



Title	不変測度ノ存在ニ就テ（Ⅱ）
Author(s)	河田, 敬義
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 255, p. 376-390
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75067
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1134. 不変測度ノ存在ニ就テ(II)

河田 敬義(大塚大)

(I)ニ於ケル定理1ヲ用ヅシモ *ergodisch* ナリ
 場合 = (但シ $\mu(X) = 1$) トシテ証明スル。 $\mu(E) = 0$ ナ
 ラバ $\mu(\sigma E) = 0$ ナルカラ $\mathcal{N} = \{E; E \in \mathcal{F}, \mu(E) = 0\}$
 ニヨッテ $\mathcal{L} = \mathcal{F}/\mathcal{N}$ ヲ作ツテ, *Boolsche Algebra*,
 問題 = 直スト次ノ様ニナル。

今 $\mathcal{L}$ ヲ σ -vollständige *Boolsche Algebra*
 トシ, μ ヲ $\mu(1) = 1$, 且ツ $a > 0$ ナラ $\mu(a) > 0$ トナ
 スル。 $\mathcal{L}$ 上ニ定義サレタ *vollständig additiv* ナ *Mass*
 トスル。

又 $\sigma_{\mathcal{L}} = \{\sigma\}$ ナル $\mathcal{L}$ ノ *Automorphismengruppe*

が與へられテキルモノトスル:

$a \in \mathcal{L} =$ 對シテ $a^\sigma \in \mathcal{L}$ が一義ニ對應シテ

$$(1) \quad 1^\sigma = 1, \quad 0^\sigma = 0$$

$$(2) \quad (1-a)^\sigma = 1-a^\sigma$$

$$(3) \quad \left(\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n \right)^\sigma = \bigvee_{n=1}^{\infty} a_n^\sigma.$$

定義 1 $a \sim b$ (Zerlegungsgleich) トハ

$$a = \sum_n a_n, \quad b = \sum b_n, \quad a_n = b_n^{\sigma_n} \text{ トナルコトヲイフ。}$$

(今後 $a_1 + a_2$ トハ $a_1 \wedge a_2 = 0$ / トキニ $a_1 \vee a_2$ ヲ意味スルモノトスル (直和). $\sum a_n \wedge a_m \wedge a_n = 0$ ($m \neq n$) / トキニ用ヒ, $\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n$ ヲアハス)

定義 2 $\mathcal{L}$ / 上デ定義サレタ invariantes Mass

m トハ

$$(4) \quad m(1) = 1, \quad m(a) > 0 \text{ für } a > 0$$

$$(5) \quad m(a) = m(a^\sigma)$$

定理 1 invariantes Mass m / 存在スルタメ

/ 必要十分條件ハ, 與へられタ $\varepsilon > 0$ = 對シテ $\delta(\varepsilon) > 0$ が定マリ

$$(6) \quad \mu(a) < \delta, \quad a \sim b \text{ ヲバ } \mu(b) < \varepsilon$$

ヲ満足スルコトデアル。

必要ハ (I) デ証明シタカラ十分ノ方ヲ証明スル。(I) /

結果ハ用ヒトイ。

○ Lemma 1. (i) $a \sim a$ (ii) $a \sim b \rightarrow b \sim a$

(iii) $a \sim b, b \sim c \rightarrow a \sim c$, (iv) $a \sim 0 + \bar{a} = 0$

定義 2 $a \succ b$ ト $\sim a \succ a^* \sim b$ + a^* 存在スルコト。コレハ $a \sim b^* \succ b$ 存在スルコトト言ッヲモ同ジデアール。

○ Lemma 2. $a \succ b, b \succ c \rightarrow a \succ c$

○ Lemma 3. $a \geq a_n, a_1 \sim a_2 \sim \dots, a_i \cap a_j = 0$
($i \neq j$) + $\bar{a}_1 = \bar{a}_2 = \dots = 0$.

