



Title	Bounded Hermitian Operator ノ Spectral Theorem ノ簡單ナ証明
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 255, p. 351-360
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75063
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1130. Bounded Hermitian Operator / Spectral Theorem / 簡單+証明

中野 秀五郎

有界 Hermitian Operator / Spectral Theorem / 証明ハ實ニ色々アレガ、其ノ何レモガ難解ナ氣ヲ含ンデ居リマス。以下述ベマス証明ハ其ノ氣非常ニ簡單カト思ヒマス。此処デハ簡單ノタメ Hermitian Operatorヲ考ヘマスガ、以下ノ方法ハ其ノマデ直接 Normal Operatorニ適用サレマス。又 Hilbert space $\mathcal{H}$ ヲ separable トシマスガ non-separableヘモ拡張出来ルコトハ明カデアリマス。

先ヅ記号ノ説明ヲシマス。 $\mathcal{H}$ デ Hilbert spaceヲ表ハシマス。又要素 a_ν ($\nu = 1, 2, \dots$) カラ

aufgespannen + $\mathbb{R}$ closed linear manifold $\mathcal{H}$

$$[a_\nu : \nu = 1, 2, \dots]$$

$\mathcal{H}$ を表はします。又 $\mathcal{H}$ の射影子 $\mathcal{P}$

$$P_\nu [a_\nu : \nu = 1, 2, \dots]$$

$\mathcal{H}$ を表はします。又射影子の集合 $\mathcal{P}$ が abelian Ring

である。

$$1) \mathcal{P} \ni P, Q \rightarrow PQ = QP, \mathcal{P} \ni PQ, \mathcal{P} \ni P+Q$$

$$2) \mathcal{P} \ni P \rightarrow \mathcal{P} \ni I - P$$

$$3) \mathcal{P} \ni P_1 \supseteq P_2 \supseteq \dots \rightarrow \lim_{\nu \rightarrow \infty} P_\nu \in \mathcal{P}$$

を意味します。又 $\mathcal{H}$ が有界 Hermitian Operator

を表はし、其 norm は $\|H\|$ を表します。

定理 I

$$(1) [H^\nu f_0, \nu = 0, 1, 2, \dots] = \mathcal{G}$$

である。又 $\mathcal{H}$ と交換可能 + 射影子の全体 $\mathcal{P}$ により

成る $\mathcal{P}$ は abelian Ring である。然るに

$$(2) [P f_0, P \in \mathcal{P}] = \mathcal{G}$$

である。

証明 $\mathcal{H}$ が作られる Polynom $P(\mathcal{H})$

を表はします。 Q_1, Q_2 が $\mathcal{H}$ と commutative + 射影

子になります。假定 (1) = 有り

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_\nu'(H) f_0 = Q_1 f_0, \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} P_\mu''(H) f_0 = Q_2 f_0$$

デアルヤリ + Polynormal P'_ν, P''_μ が存在シマス。然
ルトキハ $\mu \rightarrow \infty, \nu \rightarrow \infty$ 対シ

$$\begin{aligned} (P'_\nu(H)f_0, H^n P''_\mu(H)f_0) &\rightarrow (Q_1 f_0, H^n Q_2 f_0) \\ &\parallel \\ (P''_\mu^*(H)f_0, H^n P'_\mu(H)f_0) &\rightarrow (Q_2 f_0, H^n Q_1 f_0) \end{aligned}$$

故ニ

$$(Q_2 Q_1 f_0, H^n f_0) = (Q_1 Q_2 f_0, H^n f_0)$$

デアリマス。従ッテ假定(1)カラ $Q_2 Q_1 = Q_1 Q_2$ が得ラレ
マス。故ニ $\mathcal{K}$ ハ abelian Ring デアリマス。

