



Title	不変測度ノ存在ニ就テ
Author(s)	河田, 敬義
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 255, p. 364-376
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75066
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1133. 不変測度ノ存在 = 就テ

河 田 敬 義 (文理大)

X ヲ或ル点集合, $\mathbb{F}$ ヲ X ノ上ノ Borel-集合体, μ ヲ $\mathbb{F}$ ヲ定義サレタ Lebesgue 式測度トスル。但 $\mu(X) = \infty$, トキハ

$$(1) \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad E_n \in \mathbb{F}, \quad \mu(E_n) < \infty$$

ト表ハサレルモ、トスル。

次 = X 上に定義サレタ 一対一 変換の 1 作ル 群 O が 與ヘラレテ キル モノ トスル。此ノ 時

$$(2) E \in \mathbb{F} \rightarrow \sigma E \in \mathbb{F}$$

ヲ 假定スル。

定義 1 $\mathbb{F}$ 上に定義サレタ 測度 m が *invariantes Mass* デアルトハ

$$(3) m(\sigma E) = m(E), \sigma \in O, E \in \mathbb{F}$$

$$(4) m(E) = 0 \iff \mu(E) = 0$$

$$(5) m(E) < \infty \iff \mu(E) < \infty$$

ナルコトニスル。

此処デハ *invariantes Mass* 1 存在スルタメノ 條件ヲ考ヘテミル。特ニ $\mu(X) < \infty$, 且ツ O が *abelsch* 1 場合ニハ A. Markoff が C. R. URSS. 17 (1937), 459—462 デ *Fixpunktsatz* ヲ用ヒテ解決シテキル。吾々ノ 目標ハ

定理 1 *invariantes Mass* m 1 存在スルタメノ 必要ナカ条件ハ

$$(1) \text{ 任意ニ與ヘラレタ } \varepsilon > 0 \text{ ニ對シテ } \delta(\varepsilon) > 0 \text{ カ定マリ}$$

$$(b) \mu(E) < \delta, E \sim E' \text{ ナラバ } \mu(E') < \varepsilon$$

トナルコト。及ビ

$$(c) \text{ 任意ニ與ヘラレタ } M = \text{對シテ } N \text{ カ定マリ}$$

$$(d) \mu(E) < M, E \sim E' \text{ ナラバ } \mu(E') < N$$

トナルコトデアル。

此処 $= E \sim E'$ トハ *Zerlegungsgleich* + ν
コト, 即チ

定義 $A \sim B$ トハ $A = \bigvee_{n=0}^{\infty} A_n$, $B = \bigvee_{n=0}^{\infty} B_n$,
($A_n, B_n \in \mathcal{F}$), $\mu(A_0) = \mu(B_0) = 0$, $A_i \cap A_j = 0$
($i \neq j$), $B_i \cap B_j = 0$ ($i \neq j$) ナリ且 $\forall n = 1, 2, \dots$
 $=$ 對シテ適當ニ $\sigma_n \in \mathcal{G}$

$$A_n = \sigma_n B_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

トナルコトヲイフ。 $\sim$ ナル關係ハ明カニ "Äquivalenz-
relation" ヲ満足スル。

先ツ (1), (2) が必要ナルコトヲ証明シヨウ。

(1) ト (5) カラ $X = \bigvee_{n=1}^{\infty} E_n$, $m(E_n) < \infty$ トナルカ
ヲ, (4) = ヨツテ Radon-Nikodym ノ定理が使ヘテ

$$\mu(E) = \int_E f(x) m(dx), \quad m(E) = \int_E g(x) \mu(dx),$$

$$f(x) \geq 0, \quad g(x) \geq 0$$

ト表ハサレル。コノトキ

$$E_n = \{x; f(x) \geq n\}, \quad F_n = \{x; g(x) \geq n\}$$

トオクト, n ヲ十分大ニスレバ

$$m(E_n) < \infty, \quad \mu(F_n) < \infty$$

トナル。何トナレバ $m(E_n) = \infty$, $n = 1, 2, \dots$ トスレバ

$B \in \mathcal{F}$ ヲトツテ

$$m(B) < \infty, \quad m(B \cap E_n \cap E_{n+1}^c) = d_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n = \infty$$

= 出来るカラ, $\forall B = \text{對シテハ}$

$$\mu(B) = \int_B f(x) m(dx) \geq \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n = \infty$$