(証) $a_1 > 0 + \bar{\mu}(a_1) > \varepsilon > 0 \quad \therefore (b) \text{カ} \bar{\mu}(a_n) > \delta$
トナリ $\mu(a) < \infty$ ナス。

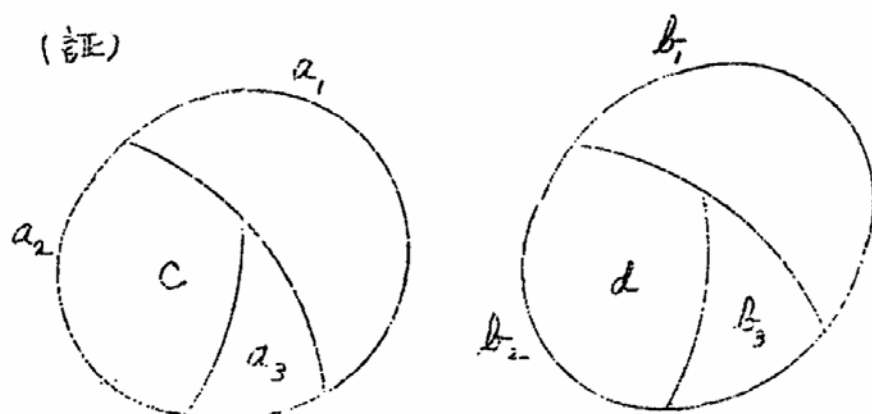
○ Lemma 4. $a \sim b, a \succ b, a \prec b$ 三者カ同時成立ツコトハナシ。

(証) (I) 参照。

○ Lemma 5. $a_n \sim b_n, a_i \cap a_j = b_i \cap b_j = 0$ ($i \neq j$)
 $\rightarrow \sum_n a_n \sim \sum_n b_n$.

○ Lemma 6. $a_1 \sim b_1, a_2 \sim b_2, a_1 \geq a_2, b_1 \geq b_2$
 $\Rightarrow a_1 - a_2 \sim b_1 - b_2$

(証)



"Principle of exhaustion"

$= \exists$

$a_1 - a_2 \geq x_1 \sim y_1$
 $\leq b_1 - b_2,$

$x_1 > 0$ とし x_1 がモトマレバヨイ。

(1) 今 $a_1 \sim b_1$ 對應テ

$$a_1 - a_2 \sim d \leq b_1, \quad b_1 - b_2 \sim c \leq a_1$$

トスルトキ, $d \wedge (b_1 - b_2) = y_1 > 0$ と $x_1 \sim y_1 \leq b_1 - b_2$
ハモトマル元デアル。

(2) $d \leq b_2, c \leq a_2$ 場合ハ $a_3 = a_2 - c, b_3 = b_2 - d$
トスルハ $a_3 \sim b_3$ トナル。即チ $a_2 \sim b_2, a_3 \sim b_3,$
 $a_2 \geq a_3, b_2 \geq b_3$ ト初メノ關係ト同ジナル。

今 $a_2 - a_3 \geq x_2 \sim y_2 \leq b_2 - b_3, x_2 > 0$ デアレハ
 $a_1 - a_2 \geq x_1 \sim y_2 \sim x_2 \sim y_1 \leq b_1 - b_2$ ハモトマル元ナル。
故ニ (1) ノ議論ヲ繰返スコトガ出来ル。

(3) ヨツテコノ方法デ $a_3, a_4, \dots, b_3, b_4, \dots$ ト何
知マデツ、 $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n > 0$ ニ由ルハトスルバ,
 $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots, a_1 - a_2 \sim b_2 - b_3 \sim a_3 - a_4 \sim \dots$
トナリ (b) ノ假定カラ $\mu(a_1 - a_2) > 0, \mu(a_1) < \infty$ ニ
達スル。

○ Lemma 7. $a_1 \sim a_2 > b_2 \sim b_1 \rightarrow a_1 > b_1$ (Lemma
1.5, 6 ヨリ)

定義 3 $\mathcal{C} = \{C; C^\sigma = C \text{ für jedes } \sigma \in \Omega\}$ ト
スルハ $\mathcal{C}$ ハ σ -vollständige Boolesche Algebra
トナル。

