明. $(\overline{a_m}) > (\overline{a_{m+1}})$ ト假定シテヨイ. $(\overline{a_m}) \in (A^m)$
トスレバ $[(A^m)] = [(\overline{a_m})] > [(\overline{a_{m+1}})] = [(A^{m+1})]$ デ
アルカラ, $(A^m) > (A_{m+1}) > (A^{m+1})$ 十レ $\rho_m \in \Delta$ が存
在スル, 従ッテ $[]$ が n 型, 場合ハ除外サレル. $(\overline{a_m}) > (x_m)$
 $> (\overline{a_{m+1}})$ 十レ $(x_m) \in (\rho_m +)$ が存在スル. $(\rho_m +) >$
 $(\rho_{m+1} +)$ デアルカラ $\rho_m + > \rho_{m+1} +$. ソコデ補題 4 =
ヨッテ

$$a_m^* \geq a_{m+1}^*, a_m^* \in \rho_m +, (a_m^*) = (x_m) \quad m = 1, 2, \dots$$

十レ $a_1^*, a_2^*, \dots$ が存在スル. $a = \prod_{m=1}^{\infty} a_m^*, A = \bigwedge_{m=1}^{\infty} \rho_m +$
トスレバ $a \in A$. ソシテ $\inf. \rho_m \geq [(A)]$ デ
アル。

$\rho_m \geq \rho \in \Delta \quad m = 1, 2, \dots$ トスレバ $A \geq \rho +$
従ッテ $(A) \geq (\rho +)$.

$$* = [(A)] \geq \sup(\rho: \inf. \rho_m \geq \rho) = \inf. \rho_m$$

$A = A_\infty$ の区間 $[0, 1]$ で稠密デアルカラ). 従ッテ
 $[A] = \inf. \lambda_m. \quad a \in A$ デアルカラ $(a) \in (A)$,
 従ッテ $[(a)] = \inf. \lambda_m = \inf. [(x_m)] = \inf. [(\overline{x_m})]$
 又 $a_m^* \geq a$ カラ $(\overline{x_m}) = (\overline{a_m^*}) \geq (\overline{a}) \quad m = 1, 2, \dots$.
 従ッテ補題 10 より, $(\overline{a}) = \prod_{m=1}^{\infty} (\overline{x_m}) \quad (a_m) > (x_m)$

$> (a_{m+1})$, 従ッテ $(\overline{a_m}) \geq (\overline{x_m}) \geq (\overline{a_{m+1}})$ デアルカラ
 $\overline{a} = \prod_{m=1}^{\infty} (\overline{a_m}), \quad [(\overline{a})] = \inf. [(\overline{a_m})]$

—— (以上) ——

補題 12. $(\overline{a_m}) > (\overline{a_{m+1}}) \quad m = 1, 2, \dots$;
 $(\overline{a}) = \prod_{m=1}^{\infty} (\overline{a_m})$ + ラベ 任意, $(\overline{b}) = \prod_{m=1}^{\infty} (\overline{b_m})$
 $(\overline{a}) + (\overline{b}) = \prod_{m=1}^{\infty} ((\overline{a_m}) + (\overline{b_m}))$ デアル.

証明. $(\overline{a_m}) > (\overline{a})$ デアルカラ

$$(\overline{a_m}) + (\overline{b}) \geq (\overline{a}) + (\overline{b}) \quad m = 1, 2, \dots$$

$$[(\overline{a_m})] - [(\overline{a})] \geq [(\overline{a_m}) + (\overline{b})] - [(\overline{a}) + (\overline{b})] \geq 0$$

補題 11 = ヨッテ $[(\overline{a})] = \inf. [(\overline{a_m})]$ デアルカラ, 上
 式 = ヨッテ

$$[(\overline{a}) + (\overline{b})] = \inf. [(\overline{a_m}) + (\overline{b_m})]$$

従ッテ補題 10 カラ $(\overline{a}) + (\overline{b}) = \prod_{m=1}^{\infty} ((\overline{a_m}) + (\overline{b_m}))$
 ヲ得ル.