トナリ (5) / 假定 = 反スル。

故 = $m(E_{n_0}) < \infty$ トスレバ, $\mu(E_{n_0}) < \infty$ トナリ,
又 (5) カラ $m(\bigwedge_{n=1}^{\infty} E_n) = 0$, 従ッテ (4) カラ

$$0 = \mu(\bigwedge_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\bigwedge_{n=n_1}^{\infty} E_n) \text{ トナルカラ, } n_1$$

ヲ十分大キクトレバ $\mu(E_{n_1}) < \varepsilon/2$ = 出来る。コナリ

$\delta_1 = \varepsilon/2n_1$ ト取レバ, $m(A) < \delta_1$ = 對シテ

$$\mu(A) \leq \mu(E_{n_1}) + \mu(A \cap E_{n_1}^c)$$

$$< \varepsilon/2 + n_1 \varepsilon/2n_1 = \varepsilon$$

トナル。同様 = δ_1 = 對シテ δ 十分小キクトレバ

$\mu(A) < \delta$ トラバ $m(A) < \delta_1$ = ナル。

ナリ m の invariant デアルカラ $E \sim E'$ トラバ
 $m(E) = m(E')$ トナルカラ, $\mu(E) < \delta$ トスレバ, 先
ヅ $m(E) < \delta$, 従ッテ $m(E') < \delta_1$ トナリ, $\mu(E') < \varepsilon$
ヲ得ル。

(7) / 必要ナルコト E 同様デアル。

ナリ 次 = (1) (2) / 十分ナルコトヲ証明スル / デアルカ,

初メ = O_f が ergodisch / 場合ヲ考ヘル。

定義 3 $\mathcal{O}_f$ が ergodisch デアルトハ、任意、
 $E, F \in \mathcal{F}$, $\mu(E) > 0$, $\mu(F) > 0$ = 對シテ、適當
 $\sigma \in \mathcal{O}_f$ デアルト

$$\mu(E \cap \sigma F) > 0$$

ヲ示メ得ルコトヲイフ。コレハ (μ -測度 0ヲ除イテ)
 $\mathcal{O}_f$ -invariant + $E \in \mathcal{F}$ ハ $\mu(E) = 0$ 又ハ $\mu(X-E) = 0$
 ナルコト・同値デアル。

コレカラ直チニ得ラレルコトハ

定理 2 $\mathcal{O}_f$ が ergodisch + ラベ、 m_1, m_2 +
 ルニツノ invariante Masse, 間ニハ

$$m_1(E) = c \cdot m_2(E), \quad 0 < c < \infty$$

ナル關係ガアル。

(証) (1), (4), (5) ガ Radon-Nikodym・定
 理ガ使ヘテ

$$m_1(E) = \int_E f(x) m_2(dx)$$

ト表ハサレル。今 $f(x)$ ガ m_2 -測度 0 (從ツテ μ -Mass 0)
 以外デ Konst = ナルコトヲ見レバヨイデアアルガ、ソウ
 デナイトスレバ、アル $\alpha < \beta$ = 對シテ

$$A = \{x; f(x) \geq \beta\}, \quad B = \{x, f(x) \leq \alpha\}$$

ガ、 $m_2(A) > 0$, $m_2(B) > 0$ デナケレバナラヌ。從ツテ
 (4) カラ $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$ トナリ、 $\mathcal{O}_f$ が ergodisch
 ナルコトカラ、アル $C = A \cap \sigma B$ = 對シテ $\mu(C) > 0$, 即

$m_2(C) > 0$ とする。

然るに $A \supset C$ から $m_1(C) \geq \rho m_2(C)$, 且ち

$\sigma^{-1}C \subset B$ から $m_1(\sigma^{-1}C) \leq \lambda m_2(C)$ とあり, $\lambda < \rho$,

$m_2(C) > 0$, $m_1(C) = m_1(\sigma^{-1}C)$ と矛盾する。(証了)

すなわち定理 1 の条件 (1) (ロ) が十分であることより σ が *ergodisch* の場合 = 証明しよう。

今 $\mathbb{F}^* = \{A; A \in \mathbb{F}, \mu(A) < \infty\}$ とする。条件 (ロ)