定義 4 $\mathcal{L} \ni a$ 對シテ $e(a) = \bigwedge_\alpha C_\alpha$ ($C_\alpha \in \mathcal{C}$
 $C_\alpha \geq a$) トナリ。

$e(a) \in \mathcal{F}$, 且 $e(a) = \bigvee_n a^n$ デアル。

($\cup = \bigvee$, $\bigvee_n$ 等可附随以上, $\bigvee, \bigwedge$ = 對レテハ μ ヲ用ヒテ $\bigvee_n, \bigwedge_n$ デオキカヘルコトが出来ル)

○ Lemma 8 (i) $e(a) = 0 \iff a = 0$; $e(a) \geq a$

(ii) $e(a^n) = e(a)$ (iii) $a \leq b \rightarrow e(a) \leq e(b)$

(iv) $e(\bigvee_n a_n) = \bigvee_n e(a_n)$, (v) $e(\bigwedge_n a_n) \leq \bigwedge_n e(a_n)$

(vi) $c \in \mathcal{F} + \text{テ}$ $c \wedge e(a) = e(c \wedge a)$

特ニ $c \wedge e(a) > 0 \rightarrow c \wedge a > 0$

○ Lemma 9. (i) $a \sim b \rightarrow c \wedge a \sim c \wedge b$, ($c \in \mathcal{F}$)

(ii) $a < b \rightarrow c \wedge a < c \wedge b$, ($c \in \mathcal{F}$)

(iii) $a \sim b \rightarrow e(a) = e(b)$

(iv) $a < b \rightarrow e(a) = e(b)$ (v) $\mathcal{F} \ni c \sim a + \text{テ } c = a$

(証) (i) (ii) ハ σ ト $\sim$ ノ定義カラ, (ii) ハ Lemma 8,

(ii), (iii), (iv) ヨリ, (iii) ハ (ii) ト Lemma 8 / (iii) カラ。

(v) $c \sim a$ カラ $c = e(a) \geq a$, $c > a$ ハ $c \sim a$ = 矛盾ス
ル。

定義5 $a \ll b$ ハスベテ $c \in \mathcal{F} = \text{對レテ } c \wedge a < c \wedge b$

スルハ $c \wedge a = c \wedge b = 0$ トナルコト

○ Lemma 10. (i) $a \ll b, c \in \mathcal{F} \rightarrow c \wedge a \ll c \wedge b$

(ii) $a \ll b \rightarrow e(a) \leq e(b)$

(iii) $a \leq b \leq d \rightarrow a \ll d$. 特ニ $a \sim b \ll c \sim d \rightarrow a \ll d$

(iv) $a \ll b + \text{テ}$ ハ $a \sim b^* < b$, $b^* \ll b$ + b^* が存在ス

ル。

$$(v) \quad a < b, \quad a \ll b \iff e(a) = e(a-b)$$

(証) (iii) $\wedge$ Lemma 9 (i) (ii), Lemma 7 $\cap \bar{\tau}$,

$$(v) \quad e(a) > e(a-b) + \bar{\tau}$$

$$(1 - e(a-b)) \cap a > 0 \quad \vdash \quad \vee. \quad \text{逆} = e(a) = e(a-b)$$

$$+ \bar{\tau} \quad a \cap c = b \cap c + (a-b) \cap c, \quad (a-b) \cap c > 0 \text{ für}$$

$$c \leq e(a) \quad (\text{Lemma 8, (vi)}) \quad \text{---}$$

定義 6 $a \perp b \quad \vdash \quad a \cap b^\sigma = 0$ für jedes $\sigma \in \sigma_f$

$$\circ \text{ Lemma 11. } a \perp b \iff e(a) \cap e(b) = 0$$

$$\circ \text{ Lemma 12. } L \ni a, b = \text{分解} \quad \bar{\tau}$$

$$(7) \quad 1 = C_0 + C_a + C_b, \quad C_0, C_a, C_b \in \mathcal{F}, \quad C_0 \cap a \sim C_0 \cap b,$$

$$C_a \cap a \gg C_a \cap b, \quad C_b \cap a \ll C_b \cap b = \text{--- 義} = \text{分解} + \vee \vee.$$

