



Title	ℓ_2 -spaceニ於ケル解析函数ニツイテ
Author(s)	霜田, 伊左衛
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 256, p. 406-409
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75070
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1137. L_2 -space = 於ケル解析函数ニツイテ

霜田 伊左衛 (改訂)

複素 L_2 -space E / 領域 D デ定義セラレ, 複素 L_2 -space E' = 於ケル値ヲトル函数 $f(x)$ ハ

1) D = 於テ連續 (holomorphic, 意味ヲ)

2) D / 任意ノ x , E = 於ケル任意ノ y = 對シ, δ ヲ
複素數トスレバ

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(y + \delta x) - f(y)}{\delta}$$

が存在スル。乃チ *gatean* / 意味ヲ微分可能
ナルトキ $f(x)$ ハ D デ正則デアルトイヒマス。條件2)ハ或
ハ δ = ツイテ 0 点ノ近傍デ正則デアルト言ヒカヘテモヨロ

シイデセウ。

今 $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$

$f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots)$

($x_n, f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ハ複素数) トオキ
マス ト $f(x)$ ノ正則性ニツイテ次ノ定理ガ成立シマ
ス。

[定理] $f(x)$ ガ D デ正則ナルタメノ必要十分条件ハ

1) $f(x)$ ハ D デ *strongly* 連続

2) $f_n(y + \alpha x)$ ガ α ニツイテ正則

($n = 1, 2, 3, \dots$)

[証明] 条件 1) ハ共有シテ中マスカラ条件 2) ニツ
イテ着ヘマス。必要条件ニツイテハ, $f(x)$ ノ各成分ヲ着
ヘマス ト $f_n(x + \alpha y)$ ハ α ノ適當ノ近傍 (スベテノ
 $f_n(x + \alpha y)$ = 共通) デ α ニツイテ正則トナリマス
トハ明ラカデス。

十分条件ヲ証明スルニアタリマシテ, 記述ヲ簡單ニ
スルタメニ $D \ni 0$ 且ツ一般性ヲ失ハズニ $y = 0$ ノ場合
ヲ着ヘマス。

$f(\alpha x)$ ガ α ニツイテ正則ナルコトヲ証明スルニハ

$$\left(\frac{df_1(\alpha x)}{d\alpha}, \frac{df_2(\alpha x)}{d\alpha}, \frac{df_3(\alpha x)}{d\alpha}, \dots \right)$$

ガ E ノ点トシテ確定スルコトヲ証明スルバ良イコトニナ
リマス。

D を任意に x をとり, コレを固定します. 適当な正数 γ をとりまస్తు $\alpha(x) (|\alpha| \leq \gamma) \cap D \neq \emptyset$ 且つ compact set となりまస్తు. 之れを G とおきます. $f(x)$ は D に連続デスカラ D で有界となりまస్తు.

$$\text{乃ち } M \text{ が存在シ } \|f(G)\| \leq M$$

条件 2) より $f_n(\alpha x)$ は $\alpha = 0$ につき正則デスカラ

$$\frac{df_n(\alpha x)}{d\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(\xi x)}{(\xi - \alpha)^2} d\xi \quad (C: |\xi| = r)$$

今正数 ρ ($\rho < r$) を任意にとりまస్తు $|\alpha| \leq r - \rho + \epsilon$ とす

$$\begin{aligned} \left| \frac{df_n(\alpha x)}{d\alpha} \right|^2 &\leq \left(\frac{r}{2\pi \rho^2} \int_0^{2\pi} |f_n(re^{i\theta} x)| d\theta \right)^2 \\ &\leq \frac{r^2}{4\pi^2 \rho^4} \int_0^{2\pi} |f_n(re^{i\theta} x)|^2 d\theta \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{r^2}{2\pi \rho^4} \int_0^{2\pi} |f_n(re^{i\theta} x)|^2 d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{df_n(\alpha x)}{d\alpha} \right|^2 &\leq \frac{r^2}{2\pi \rho^4} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(re^{i\theta} x)|^2 \right) d\theta \\ &= \frac{r^2}{2\pi \rho^4} \int_0^{2\pi} \|f(re^{i\theta} x)\|^2 d\theta \\ &\leq \frac{r^2 M^2}{\rho^4} \end{aligned}$$

乃ち $f(\alpha x)$ は $\alpha = 0$ 付近で正則となり

マス。此ハDノ任意ノ点デスカラユレデ吾々ノ定理ハ証明
出来タコトニナリマス。

—— (以 上) ——