から $A \in \mathbb{F}^*$, $A \sim B$ ならば $B \in \mathbb{F}^*$ とする。

定義 4 $\mathbb{F}^* \ni A, B$, $A \succ B$ とは $A \supset A^* \sim B$,

$\mu(A - A^*) > 0$ とする A^* の存在することをいふ。これに

$A \sim B^* \supset B$, $\mu(B^* - B) > 0$ とする B^* がアルトイッテ
に同じである。

$\succ$ とする関係が *transitive* であることは明らかである。

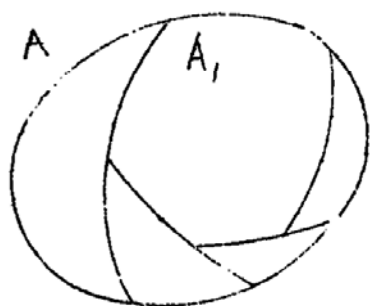
補題 1 $\mu(A) = 0$ とするとき, $A \sim B$ とするとき, 必要

十分条件は $\mu(B) = 0$ とするだけである。

(証) 定義 2 の条件 (b) による

補題 2 $\mathbb{F}^* \ni A_0$ の決まり $A_0 \succ A_0$ とする。

(証) $A_0 \succ A_0$ とすれば $A_0 \sim A_1 \subset A_0$, $\mu(A - A_1) > 0$



とある。この $A \sim A_1$ とする対応で

$A_1 \sim A_2 \subset A_1$, $A_2 \sim A_3 \subset A_2$, ...

とすれば

$A_0 - A_1 \sim A_1 - A_2 \sim A_2 - A_3 \sim \dots$,

$$\text{且ツ } (A_i - A_{i+1}) \cap (A_j - A_{j+1}) = \emptyset \quad (i \neq j)$$

$$\text{カヲ } \mu(A) \cong \sum \mu(A_i - A_{i+1}). \text{ 即 } \lim \mu(A_i - A_{i+1}) = 0$$

トナル。コレハ (6) の假定ニ反スル。(6) の對面ヲトレ

$$\text{ハ } \mu(E') > \varepsilon + \eta \text{ 且 } \mu(E) > \delta$$

$$\boxed{\text{補題3}} \quad A \sim B, C \sim D, A \cap C = B \cap D = \emptyset \text{ トラ}$$

$$\text{ハ } A \cup C \sim B \cup D$$

$$\boxed{\text{補題4}} \quad \text{若 } \mu \text{ が ergodisch トラバ } \mathbb{R}^* \ni A, B = \text{對}$$

シテ $A \sim B, A \succ B, A \prec B$ / イツレカ一ツ、然レモ只一ツが成立スル。

(証) イツレカ一ツが成立ツコトハ "Principle of exhaustion" = ヌル。只一ツナルコトハ $A \sim B$ 、且ツ $A \succ B$ トスレバ $A \cap A^* \sim B \sim A, \mu(A - A^*) > 0$ トナリ、

補題2カラ矛盾トナル。又 $A \succ B, B \succ A$ トスレバ

$A \cap A^* \sim B, B \cap B^* \sim A$ トナリ、集合論ニ於ケル Cantor

Berndixon の定理同様 $A \sim B$ トナリ、前ノ場合と同じ矛盾ヲ生ズル。

$$\boxed{\text{補題5}} \quad A_1 \sim A_2, A_1 \supset B_1, A_2 \supset B_2, B_1 \sim A_2 \text{ トラ}$$

$$\text{ハ, } A_1 - B_1 \sim A_2 - B_2.$$

(証) $A_1 - B_1 \succ A_2 - B_2$ トスレバ、 $B_1 \sim B_2$ ヲ合セテ $A_1 \succ A_2$ トナリ矛盾ヲ生ズル。

$$\boxed{\text{補題6}} \quad A_1 \sim A_2, B_1 \sim B_2, A_1 \succ B_1 \text{ トラバ, } A_2 \succ B_2$$

トナル。

$$\text{(証)} \quad A_1 \cap A_1^* \sim B_1 \sim B_2, \mu(A_1 - A_1^*) > 0. \text{ 故ニ}$$

$A_1 \sim A_2$, 對應デ $A_2^* \sim A_1^*$ トナルトスレバ, 補題5ト /
 トカヲ $A_1 - A_1^* \sim A_2 - A_2^*$, $\mu(A_2 - A_2^*) > 0$ トナリ $A_2 \succ B_2$
 トナル。

補題7 $\mathbb{R}^* \ni A, A = \bigvee_{n=1}^{\infty} A_n, A_i \cap A_j = 0, (i \neq j),$
 $A_1 \sim A_2 \sim \dots$ ナラバ $\mu(A) = 0$.