(証) (1) "Principle of exhaustion" $= \exists \parallel$

$$a = a_1 + a_2, \quad b = b_1 + b_2, \quad a_1 \sim b_1, \quad a_2 \perp b_2 = \text{分解} +$$

$$\vee \vee. \quad C_a = e(a_2), \quad C_b = e(b_2) \quad \vdash \quad \vee \vee, \quad \text{Lemma 11}$$

$$\cap \bar{\tau} \quad C_a \cap C_b = 0.$$

$$\text{Lemma 8 (vi)} \quad \cap \bar{\tau} \quad e_a \cap b = C_a \cap (b_1 + b_2)$$

$$= C_a \cap b_1 \sim C_a \cap a_1 \ll C_a \cap a,$$

$$\text{同様} = C_b \cap a \ll C_b \cap b. \quad C_0 = 1 - C_a - C_b \quad \vdash \quad \vee \vee$$

$$C_0 \cap a = C_0 \cap (a_1 + a_2) = C_0 \cap a_1 \sim C_0 \cap b_1 = C_0 \cap b \quad \text{---}$$

$$(0) \quad \text{分解} / \text{--- 義} + \vee \quad \vdash \quad 0 < c \leq C_a \quad + \quad \text{Lemma}$$

$$10, (i) \quad \cap \bar{\tau} \quad C \cap a \ll C \cap b. \quad \text{etc. } \exists \parallel.$$

定義 7 $L \ni a$ が minimal $\vdash \quad a \gg b \quad + \quad \bar{\tau} \quad b = 0$

トナルコト。

○ Lemma 13. (i) a が minimal, $a \succeq b + \tau$ ならば, $b \in \text{minimal}$.

(ii) a が minimal $\iff a \succ b + \tau \implies e(a) > e(b)$

(iii) a_n が minimal, $e(a_m) \wedge e(a_n) = 0(m+n) + \tau$
 $\sum a_n \in \text{minimal}$.

(証) (i) Lemma 10. (iii) かつ; (ii) $\leftarrow a$ が minimal

かつ $a \succ b'$, $a \gg b' > 0$ かつ Lemma 10, (v) かつ

$e(a) = e(a - b')$, $\rightarrow a \succ b$, $e(a) = e(b) + \tau$

Lemma 10 (v) かつ $a \gg a - b > 0$; (iii) Lemma 10, (i) $\exists$

リ ———

定義 8 $\exists \ni C$ が discret ト $C = e(a) + \nu \text{ minimal} + a$, 存在スルコト。

○ Lemma 14. (i) $C_1 = \text{discret}$, $C_1 \geq C_2$ かつ $\forall C_2 \in \text{discret}$.

(ii) C_1, C_2 が discret かつ $C_1 \vee C_2 \in \text{discret}$.

(iii) $C_1 \leq C_2 \leq \dots$, $C_n = \text{discrete}$ かつ $\forall n C_n \in \text{discret}$.

(証) (i) Lemma 10, (i) $\exists$ リ, (ii) (i) ト Lemma

13. (iii) $\nexists C_1 \vee C_2 = C_1 + (C_2 - C_1 \wedge C_2) = \tau \tau \wedge \times \nu$;

(iii) $\forall n C_n = C_1 + (C_1 - C_1 \wedge C_2) + \dots + (C_n - C_n \wedge (C_1 \vee \dots \vee C_{n-1}))$
 $+ \dots =$ (ii) ト Lemma (iii) $\nexists \tau \tau \wedge \times \nu$.