次ニ Q 7 $\mathcal{K}$ ノ スベラト commutative + 射影子ト
シタトキハ, $Q \in \mathcal{K}$ デアルユトヲ証明シマス。任意ノ 要
素 g 対シテ

$$P_n[H^n g; n=0, 1, \dots] \in \mathcal{K}$$

デアリマスカラ

$$Qg = \lim_{\nu \rightarrow \infty} P'_\nu(H)g$$

$$QHg = \lim_{\mu \rightarrow \infty} P''_\mu(H)Hg$$

ナル Polynormal $P'_\nu(H), P''_\mu(H)$ が存在シマス。

然ルトキハ

$$\begin{aligned} (P'_\nu(H)g, P''_\mu(H)Hg) &\rightarrow (Qg, QHg) \\ &\parallel \\ (P''_\mu^*(H)Hg, P'_\nu^*(H)g) &\rightarrow (QHg, Qg) \end{aligned}$$

故ニ $(HQg, g) = (g, HQg)$ が得ラレマス。此レヲ

ヲ HQ が *derivation* デアルコトが容易ニ知ラレマス
 又 $HQ = (HQ)^* = QH$ デアリマス。従ツテ $Q \in \mathcal{K}$
 故ニ $[Pf_0 : P \in \mathcal{K}] = \mathcal{G}$ ヲ証明シマス。

$$P_n[Pf_0, P \in \mathcal{K}] = Q$$

トシマス

$$PQ = QPQ = QP \quad (P \in \mathcal{K})$$

トアリマスカラ $Q \in \mathcal{K}$ デアリマス。然レモ $Qf_0 = f_0$ デアリマスカラ

$$(I - Q)f_0 = 0 \quad \text{従ツテ} \quad (I - Q)H^n f_0 = 0$$

故ニ 假定 (1) ニヨリ $I = Q$ デアリマス。

此ノ定理ニアルマウ $= \mathcal{K}$ ト *commutative* +
 射影子ヲ含ム *abelian Ring* $\mathcal{K}$ ヲ *simple* ト云
 ヒマス。

定理 2 $\mathcal{K}$ ヲ *simple* + *abelian Ring*.
 H が $\mathcal{K}$ ノスベテノ射影子ト *commutative* トシマ
 スト

$$(HP_1 f, f) \geq 0, \quad (HP_2 f, f) \leq 0 \quad (f \in \mathcal{G})$$

$$P_1 + P_2 = I, \quad P_1 P_2 = 0, \quad P_1, P_2 \in \mathcal{K}$$

ナル P_1, P_2 が存在シマス。

証明 $\mathcal{K}$ が *simple* デスカラ定理 1, 証明ノ様
 ニシテ

$$(2) \quad [Pf_0 : P \in \mathcal{K}] = \mathcal{G}$$

ナル f_0 が存在スルコトが証明出来マス。

$$S = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_n P_n$$

$$P_m P_l = 0, \quad P_m \in \mathcal{P}_n \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

1 形, Hermitian S 7 $\mathcal{P}_n$ デノ スペクトル形ト云フ
コトトシマス。又 S ノ 各項ノ中デ, $\alpha_\nu \geq 0$ ノ 項ノミノ
和ヲ S^+ , $\alpha_\nu \leq 0$ ノ 項ノミノ 和ヲ S^- ト表ハスユトシ
マス。(2) ニヨリ

$$(3) \quad H f_0 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} S_\nu f_0$$

ナル スペクトル形 S_ν ガ 存在シマス。然カモ S_ν ノ 係数
 α_ν ハ real 7

$$|\alpha_\nu| \leq 2 \|H\|$$

ヲ示メ得ルコトハ

$$\|H f_0 - S f_0\|^2 = \sum_{\nu=1}^n \|(H P_\nu - \alpha_\nu P_\nu) f_0\|^2$$

$\alpha_\nu \geq 2 \|H\|$ トスレバ

$$\begin{aligned} \|(H P_\nu - \alpha_\nu P_\nu) f_0\| &\geq 2 \|H\| \|P_\nu f_0\| - \|H P_\nu f_0\| \\ &\geq \|H P_\nu f_0\| \end{aligned}$$