(証) $\mu(A_1) > \varepsilon > 0$ トスレバ 假定 (b) カヲ $\mu(A_n) > \delta$
 トナリ $\mu(A) = \infty$ ナラケレバ ナラヌ。

定義5 $a A_0 = \{A; A \sim A_0\} (A_0 \in \mathbb{R}^*)$ トスレ
 バ $\mathbb{R}^*$ へ Klasse = 分けラレル。

特 = $\theta = \{A; \mu(A) = 0\}$ ハ一ツノ Klasse ナル。

定義6 $a \ni A, b \ni B, A \succ B$ ナラバ A, B ノアルト
 $a > b$ トスル。コレハ補題6カラ キチントシタ意味ガアル。

補題8 $a = b, a > b, a < b$ ノイヅレカ 只一ツガ
 成立スル。

定義7 $a \ni A, b \ni B, A \cap B = 0$ ナラバ AB ノアル
 トキ $a + b = a_{A \cup B}$ ト定義スル。補題3カラ $a + b$ ハ代表
 ノトリ方 = 無関係 = キマル。特 = $a + \theta = a$ 。

補題9 (i) $a + b$ ガ存在スレバ, $b + a \in$ 存在シ
 テ $a + b = b + a$
 (ii) $a + b, (a + b) + c$ ガ存在スレバ $b + c,$
 $a + (b + c) \in$ 存在シテ $(a + b) + c = a + (b + c)$

- (iii) $a-b$ が存在スレバ $(a-b)+b=a$
- (iv) $a+b$ が存在スレバ $(a+b)-b=a$
- (v) $a+b$ が存在スレバ $a \leq a+b$
- (vi) $a-b$ が存在スルタメノ條件ハ $a > b$
- (vii) $a+x=b$ カトケル、ハ $a \leq b$ ノトキニ限リ、ソノ解ハ一意ニキマル。
- (viii) $a < b$ ハ $b=a+x$, $x > 0$ ナル x ノ存在スルタメノ必要十分條件デアル。
- (ix) $a+c, b+c$ が存在スレバ、 $a \leq b$ ト $a+c \leq b+c$ トハ同値デアル。
- (x) $a \leq c, b \leq d$ デ、若シ $c+d$ が存在スルナラバ、 $a+b$ モ存在シテ $a+b \leq c+d$
- (xi) $a \geq b, a \geq c$ ナラバ $b \leq c$ ト $a-c \leq b-c$ トハ同値デアル。

(証) イツレモ定義カラ殆ンド明カデアルガ

(viii) $a > b$ ナラ $a+c > b+c$ ハヨイガ、逆ニ $a+c > b+c$ ノトキ $a \leq b$ トスレバ補題5ニ反スル。

(x) $b > c$ ナラバ $a \ni A, b \ni B, c \ni C, A \supset B \supset C, \mu(B-C) > 0$ ニレルカラ

$A \supset A-C \supset A-B, \mu((A-C)-(A-B)) = \mu(B-C) > 0$
即チ $a-c > b-c$ トナル。

以下 J. von Neumann, Continuous geometry, 次元ノ決定ト全く同ジデアルカラ証明ハ略ス。

定義 8 $\overbrace{a + \dots + a}^n$ 存在スルトキ na トカ。

補題 10 $na \leq b, (n = 1, 2, \dots)$ + ラベ $a = \theta$

補題 11 $a \neq \theta, b =$ 對シテ $b = na + b_1, b_1 < a$

+ ル n が 只 一 ツ キ マ ル。

$(0 \leq n < \infty)$ コノトキ $n = [b:a]$ トカ。

定義 9 a が minimal トハ $a > b > \theta + \nu b, +$
イコトヲイフ。

補題 12 a が minimal テ + ヲ レバ, $a \geq 2b, b \neq \theta$
+ ル b が 存在スル。

以テ minimal + 元 a_1 + イ 場合ヲ 考ヘル。

定義 10 $\{a_n\}$ が minimal + 列 が ア ル トハ $a_n \geq 2a_{n+1}$
 $a_n \neq \theta$ ヲイフ。 ($n = 0, 1, 2, \dots$)