定義 9 $\exists \tau$ "Principle of exhaustion" =

ヨリ $\mathcal{Z} \ni \mathcal{Z} = \text{discret}$ ナ, 且ツ任意, $\text{discret} + C$
 $\wedge C \subseteq \mathcal{Z}$ トナルモノカ存在スル。又 $\mathcal{Z} \cap a = 0$ ナラ $a \neq \text{minimal}$
 ナル。

○ Lemma 15. $1 - \mathcal{Z} \geq a$ ナラバ, $a > b^0$, $a - b^0 \sim b^0$
 ナル b カ存在スル。コノトキ明カニ $e(a) = e(b) = e(a - b)$

(証) $a \neq \text{minimal}$ ナラ $a > b > 0$, $a \gg b$ トナル
 $a - b$ ト $b = (1)$ ナ適用スルバ

$$1 = C_0 + C_b + C_{a-b}$$

ヨツテ $b_1 = C_0 \cap b + C_{a-b} \cap b + C_a \cap (a - b)$ トオケル
 $a - b_1 \geq b_1$ ナル。

今 $C_0 = 0$, $C_{a-b} \cap b = 0$ トスルバ, $C_b = e(b)$ トナ
 リ, $C_b \cap (a - b) > 0$, 即チ常ニ $b_1 > 0$ トナル。又 $a - b_1$
 $= a_1$ ナラ $a_1 \geq b_2$, $a_1 - b_2 \geq b_2 > 0$ トナル。

"Principle of exhaustion" ナラ $b^0 = \sum_n b_n$ ナト
 スルニマヒ $a - b^0 \sim b^0 = +\infty$ 。

定義 10 $\mathcal{L}$ ノ元ヲ $A = A_a = \{b; b \sim a\}$ ナ
 Klasse = クラスコトカ出スル。特ニ $C \in \mathcal{Z}$ = 對ニテハ
 Lemma 9, (v) ナラ $A_C = C$ 。

(1) $A \ni a, B \ni b, a > b$ ノトキ $A > B$ ト。

(2) $A \ni a, B \ni b, a \wedge b = 0$ ノトキ $A + B = A_{a+b}$ ト。

(3) $A \ni a, B \ni b, a \geq b$ ノトキ $A - B = A_{a-b}$ ト。

(4) $A \ni a, B \ni b, a \gg b$ ノトキ $A \gg B$ ト定義スル。

Lemma 7, Lemma 5, Lemma 6, Lemma 10

(iii) a, b は代表 a, b のとり方 = 無関係である,

又 $cAa = A_{c_n a}$, $e(Aa) = e(a)$ を代表 a のとり方 = 無関係である (Lemma 8, 9).

$A+A$ が定義されるトキ $2A = A+A$ トオク。 nA も同様。

○ Lemma 16. (i) $A+B$ が定義される $\Rightarrow A+B = B+A$
(即ち右辺が定義される $\Rightarrow$)

(ii) $A+B, (A+B)+C$ が定義される $\Rightarrow (A+B)+C = A+(B+C)$
(" ")

(iii) $A-B$ が定義される $\Rightarrow A = (A-B)+B$ (")

(iv) $A+B$ が定義される $\Rightarrow A = (A+B)-B$

(v) $A+X=B$ がトケルノハ $A \geq B$ トキ, シカモ X ハー義 = キマル。

(vi) $A+X=B$, $X > 0$ がトケルノハ $A > B$ トキ

(vii) $A \leq C, B \leq D$, $C+D$ が定義される $\Rightarrow A+B$ も定義される $A+C \leq B+D$

(viii) $A+C, B+C$ が定義される $\Rightarrow A \geq B \leftrightarrow A+C \geq B+C$

(ix) $A \geq nB$, $n = 1, 2, \dots$ たら $B=0$

○ Lemma 17. A, B が與へられるトキ

$$(8) \begin{cases} e(A) = \bar{C}_0 + \bar{C}_1 + \dots, & C_i \in \mathcal{F} \\ \bar{C}_n B = n(\bar{C}_n A) + B_n, & B_n \ll A \end{cases}$$

ト分割される。而モ $\bar{C}_n$ 義 = $\bar{C}_n$ ハキマル。

(証) (i) $A = A_a$, $B = B_b$, $a, b = (7)$ 適用スレバ
 $I = C_0 + C_a + C_b$, $C_0 A = c_0 B$, $c_a A \gg c_a B$, $c_b A \ll c_b B$.

