OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

| | |
|---|---|
| Title | Hilbert space ノ unit sphere ノ位相的性質 |
| Author(s) | 角谷, 靜夫 |
| Citation | 全国紙上数学談話会. 1943, 255, p. 347-351 |
| Version Type | VoR |
| URL | https://doi.org/10.18910/75062 |
| rights | |
| Note | |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

# 1129. Hilbert space の unit sphere の位相的性質

角谷 静夫(阪大)

$n$-次元 Euclid 空間に於ける Brouwer の fix point theorem は J. Schauder, A. Tychonoff によって次の如く無限次元空間の場合に擴張された。

「$K$ を locally convex + topological linear space $\mathfrak{X}$ 内の compact convex set とし, $x' = \varphi(x)$ を $K$ を $K$ の内へ寫す continuous mapping とすれば $x_0 = \varphi(x_0)$ となる如き $x_0 \in K$ が存在する」

同様な定理が Hilbert space の unit sphere $K = \{x \mid \|x\| \leqq 1\}$ に對して成立するかどうかを調べよう。先ず $K$ を $K$ の中へうつす mapping $x' = \varphi(x)$ が weakly continuous であれば, $K$ が weak topology に關して compact であるから上の結果を用ひれば直ちに fixed point の存在を知る。然るに $x' = \varphi(x)$ が單に strongly continuous であるだけでは不動点の存在は必ずしも結論されない。実際 $K$ を $K$ 自身にうつす homeomorphism で(勿論 strong topology に用ひて) あって fixed point を持たないものが存在することが示される。即ち

**定理1** Hilbert space. $H$ ノ unit sphere $K=\{x \mid \|x\| \leqq 1\}$ ヲ $K$ 自身ニウツス homeomorphism デ不動点ヲ持タナイモノガ存在スル。

**証明** $H$ ノ complete orthogonal normalized system ヲ $\{y_n \mid n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ トスル。次ニ $H$ ヲ $H$ 自身ニウツス unitary transformation $x'=U(x)$ ヲ $y_{n+1}=U(y_n)$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ ニヨッテ定義スル。

然ル後

$$(1) \quad \varphi(x)=(1-\|x\|)\frac{y_0}{2}+U(x)$$

ト置ケバ $x \to \varphi(x)$ ガ求ムル如キ $K$ ノ homeomorphism デアル。

先ヅ $x \to \varphi(x)$ ガ $K$ ノ homeomorphism デアルコトヲ示スタメ $x \neq 0$ トルトキ (1) ヲ次ノ如ク書キ改メル。

$$(2) \quad \varphi(x)=(1-\|x\|)\frac{y_0}{2}+\|x\| U\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

$$=(1-\|x\|)\frac{y_0}{2}+\|x\| U(y)$$

ココニ $y=\frac{x}{\|x\|}$ ハ vector $\overrightarrow{0,x}$ ノ延長ガ unit sphere $K$ ノ surface $S=\{x \mid \|x\|=1\}$ ニ交ハル点ヲ表ハス。然ルトキハ (2) ハ. $\varphi(x)$ ガ $\frac{y_0}{2}$ ト $U(y) \in S$ ヲ結ブ線分 $\overline{\frac{y_0}{2}, U(y)}$ ヲ, $\|x\|$ :

$(1-\|x\|)$ ノ比ニ分ツ点デアルコト、即チ $x$ ガ $\overline{0,y}$ ヲ

分ツノト同ジ比ニ分ツ点デアルコトヲ意味シテヰル。
$y \to U(y)$ ガ $S$, homeomorphism ヲ與ヘルコトハ良ク知ラレテヰルカラ, コレニヨッテ $x \to \varphi(x)$ ガ $K$, homeomorphism ヲ與ヘルコトヲ知ル。

次ニ此, mapping $x \to \varphi(x)$ = fixed point ガ十イコトヲ示サウ。若シ $x_0 \in K$ ニ對シテ $x_0 = \varphi(x_0)$ トナッテストスレバ

$$(3) \quad x_0 \cup (x_0) = (1 - \|x_0\|) \cdot \frac{y_0}{2}$$

トナル。コレヨリ $x_0 \neq 0$ ナルコトハ明カデアリ。又 $x \to U(x)$ ガ unit sphere $K$, surface $S$, homeomorphism デ fixed point ヲ持タナイコトヨリ $\|x_0\| < 1$ デナケレバナラナイコトヲ知ル。次ニ

$$(4) \quad x_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n y_n, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 = \|x_0\|^2 < 1$$

トスレバ

$$(5) \quad x_0 - U(x_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n y_n - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n y_{n+1}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) y_n$$

トナル。コレト (3) トヨリ $a_0 - a_{-1} = \frac{1}{2}(1 - \|x_0\|) > 0$ ニテ且ツ $a_n = a_{n-1}$, $n = \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$ ヲ得ル。後者ヨリハ $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots\cdots$, $a_{-1} = a_{-2} = a_{-3} = \cdots\cdots$ ヲ得ルカラ, コレハ $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ トナルコトニ矛盾ス

ル。

コッテ K 内ニハ $x \to \varphi(x)$, fixed point ハ存在シナイ。

**定理2** K ノ表面 $S = \{x \mid \|x\| = 1\}$ ハ K ノ retract (Borsuk ノ意味) デアル。即チ K ヲ S ニウツス continuous mapping $x' = \psi(x)$ ニテ $x \in S$ ナルトキ $\psi(x) = x$ トナルモノガ存在スル。

**証明** 任意ノ $x \in K$ ニ對シテ $\varphi(x)$ トヱト結ブ vector $\overrightarrow{\varphi(x), x}$ ノ延長ガ S ト交ハル点ヲ $\psi(x)$ ニテ表ハス。$x \to \psi(x)$ ガ求ムル retrating mapping デアルコトガ容易ニ示サレル。

**定理3** S ノ上ニテ identity mapping $\varphi(x) \equiv x$ ハ constant mapping $\varphi(x) \equiv x_0 \in S$ ト homotopic デアル。即チ $S \times (0.1)$ (コレハ $x \in S$, $0 \leqq t \leqq 1$ ナル x, t ノ pair $(x, t)$ 全体ニ普通ノ product topology ヲ與ヘタ空間ヲ意味スル) ヲ S ニウツス continuous mapping $x' = \psi(x, t)$ ガ存在シテ $t = 0$ ノトキ $\psi(x, 0) \equiv x_0$ on S, $t = 1$ ノトキ $\psi(x, 1) \equiv x$ on S トナル。

**証明** 定理2ノ函數 $x' = \psi(x)$ ヲ使ッテ $\psi(x, t) = \psi(tx)$ ト置ケバヨイ。

最後ニ二三ノ**未解決ノ問題**ヲ提出スル。K ト S ト H トハ互ニ homeomorph デアルカ?

bounded linear functional $f(x)$ 一對ニテ $D=\{x \mid f(x) \leqq 0\}$ ハK, Sヌハ H ト homeomorph デアルカ？ KヲK自身ニウツルカ？
(G. Scheeffer-Mariano ノ問題)