—— (以上) ——

補題 4, 10, 12 對ニ明カニ成立スルカラ, 補題 11, 12

1 双対を成立スル。前ノ注意ニヨレバ、此レデ $(\overline{L})$ が完全束デアルコトト、ソレが連続性ノ公理ヲ満たスコトが示サレタリケデアル。ソレ故 $(\overline{L})$ ハ連続幾何デアル。任意ノ $(\overline{a}), (\overline{b}) = \text{ツイテ}$ $(\overline{a}) \otimes (\overline{b})$ デアルカラ $(\overline{L})$ ハ既約デアル。

此迄ハレバラフ $\mathcal{P}$ ヲ固定シテ考ヘタガ、アラユル (Σ) 1) 極大双対 ideal $\mathcal{P} = \text{ツイテ}$ $(\overline{L})$ ノ直和ヲ考ヘテ見ル。 $\mathcal{P}$ ヲ明示スルタメ $= (\overline{L}) \rightarrow \mathcal{P}(\overline{L}), (\overline{a}) \rightarrow \mathcal{P}(\overline{a}), [\overline{a}] \rightarrow [\mathcal{P}(\overline{a})]$ ト記ス。對應 $a \rightarrow (a)$ 及び $(a) \rightarrow \overline{(a)} = \overline{\mathcal{P}(a)}$ ハ束準同型デアルカラ、對應 $\rightarrow \Sigma \oplus \overline{\mathcal{P}(a)}$ ニ束準同型對應デアル。又 a ヲ固定シテオイテ $[\mathcal{P}(a)] = [\mathcal{P}(u)]$ ヲ考ヘレバ、ソレハ前 § ノ $f_a(\mathcal{P}) = \mathcal{P} + \mathcal{P} + \mathcal{P}$ 。今 $a \neq b$ トスレバ $a + b > a \cdot b = \text{ヨリ}$ $f_{a+b} > f_{a \cdot b}$ 、即チ或ル $\mathcal{P} = \text{ツイテ}$ $[\mathcal{P}(a+b)] > [\mathcal{P}(a \cdot b)]$ 、從ツテ $[\mathcal{P}(a) + \mathcal{P}(b)] > [\mathcal{P}(a) \cdot \mathcal{P}(b)]$ 、從ツテ $\mathcal{P}(a) \neq \mathcal{P}(b)$ トナル、即チ $a \neq b$ ナラバ $\Sigma \oplus \overline{\mathcal{P}(a)} \neq \Sigma \oplus \overline{\mathcal{P}(b)}$ 、ソコデ：

定理 2. $\overline{L}$ ハ既約 + 連続幾何ノ直和 $\Sigma \oplus \overline{\mathcal{P}(\overline{L})}$ 、或ル部分束ニ、對應 $a \rightarrow \Sigma \oplus \overline{\mathcal{P}(a)}$ ニヨツテ、束同型ニ對應スル。 $[\mathcal{P}(a)]$ ハ a デ定ムル $\mathcal{P}$ ノ連続函数デアル。

$\overline{L}$ が ∞ 型或ハ $\aleph$ 型デアル場合ニ從ツテ、各 $\mathcal{P}(\overline{L})$ が無限次元或ハ $\aleph$ 次元デアルコトハ言フマデモタイガ、 $\aleph$ 型ノ $\overline{L} = \text{ツイテ}$ $(\overline{L}) \in (\overline{L})$ ニ本質的ニハ同じモノデアル

コトハ注意ヲ要スル。ソノ理由ハ簡單デ、前 $\delta =$ 述ベク様
 $=$, $(A) > (B)$ + ラバ $[(A)] > [(B)]$ デアルカラ,
 $(a) > (b)$ + ラバ $[(a)] > [(b)]$, 従ッテ $(a) \neq (b)$
 + ラバ $\delta((a), (b)) = 0$ トナルカラ, 類 $\overline{(a)}$ ハ (a) , ミカ
 ラ成ルト云フ, デアル。