先づ $\bar{C}_0 = e(A) \wedge C_a$ トオク。次 $a_1 = c_b \wedge a$,
 $b_1 = c_b \wedge b$, $a_1 \sim a_1 \ll b_1 = a_1$ トスレバ (Lemma 10, (iv))
 $a_1 \wedge b_1 - a_1 = (7)$ 7 7 7 ハ 7 7

$I = c'_0 + c'_a + c'_{b_1 - a_1}$, $c'_0 \wedge a_1 \sim c'_0 (b_1 - a_1)$,
 コトデ $\bar{C}_1 = e(A) \wedge c_0 + e(A) \wedge c'_a$ トオク。次下同様 $\bar{C}_n$
 7 定義出来ル。

$e(A) - \sum_n \bar{C}_n = C_\infty$ トスレバ, 上ノ作り方カラ
 $n(C_\infty A) \leq c_\infty B$ トナリ, Lemma 16, (ix) カラ $C_\infty A = 0$
 シカル $= C_\infty \leq e(A)$ ヨリ Lemma 8, (vi) カラ $C_\infty = 0$

(e) カナル分割, 一義ナルコトハ Lemma 16 ヨリ ——
 O Lemma 18. $b_1 \geq b_2 \geq \dots$, $\bigwedge_n b_n = 0$ ナラバ,
 $B_n = A_{b_n}$, アル $A =$ 對スル 分割 (8) 7

$$e(A) = c_0^{(n)} + c_1^{(n)} + \dots, e^{(n)} = c_1^{(n)} + c_2^{(n)} + \dots$$

トスレバ, $\bigwedge_n e^{(n)} = 0$ トナル。

(証) $\bigwedge_n e^{(n)} = c \in \mathcal{F}$ トスレバ, $c B_n \geq c A$ ($n = 1, 2, \dots$) トナル。今 $A = A_a$, $\mu(c \wedge a) > \varepsilon > 0$ トスレバ
 $b_n \geq b_n^* \sim c \wedge a$ カラ, 假定 (b) = 7 7 $\mu(b_n) > \delta$ トナ
 ル。

コレハ $\bigwedge_n b_n = 0$ 反スル。 $\therefore c \wedge a$ ヨツテ $c \leq e(A_a)$
 カラ $c = 0$ トナル。 ——

サテ定義 9, $Z \in \mathcal{Z} =$ 對シテ $Z = e(a) + \text{minimal}$ 元 a 7 トリ 1, $A_a =$ 對スル (8), 分解ヲ

$$(9) \quad \begin{cases} Z = Z_1 + Z_2 + \dots, & Z_n \in \mathcal{Z}, \\ Z_n = n(Z_n A), & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

トスル. (8) テハ $Z_n = n(Z_n A) + A_n$, $A_n \ll Z_n A$ テ
アルガ, $Z_n \wedge a \in \text{Lemma 13, (i) カラ minimal, 故}$
ツテ $A_n = 0$ トナル (テアル.)

今 $Z_n \geq b =$ 對シテ $B = A_b$ ト $A =$ 對シテ (8) 7 ア
ラハメレバ

$$(10) \quad \begin{cases} Z_n = \bar{C}_0 + \bar{C}_1 + \dots + \bar{C}_n \\ \bar{C}_r B = r(\bar{C}_r A), & r = 1, \dots, n \end{cases}$$

トナル. コノトキ

$$(11) \quad m_n(b) = \sum_{r=1}^n \frac{r}{n} \mu(\bar{C}_r)$$

トオケバ

$$(i) \quad b > 0 \text{ 7 ラバ } m_n(b) > 0$$

$$(ii) \quad b_1 \sim b_2 \text{ 7 ラバ } m_n(b_1) = m_n(b_2)$$

$$(iii) \quad b_1 \wedge b_2 = 0 \text{ 7 ラバ,}$$

$$m_n(b_1 + b_2) = m_n(b_1) + m_n(b_2)$$

$$(iv) \quad b_1 \geq b_2 \geq \dots, \bigwedge_n b_n = 0 \text{ 7 ラバ}$$

$$\lim_r m_n(b_r) = 0$$

$$(証) (iv) \text{ 丈スル. Lemma 18 カラ } e^{(1)} = \sum_{i=1}^n \bar{C}_i^{(1)} \text{ トスル}$$

