



Title	河川空間ノ共形幾何學 III
Author(s)	岩本, 秀行
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 256, p. 424-441
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75072
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1139. 河口空間ノ共形幾何學Ⅲ

岩本秀行(東大)

計量スカラー $F(x, x^{(1)}, \dots, x^{(M)})$ カラ得ラレル M
 ヲ $Synge$ ノベクトル $E_{i\mu} (1 \leq \mu \leq M)$ カラ次ノ
 $\gamma = \text{intrinsic} + M$ ヲベクトル $\overset{\circ}{E}_{i\mu} (1 \leq \mu \leq M)$
 ノ導クコトガ出来ル。

$$\overset{\circ}{E}_{i\mu} = F^{-1} \sum_{\nu=1}^M A_{\mu}^{\nu} E_{i\nu} \quad (\mu = 1, 2, \dots, M)$$

$\text{rank}(F_{(M) i (M) j}) = n-1$ ト假定シテ

$$\gamma_{ij} = F^{2M-1} F_{(M) i (M) j} + \overset{\circ}{E}_{i1} \overset{\circ}{E}_{j1}$$

トオケバ γ_{ij} ハ $\text{intrinsic} + 2$ 階対称テンソルデ

$$|\gamma_{ij}| \neq 0$$

従ツテ

$$\gamma_{ia} \gamma^{aj} = \delta_i^j$$

トナル様ト $\text{intrinsic} + 2$ 階対称テンソル γ^{ij} ガ一意
 的ニ確定スル。尚

$$F^2 F_1 = \begin{vmatrix} F_{(M) i (M) j} & \overset{\circ}{E}_{i1} \\ \overset{\circ}{E}_{j1} & 0 \end{vmatrix}$$

トオク。 F_2 ハ $\text{intrinsic} + 2$ 階対称スカラーデ、之ヲ用

フレバ γ_{ij} ノ行列式 $\gamma = |\gamma_{ij}|$ ハ

$$\gamma = F^{(2M-1)(n-1)+2} F_1$$

トカクコトが出来ル。

$\overset{\circ}{E}_{i\mu}$ = 関シテハ、基本的十関係

$$\overset{\circ}{E}_{i\mu} x^{(1)i} = 0 \quad (2 \leq \mu \leq M)$$

$$\overset{\circ}{E}_{i1} x^{(1)i} = -F$$

が成立スル。即チ M コノ *intrinsic* + *Synge* ノベクトル $\overset{\circ}{E}_{i\mu}$ ノ表ハスニ枚ノ互ニ平行ナ超平面ハ、 $\overset{\circ}{E}_{i1}$ 以外ハ全部曲線ニ沿フヲ切スルベクトル $x^{(1)i}$ ノ方向ヲ含ンデナル。之レカラ容易ニ次ノ関係ノ成立スルコトガワカル。

$$\gamma_{ij} x^{(1)i} = -F \overset{\circ}{E}_{i1}, \quad \gamma_{ij} x^{(1)i} x^{(1)j} = F^2$$

従ツテ γ_{ij} ノ基本テンソルニナルコトが出来ル。然シ之ハ共形不変量デハナイ。

次ニ再び ρ ガ急函数ノ場合ヲ論ジヨウ。

定理1. μ コノ *Synge* ノベクトル $\overset{\circ}{E}_{i\mu}, \dots, \overset{\circ}{E}_{iM-\mu+1}$, $(1 \leq \mu \leq M-1)$ ノツクル平行 2μ 面体ノ基本テンソル γ_{ij} ノ意味デノ体積ハ重サ $-\frac{1}{2}\mu(\mu-1)$ ノ *intrinsic* + 共形スカラーデアアル。

先ヅ次ノ *Lemma* ノ証明シヨウ。

Lemma $\gamma^{ij} \overset{\circ}{E}_{i\mu} \overset{\circ}{E}_{j\nu}$ ($M \geq \mu, \nu \geq 2$) ノ量ハ重サ $-2M$ ノ共形スカラーデアアル。

証明

$$\begin{aligned}
\gamma^{ij} t_{i\mu} t_{j\nu} &= -\frac{1}{\gamma} \begin{vmatrix} \gamma_{ij} & t_{i\mu} \\ t_{j\nu} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\gamma} \begin{vmatrix} f_{ij} + \overset{\circ}{E}_{i1} \overset{\circ}{E}_{j1} & t_{i\mu} \\ t_{j\nu} & 0 \end{vmatrix} \\
&= -\frac{1}{\gamma} \begin{vmatrix} f_{ij} + \overset{\circ}{E}_{i1} \overset{\circ}{E}_{j1} & t_{i\mu} & \overset{\circ}{E}_{i1} \\ t_{j\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -\frac{1}{\gamma} \begin{vmatrix} f_{ij} & t_{i\mu} & \overset{\circ}{E}_{i1} \\ t_{j\nu} & 0 & 0 \\ -\overset{\circ}{E}_{j1} & 0 & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