補題 13 minimal + 列 $\{a_n\}$ = 對シテ

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[b:a_n]}{[a:b_n]}$ が 存在シテ $\neq 0, \neq \infty$ デアル。

コレヲ $(b:a)$ デアラハス。且ツ $[a:a_n] \geq 1 +$
ラバ

(8) $(b:a) \leq \frac{[b:b_n] + 1}{[a:a_n]}$ ヲ 満足スル。

定義 11 minimal + 列 $\{a_n\}$ ヲ一ツ定メテ

$$m(A) = (a_A : a_0)$$

トオク。

補題 14 (i) $\infty > m(A) \geq 0$ テ, $m(A) = 0 \longleftrightarrow a_A$

$$= 0 \iff \mu(A) = 0$$

$$(ii) \quad m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B)$$

$$(iii) \quad A \sim B \iff m(A) = m(B),$$

$$A \succ B \iff m(A) > m(B)$$

$$\text{故} = A \succeq B \iff m(A) \geq m(B) \text{ ト } \vdash \text{ル。}$$

$$\boxed{\text{補題15}} \quad m\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

$$\text{但シ } A_i \cap A_j = 0, \bigvee_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{F}^*$$

以上スベテ Continuous geometry ノ トキ ト 同ジ証明
ガヤク。 最後 =

$$\boxed{\text{定義12}} \quad A \notin \mathbb{F}^* = \text{對シテ } m(A) = \infty \text{ トスル。}$$

$$\boxed{\text{補題16}} \quad \mathbb{F}^* \nsubseteq A, A = \bigvee_{n=1}^{\infty} A_n, A_i \cap A_j = 0, A_n \in \mathbb{F}^*$$

トハ

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \infty$$

(証) 今 $B_n = \bigvee_{r=1}^n A_r$ トシテ $m(B_n) < N_0$ ($n=1, 2, \dots$) トスル。 (8) 式 ト m , 定義カラ

$$\frac{1}{N_0} < \frac{1}{m(B_n)} = \frac{1}{(a_{B_n}:a_0)} = (a_0:a_{B_n}) < \frac{[a_0:a_r]+1}{[a_{B_n}:a_r]}$$

但シ $[a_{B_n}:a_r] \geq 1$ トスル。

シカル $= [a_{B_1}:a_r] \geq 1$ トハ $B_n \supset B_1$ カラ $[a_{B_n}:a_r] \geq 1$

トスル。

$$\text{故} = [a_{B_n}:a_r] < N_0([a_0:a_r]+1) = N_1, \quad (n=1, 2, \dots)$$

即ち $a_{B_n} = m_n a_r + b_n$, $m_n \leq N_1$, $b_n < a_r$

トナル。假定 (7) カラ $\mu(A_r) < M$ ($a_r = a_{A_r}$) トスレバ

$$\mu(B_n) \leq m_n N + N \leq N(N_1 + 1) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ナル。ヨッテ

$$\mu(A) = \lim \mu(B_n) \leq N(N_1 + 1)$$

トナリ、 $A \notin \mathcal{F}^* = \text{スル}$ 。故に $\lim m(B_n) = \infty$ トナル。——

以上デ $m(A)$ がモトナル *invariantes Mass* ナルコトが証明セラレタ。

又, *minimal* + a 存在スルトキモ同様デアル。

次ニ σ_f が *ergodisch* デナイ場合ニハ, *irreducible* デナイ *continuous geometry* 1次元函数ニ関スル岩村氏ノ方法ヲ真似テ証明サレルガ, ソレハ (II) ニ譲ル。

最後ニ *invariantes Mass* ノ存在スルタメノ簡單トナ分條件ヲアゲテオク。

定理3 スベテノ $\sigma \in \sigma_f$, $E \in \mathcal{F} = \text{對シテ}$

$$(9) \quad \mu(\sigma E) \leq c \mu(E)$$

ナラバ, *invariantes Mass* m が存在スル。

(証) $E \in \mathcal{F} = \text{對シテ}$

$$m(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\sigma_i E_i)$$

但し $\sup \cap E = \bigvee_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ ($i \neq j$) 及び 任意 $\sigma_i \in \mathcal{O}_f$ に対して $\tau \in \mathcal{O}_f$.

(9) から $\frac{1}{c} \mu(E) \leq m(E) \leq c \mu(E)$ となり (4), (5) が成立つ。(3) は明らか。又 μ が完全加法的なことゝ容易にわかる。

(18. 5. 13)