OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	のるむ環 ト スペクトル定理
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 255, p. 362-364
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75065
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

1132. のもむ環トスペクトル定理

吉田　耕作(名大)

對稱線型作用素ノスペクトル分解定理ガ束或ハ束環ノ見地カラ取扱ヒ得ルコトハ既ニ良ク知ラレタコトデアルガ，問題ハソノ取扱ヒ方ニアルト思フ。以下ニ述ベルノハ格別巧イ方デモナイガ，先ノ談話240号250号ニ關聯シテ讀ンデ頂キタイ。

Tヲ對稱線型作用素，RヲTカラ生成サレタ作用素環トスル。Rハ實數ヲ係數トスルのもむ環：$\|T\| = \sup_{\|f\|=1} \|T\cdot f\|$ デアル。各$S \in R$ハ對稱線型作用素ダカラ

$$\|S\| = \sup_{\|f\|=1} |(S\cdot f, f)|$$

從ッテ $\|S^2\| = \sup|(S^2\cdot f, f)| = \sup(Sf, Sf) = \|S\|^2$，故ニ

(1)　$\|S\| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|S^n\|}$

又Sノ graph ヲ考ヘテ容易ニワカル様ニ[1]

(2)　$S \neq 0$ ナラバ　$(1+S^2)^{-1} \in R$

上ノニツノ性質カラ　Rハ或ルこむはぐ空間ヲ

---

(1)　例ヘバ Murray，本ノ42頁

(2)　のもむ環ノ基本定理

ノ上ノ連續函數ノ全体トシテ環同型的ニ表現サレル譯デアル。

$$S \longleftrightarrow S(M), \quad M \in \mathfrak{M}$$

コノコトカラ $(S\cdot f, f) \geqq 0$ (全テノ f ニ對シテ) ヲ $S \geqq 0$ トシタトキ $\mathcal{R}$ が束ニナルコトが云ヘル。即チ $S(M) \geqq 0$ ($on\ \mathfrak{M}$) ヲ $S \geqq 0$ ト書クトキ

(3) $S \geqq 0$ ト $S \geqq 0$ トハ同等

ナコトが云ヘレバヨイコトハ明カデアルが

(3)ノ証明ハ容易イ. $S \geqq 0$ トスレバ $S = T^2$ ナル如キ T ($T(M) = \sqrt{S(M)}$) がアルカラ $S = T^2 \geqq 0$ 逆ニ $S \geqq 0$ トスル。$S_1(M) = \sup(S(M), 0)$, $S_2(M) = \sup(-S(M), 0)$ トスレバ, 上カラ

$$S = S_1 - S_2, \quad S_1 S_2 = 0, \quad S_i \geqq 0, \quad S_i \geqq 0 \quad (i = 1, 2)$$

故ニ $S_2 = 0$ ヲ云ヘバヨイ。所が $S \geqq 0$ ニヨリ

$$\begin{cases} (S\cdot S_2 f, S_2 f) = (-S_2^2 f, S_2 f) \\ \qquad\qquad = (-S_2^3 f, f) \geqq 0 \\ 從ッテ (-S_2^3) \geqq 0 \text{ 一方 } S_2^3 \geqq 0 \text{ ハ明カナカラ} \\ S_2^3 = 0 \end{cases}$$

之カラ $S_2^4 = 0$ ヲ得テ $S = 0$[1]

斯クシテ $\mathcal{R}$ ハ束デアルコトガワカッタ。ソウスレバ

---

(1) $\|S^2\| = \|S\|^2$ カラ $\mathcal{R}$ ハ nilpotent ナ元ヲ含マナイ。

R が of-finite + コトハ又簡単ニ証明デキル。(談話1072)
コノ辺クレバすぺくとる定理ノ証明ハ，Baire ノ category 論法（談話1072）デモ或ヒハ多クノ人ガ指摘シタヤウニ Freudenthal ノすぺくとる定理デモ使ヘバ直グ出ルル。

兎ニ角 對称性 ノ定義カラ直グ出テクル(1)，(2)ガ丁度實のる環ノ表現定理ヲ使フタメノ條件ニナッテヰルコトガ，問題ノ核心デアル所ノ R が束+ルコトノ証明ニ役立ツワケデアリマス。