∴ $e^{(1)} \geq e^{(2)} \geq \dots \wedge_n e^{(r)} = 0 \nexists \uparrow \downarrow$. 即ち
 $\lim \mu(e^{(r)}) = 0 \uparrow \downarrow$. 故 = (11) カラ

$$m_n(b^r) \leq n \mu(e^{(r)}) \rightarrow 0 \uparrow \downarrow. \text{ --- }$$

今度ハ $1 - z \geq b = \text{對シテ } \textit{invariantes Mass}$
 $m_0(b)$ ヲ定義スル。

Lemma 15 カラ

$$1 = 2A_1 = 4A_2 = \dots = 2^n A_n = \dots, (A_n = A_{2n})$$

= $\{a_n\}$ がトレル。 ($e(A_n) = 1 - z$)

$$B = A_b \uparrow A_n = \text{對スル (8) / 分割ヲ}$$

$$(12) \quad 1 - z = c_0^{(n)} + c_1^{(n)} + \dots + c_{2^n}^{(n)} \quad \uparrow \downarrow$$

$$(13) \quad f_n(b) = f_n(B) = \sum_{r=1}^{2^n} \frac{r}{2^n} \mu(c_r^{(n)})$$

$$(1) \quad m_0(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(b) \text{ が存在スル。}$$

(證) (13) ハ一般ニ

$$1 - z = \sum_1^N c_i, \quad c_i B = \gamma_i (c_i A_n) + B_i, \quad B_i \ll c_i A$$

$$\nexists \uparrow \downarrow \quad f_n(b) = \sum_i \frac{\gamma_i}{2^n} \mu(c_i) \text{ ヲ満足スル。}$$

今, n ト $n + 8$ - 對スル (12) / 分割ヲ合セテ細分ス
 レバ

$$\left[1 - z = \sum_1^N c_i \right.$$

$$\begin{cases} c_i B = r_i^{(n)} (c_i A_n) + B_i^{(n)}, & B_i^{(n)} \ll c_i A_n \\ c_i B = r_i^{(n+s)} (c_i A_{n+s}) + B_i^{(n+s)}, & B_i^{(n+s)} \ll c_i A_{n+s} \end{cases}$$

$$\rightarrow c_i A_n = 2^S (c_i A_{n+S}) \text{ カラ}$$

$$2^S r_i^{(n)} \leq r_i^{(n+S)} \leq 2^S (r_i^{(n)} + 1)$$

$$\text{即ち} \quad \frac{r_i^{(n)}}{2^n} \leq \frac{r_i^{(n+S)}}{2^{n+S}} \leq \frac{r_i^{(n)} + 1}{2^n} \quad n+1 \text{ (13) カラ}$$

$$(14) \quad f_n(b) \leq f_{n+S}(b) \leq f_n(b) + \frac{1}{2^n} \quad (S=1, 2, \dots)$$

トナル. $\therefore \lim f_n(b)$ が存在スル. —

$$(a) \quad b > 0 \text{ カラ} \quad m(b) > 0$$

(証) (14) カラ, 7ル $n = 2$ 対シテ $f_n(b) > 0$ ナイヘ
バヨイ。若シスベテ n テ $f_n(b) = 0$

$$\text{即ち} \quad C_0^{(n)} = 1, \quad B \ll A_n \quad (n=1, \dots) \text{ カラ}$$

$$2^n B \ll 2^n A_n = 1, \quad (n=1, 2, \dots) \text{ トナリ}$$

Lemma 16, (ix) カラ $B = 0$, 即ち $b = 0$ ナレバ
ナリトナル。

$$(v) \quad b_1 \cap b_2 = 0 \text{ ナレバ}$$

$$m_0(b_1 + b_2) = m_0(b_1) + m_0(b_2)$$

$$(証) \quad B_1 = A_{b_1}, \quad B_2 = A_{b_2}, \quad B_3 = A_{b_1+b_2} = \text{對スル (12)}$$

