



Title	自由位相群ノ極大概週期性
Author(s)	中山, 正
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 254, p. 321-324
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75060
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1127 自由位相群 / 極大概週期性

中山 正 (名大)

岩澤君ハ「位相数学」4-2 = 自由群其、他、色々
 1 群 / 極大概週期性ヲ論ビラレマシタ。コレニ關係シ
 テ、寔ニ自明ニ近イコトアリマスガ、Markhoff
 ノ自由位相群ニ極大概週期的ニナル群アリマス、以
 下ソレヲ述ベテミマス。

S ヲ完全正則ナ位相空間、 F ヲソレデ生成サレタ自由
 位相群トスル。 F ノ任意ノ一ツノ元 g ヲ考ヘ (且シ $g \neq 1$)
 ソレヲ S ノ元ノ中積ト表ハスルニ出テ得ル S ノ元ヲ
 $u_1, u_2, \dots, u_n$ トスル:

$$g = u_{i_1}^{\pm 1} u_{i_2}^{\pm 1} \dots u_{i_m}^{\pm 1}$$

今 m 個ノ元 $u_1, u_2, \dots, u_n$ デ生成サレタ自由群 F_0
 ヲ考ヘ、ソコガ g ヲ含マス F_0 ノ不変部分群 N_0 ヲ ($F_0:$
 N_0)ガ有限 $+ \infty$ ノヲ採ル (ソノ存在ハ Magnusノ定

理より明か。上記岩澤氏所説参照)。今 F_0/N_0 のように
 する表現 $A(g)$, ($g \in F_0$) を $A(g) \neq E + \nu \in \Gamma$
 考へる。簡単のため

$$A_1 = A(u_1), A_2 = A(u_2), \dots, A_n = A(u_n)$$

と置く。又、上に述べた行列群 Γ の連結成分 E と各
 A_i の Γ 中の連続部分群を $A_i(t)$ ($0 \leq t \leq 1$)
 ($A_i(0) = E, A_i(1) = A_i$)

他方 $S =$ 於て各 u_i の至近共通点の近傍 V_i を
 囲み、而して各 i につき、 u_i が V_i の外にない
 $[0, 1]$ の値を持つ連続函数 $f_i(x)$ ($x \in S$) を作る。
 今 S の元 x に対して

$$A(x) = \begin{cases} E & (\text{若し } x \text{ がどの } V_i \text{ にも属せず時}) \\ A_i(f_i(x)) & (x \in V_i \text{ のとき}) \end{cases}$$

と置く。(特に $x = u_i$ のとき $A(u_i) = A_i$ とする
 元を、定義通り Γ の元とする)。然るば $x \rightarrow A(x)$ は
 S から Γ への連続写像となる。こゝで自由群
 群 F の性質により、その拡張として F から Γ への連
 続準同型、即ち F の連続な表現が得られる。特
 に $A(u_i) = A_i$ であり、我々が g として

$$A(g) = A_{i_1}^{\pm 1} \cdots A_{i_n}^{\pm 1} \neq E$$

g は F の任意の元 ($\neq 1$) であるから F は *maximally al-*
most periodic である。(証了)

斯クテ $F = \text{新タ} = \text{完全有界ノ位相が入ッテ}$, ソレデ
 F カマタ位相群ニナルヲケデアルガ, ソレヲ F' デデモ表
 ス。自由位相群 F トシテノモトノ位相ヨリ弱ク, 一般ニ
 ハ本質ニ弱イデアリマセウガ, 一寸面白イコトハ S ノ上
 デハ同じ位相ヲ興ヘルコトデアリマス。何デモナイコト
 デスガ。即チ S ノ一点 u , 及ビソノ近傍 $V = \text{對} V$, 例ノ
 如ク u デノ云々ノ連続函数 $f(x)$ ヲ考ヘ, ソレヲ $\alpha(x) =$
 $e^{\pi i f(x)}$ トデモオケバ S カラ単位円ノ上ヘ, 連続寫像
 ガ得ヲレテ $\alpha(u) = -1$, $\alpha(x) = 1$, $x \in V$. コレヲ上
 記ノ如クトノ表現ニマデ擴張スレバ, ソコデ $|\alpha(g) -$
 $\alpha(u)| < 2$ ナル F' ノ意味, u ノ近傍ノ S ニ属スル部分
 ハ V ニ含まレル。コレデ F' デヤハリ S ガ部分空間ニナ
 ルヲケデアリマス。ソレデ F' ハ丁度例ヘバ自由完全有界
 位相群トヨクベキ性質ヲモツモノデアリマセウ。

次ニ S ハコノ F' ノ中デモ閉ガテキルコトヲ証明シマ
ス (F ニツイテノ同様ノコトハ Markhoffニアル)。
 ソレモ簡單デ, g ヲ S ニ属サヌ F ノ任意ノ元トスル, $u_1,$
 $u_2, \dots, u_n$ ヲ上ト同じヤウニ意味トシ, F_0 ノ ($F_0:$
 N_0)ガ有限ト不変部分群デアッテ mod N_0 デ g ガ $u_1,$
 $\dots, u_n$ ノドレトモ一致シナイ様トモノトスル。ソコデ
 例ヘバ F_0/N_0 ノ tr en+うにて一組ノ表現 $A(h)$ ($h \in F_0$)
 ヲトリ, ソレカラ上記ノ様ニ F ノうにて一組ノ連続表現
 $A(h)$ ($h \in F$)ヲツクルノデアルガ, コノ際 E ト各 $A_i =$

$A(u_i)$ ヲムスブ路ガ U ノ中ノ $A(g)$ ノアル近傍ヲ通
ラナイヤウニスレバ確カニコノ $A(h)$ デノ距離ノ意味デ
 g ハ S カラ正ノ距離ヲモツカラ主張ガ成立ツ。而シテ $A(g)$
ヲトホラス路ノ存在ハ $A(*)$ ガ一次ノ表現デナイヲモツ
テ来テオケバ明カデアラウ。

ナホ、取り立てテ云フホドノ事デモナイカモ知レマセ
ンガ、上ノ如ク S ガ完全有界ナ F' ノ部分空間ニナルヲス
カラ、任意ノ完全正則ノ位相空間ハ適當ノ Compact group
ノ中ニ imbed 出来ルナドトイフコトガ知レルヲケデアリ
マセウ。マス normal デナイ完全有界ノ group ノ存在
セ出レルヲケ。

モ一ツ。 S ト F 及ビ F' トノ關係デスガ、 S' ガ 0 -di-
mensional ナラ F' ニ從ツテ F モ 0 -dimensional
デアリマス。ソレハ例ハバ上述証明中デ V_i ノ開且ツ閉ニ
トリソコノ連続函数 $f_i(x)$ トレテ V_i デハ 1 、 V_i ノ外デ
ハ 0 トスレバ結局 $A(h)$ ハ有限表現デ、ソレデ g ガノト分
離出来ルノデスカラ明カデアリマス。(然レ、モシ S' ガ
 0 -dim. デナケレバ F 及ビ F' ハスベテ ∞ -dim. ニナル
コトニ容易ニ知ラレマセウ)。

—— 以上 ——