ヨリ 明ラカデアリマス。従ツテ $S_\nu^+ f_0$ ハ 有界デスカ
ラ S_ν^+ カラ 適當ニ 部分列ヲ トッタモノヲ S_ν^+ トスレバ

$$(4) \quad W = \lim_{\nu \rightarrow \infty} S_\nu^+ f_0 = f_1$$

デアル様ニ f_1 ガ 存在シマス。又 (3) ヨリ

$$H S f_0 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} S_\nu S f_0$$

然カモ $\|S_\nu\|$ が有界デスカラ, (2) = 3)

$$(5) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} S_\nu = H$$

デアリマス。

(4) ト (5) カラ $P \in \mathcal{K}$ に対シテ

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \infty} (S_\nu, S_\nu^+ f_0, P f_0) &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} (S_\nu^+ f_0, S_\nu P f_0) \\ &= (f_1, H P f_0) = (H f_1, P f_0) \end{aligned}$$

然カルニ, 明カニ

$$(S_\nu, S_\nu^+ f_0, P f_0) = (S_\nu S_\nu^+ P f_0, P f_0) \geq 0$$

デアリマスカラ

$$(H f_\nu, P f_0) \geq 0 \quad (P \in \mathcal{K})$$

従ヒテ, 又

$$(H f_1, P S_\nu^+ f_0) \geq 0$$

$$\text{故ニ} \quad (H f_1, P f_1) \geq 0 \quad (P \in \mathcal{K})$$

デアリマス。今

$$P_1 = P_2 [P f_1, P \in \mathcal{K}]$$

トシマス。ト, 明カニ $P_1 \in \mathcal{K}$ デ然カモ

$$g = \alpha_1 P_1 f_1 + \dots + \alpha_\nu P_\nu f_\nu$$

ニ對シテハ

$$(H g, g) = \sum \alpha_\nu^2 (H f_\nu, P_\nu f_\nu) \geq 0$$

デアリマスカラ

$$(H P_1 f, f) = (H P_1 f, P_1 f) \geq 0 \quad (f \in \mathcal{G})$$

デアリマス。又

$$P_2 = I - P_1$$

トシマス。 $P_2 f_1 = f_1 - P_1 f_1 = 0$ デアリマスカラ (4)
ヨリ

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} S_\nu^+ P_2 f_0 = P_2 f_1 = 0$$

デアリマス。従ッテ $P \in \mathcal{K} = \text{對シ}$

$$(S_\nu P_2 f_0, P f_0) \leq (S_\nu^+ P_2 f_0, P f_0) \rightarrow 0$$

デアリマスカラ, (5) = ヨリ

$$(H P_2 f_0, P f_0) \leq 0 \quad (P \in \mathcal{K})$$

故ニ (2) = ヨリ P_1 の場合ト同様ニシテ

$$(H P_2 f, f) \leq 0 \quad (f \in \mathcal{U})$$

カ得ラレマス。

定理 3 $\mathcal{U}$ デノ有界 Hermitian $H = \text{對シ}$

H ト commutative + 射影子カラナル simple
+ abelian ring $\mathcal{K}$ カ存在シ $\mathcal{K}$ ノスペクトル形 S_ν
ヲ適當ニトレバ

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|H - S_\nu\| = 0$$

トナル。

証明 $f_1 \neq 0 = \text{對シ}$

$$\mathcal{G}_1 = [H_\nu^{f_1} : \nu = 0, 1, 2, \dots]$$

トシ, $\mathcal{G}_1$ ト直立シテ, $f_2 \in 0$ ナル要素ニ對シ

$$\mathcal{G}_2 = [H_\nu^{f_2} : \nu = 0, 1, 2, \dots]$$

トシ、以下同様ニシ、高々可附番個ノ

$$\mathcal{G}_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

が得ラレマス。此ノ $\mathcal{G}_\nu$ ハ互ニ直交シテ

$$[\mathcal{G}_\nu : \nu = 1, 2, \dots] = \mathcal{G}$$

デアリマス。 $\mathcal{G}_\nu$ ハ定理1ノ假定(1)ヲ満足シマス

カラ、 $\mathcal{K}$ が得ラレマス。但シ $\mathcal{K}_\nu$ ハ I ノカハリニ

$P_2[\mathcal{G}_\nu]$ がアリマス。 $\mathcal{K}_\nu$ 全体カラ作ラレル *abelian ring* ヲ $\mathcal{K}$ トスレバ

$$f_0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} \frac{f_\nu}{\|f_\nu\|}$$