ノ分割ヲ合セテ

$$\begin{cases} 1 - z = \sum_{i=1}^N c_i, & c_i \in \mathcal{F} \\ c_i B_j = r_i^{(j)} (c_i A_n) + B_{ij}, & B_{ij} \ll c_i A_n, \quad (j=1, 2, 3) \end{cases}$$

トスレバ

$$c_i (B_1 + B_2) = (r_i^{(1)} + r_i^{(2)}) (c_i A_n) + B_{i,1} + B_{i,2},$$

$$B_{i,1} + B_{i,2} \ll 2 (c_i A_n) \text{ カラ}$$

$$r_i^{(1)} + r_i^{(2)} \leq r_i^{(3)} \leq r_i^{(1)} + r_i^{(2)} + 1$$

トナリ

$$f_n(b_1) + f_n(b_2) \leq f_n(b_1 + b_2) \leq f_n(b_1) + f_n(b_2) + \frac{1}{2^n}$$

ヲ満足スル。 $\therefore n \rightarrow \infty$ トスレバ, ε トムル等式ヲ得ル。

$$(=) \quad b_1 \geq b_2 \geq \dots, \quad \bigwedge_n b_n = 0 \text{ ナラバ,}$$

$$\lim m_0(b_n) = 0$$

(証) 先ヅ $\lim \mu(a_n) = 0$ ヲ見ル。 $\forall \varepsilon > 0$ $\mu(a_n) > \varepsilon > 0$ ナラバ ($n = 1, 2, \dots$)

假定 (6) カラ $1 = 2^n A_n, 1 = \mu(1) \geq 2^n \cdot \delta$ トナリ。
 $n \rightarrow \infty$ トシテ矛盾ヲ生ズルカラデアル。

今 $m_0(b_n) > 2^\varepsilon > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) トスレバ,
 假定 $\exists \delta > 0$ $\delta(\varepsilon)$ ヲエラビ

$$\mu(a_r) < \delta$$

ニトル。

次 = Lemma 18 カラ, $\exists A_r = \text{対スル } B_n = A_{b_n}$

1 (12), 分割カラ

$$\begin{cases} 1 - z = c_0^{(n)} + \dots + c_{2^n}^{(n)}, & c_i^{(n)} B_n = i (c_i^{(n)} A_r) + B_{n,i}, B_{n,i} \ll c_i^{(n)} A_r \\ e^{(n)} = \sum_{i=1}^{2^n} c_i^{(n)} \end{cases}$$

トスレバ, $\lim \mu(e^{(n)}) = 0$ デアッタ。 $\therefore \mu(e^{(n)}) < \varepsilon$ トスレバ 假定 (6) カラ $\mu(a_r) < \delta$, $B_{n,0} = A_{c_0^{(n)} \wedge b} \ll c_0^{(n)} A_r \subseteq A_{a_r} \exists \parallel \mu(c_0^{(n)} \wedge b) < \varepsilon$ トイル故, (14) カラ

$$m_0(b_n) \leq f_r(b_n) + \frac{1}{2r} \leq \mu(c_0^{(n)} \wedge b) + \mu(e^{(n)})$$

$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon, \text{ 矛盾!}$$

以上デ

$$m(b) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n(b)$$

ガエトイル *invariantes Mass* トイルコトガ証明サレタ。

以上ノ証明カラ次ノコトガワカル。

定理2 假定 (6) ノ下ニ, 任意 $= \mathcal{J}$ ノ上ノ *Mass* $\bar{\mu}(C)$ ノ與ヘルトキ

$$(15) \quad \begin{cases} m(C) = \bar{\mu}(C), & C \in \mathcal{J} \\ m(b^\sigma) = m(b) \end{cases}$$

ヲ満足スル 上ノ *Mass* m ガ存在スル。シカニ (15) ニヨリ m ノ一義ニ決定サレル。

系 (4), (5) ヲ満足スル *invariantes Mass* m ガ只一ツサレタメノ必要且十分ナル條件ハ $O_f = \text{閉シテ ergodic}$, 即チ

$$C^\sigma = C \text{ für jedes } \sigma \in O_f$$

トイルハ $C=0$, 又ハ / トイルコトデアイル。 (18.5.18)