ニ對シ

$$[Pf_0 : P \in \mathcal{K}] = \mathcal{G}$$

デアリマスカラ、 $\mathcal{K}$ ハ *einfach* デアリマス。

然カモ $\mathcal{K}$ ハ明カニ *commutative* デスカラ定

理2ニヨリ

$$(HP_1 f, f) \geq 0, \quad (HP_2 f, f) \leq 0$$

$$P_1 + P_2 = I, \quad P_1 P_2 = 0, \quad P_1, P_2 \in \mathcal{G}$$

ナル P_1, P_2 が存在シマス。然ルトキハ

$$\gamma = \|H\|$$

ニ對シテ

$$(\gamma P_1 f, f) \geq (H P_1 f, f) \geq 0$$

$$-(\gamma P_2 f, f) \leq (H P_2 f, f) \leq 0$$

デスカラ

$$\left(\frac{1}{2}\gamma P_1 f, f\right) \geq \left((H - \frac{1}{2}\gamma P_1)P_1 f, f\right) \geq -\left(\frac{1}{2}\gamma P_1 f, f\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\gamma P_2 f, f\right) \geq \left((H + \frac{1}{2}\gamma P_2)P_2 f, f\right) \geq -\left(\frac{1}{2}\gamma P_2 f, f\right)$$

故 =

$$\frac{1}{2}\gamma(f, f) \geq \left((H - \frac{1}{2}\gamma P_1 + \frac{1}{2}\gamma P_2)f, f\right) \geq -\frac{1}{2}\gamma(f, f)$$

従ッテ

$$\|H - \frac{1}{2}\gamma P_1 + \frac{1}{2}\gamma P_2\| \leq \frac{1}{2}\gamma$$

トナリヌスカヲ，以下同様ニシテ S_ν が得ラレマス。

追記

定理2デハ定理1ノ假定ヲ証明シ、定理3デ、 $\mathcal{G}_\nu$ ノ各ニツイテ $P_1^{(\nu)}, P_2^{(\nu)}$ ヲ求メテ $P_1 = \sum P_1^{(\nu)}$, $P_2 = \sum P_2^{(\nu)}$ トシタ方が簡便ニナルヤウデス。又上ノ証明デハ有限次元ノ場合ヲ同様ニ含ンデ居リマス。而カニ有限次元ノ場合ハ定理1カラ直チニ得ラレルワケデス。即チ定理3ノヤリニ $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ トシ、 $\mathcal{G}_1$ デ $\mathcal{G}_2$ ヲ考ヘヌスト定理1ノ(2)ニヨリ $\mathcal{G}_1$ ハ有限次元デアリヌスカヲ

$$P_1 + P_2 + \dots + P_k = I, \quad P_\mu P_\nu = 0 \ (\mu \neq \nu), \quad P_\nu \in \mathcal{G}_2$$

$$[P_1 f_0, \dots, P_k f_0] = \mathcal{G}_1$$

ナル $P_1, \dots, P_k$ が存在シマス。従ッテ $\mathcal{K}$ ハ $\mathcal{G}_1$ ノ次元ニ等シク

$$g_\nu = \frac{P_\nu f_0}{\|P_\nu f_0\|}$$

トシテ q_j , 正規直交等 $g_1, g_2, \dots$ が得ラレ,
然カモ

$$P_{\perp} H = H P_{\perp}$$

デスカラ

$$H g_{\perp} = \lambda_{\perp} g_{\perp}$$

トナリ、 H が diagonal form トナリニシタ。

———— 18. 6. 11. ————