即ち

$$\begin{aligned}
\gamma^{ij} t_{i\mu} t_{j\nu} &= -\frac{1}{\gamma} \begin{vmatrix} f_{ij} & t_{i\mu} & \overset{\circ}{E}_{i1} \\ t_{j\nu} & 0 & 0 \\ \overset{\circ}{E}_{j1} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&\quad (f_{ij} = F^{2M-1} F_{(M)i(M)j})
\end{aligned}$$

之ヲ用テレバ

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma} &= \rho^{2M(M-1)+2} \gamma, \quad \bar{\overset{\circ}{E}}_{i1} = \rho \overset{\circ}{E}_{i1} + [\dots\dots] \\
&\quad ([\dots\dots], \text{項ハ } \overset{\circ}{E}_{i\mu} (M \geq \mu \geq 2), \text{ 一次同次式})
\end{aligned}$$

及ビ

$$\begin{aligned}
E_{i\mu} x^{(1)i} &= 0, \quad t_{i\mu} x^{(1)i} = 0 \quad (\mu \geq 2) \\
f_{ij} x^{(1)j} &= 0
\end{aligned}$$

ナル關係ニヨリ容易ニ証明スルコトが出来ル。

定理 1, 証明

$$E_{i\nu} = F \sum_{\mu=\nu}^M A_{\nu}^{\mu} \dot{E}_{i\mu}$$

$$\dot{E}_{i\nu} = \sum_{\mu=\nu}^M \binom{\mu}{\nu} \left(\frac{1}{F}\right)^{(\mu-\nu)} E_{i\mu}$$

= 3 1)

$$\dot{E}_{i\mu} = F \sum_{\lambda=\mu}^M \left[\sum_{\nu=\mu}^{\lambda} \binom{\nu}{\mu} \left(\frac{1}{F}\right)^{(\nu-\mu)} A_{\nu}^{\lambda} \right] \dot{E}_{i\lambda} = \sum_{\lambda=\mu}^M k_{\mu}^{\lambda} \dot{E}_{i\lambda}$$

$$k_{\mu}^{\lambda} = F^{-\lambda}$$

$$(\dot{E}_{\mu}, \dot{E}_{\nu}) = r^{ij} \dot{E}_{i\mu} \dot{E}_{j\nu}, \quad (\dot{E}_{\mu}, \dot{E}_{\nu}) = r^{ij} \dot{E}_{i\mu} \dot{E}_{j\nu}$$

トオケバ

$$(\dot{E}_M, \dots, \dot{E}_{M-\mu+1}) \text{ 及 } \nu (\dot{E}_M, \dots, \dot{E}_{M-\mu+1})$$

ノツクルニツ、平行 2μ 面体、体積 $\dot{E}(\mu)$, $E(\mu)$, ハソ
レヤレ

$$\dot{E}(\mu)^2 = \begin{vmatrix} (\dot{E}_M, \dot{E}_M) & \dots & (\dot{E}_{M-\mu+1}, \dot{E}_M) \\ \dots & & \dots \\ (\dot{E}_{M-\mu+1}, \dot{E}_M) & & (\dot{E}_{M-\mu+1}, \dot{E}_{M-\mu+1}) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} \dot{E}_{iM} \\ \vdots \\ \dot{E}_{iM-\mu+1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \dot{E}_{iM} \\ \vdots \\ \dot{E}_{iM-\mu+1} \end{pmatrix}' \\ \vdots & r_{ij} & \vdots \\ \begin{pmatrix} \dot{E}_{iM} \\ \vdots \\ \dot{E}_{iM-\mu+1} \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} \dot{E}_{iM} \\ \vdots \\ \dot{E}_{iM-\mu+1} \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

$$E(\mu)^2 = \begin{vmatrix} (\dot{E}_M, \dot{E}_M) & \dots & (\dot{E}_{M-\mu+1}, \dot{E}_M) \\ \dots & & \dots \\ (\dot{E}_{M-\mu+1}, \dot{E}_M) & \dots & (\dot{E}_{M-\mu+1}, \dot{E}_{M-\mu+1}) \end{vmatrix}$$

$$= \left| \begin{pmatrix} E_{iM}^0 \\ \vdots \\ E_{iM-\mu+1}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{iM}^0 \\ \vdots \\ E_{iM-\mu+1}^0 \end{pmatrix} \right|$$

ヲ與ヘラレル。從ツテ

$$\begin{pmatrix} E_{iM}^0 \\ \vdots \\ E_{iM-\mu+1}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ h_{\mu}^{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{iM}^0 \\ \vdots \\ E_{iM-\mu+1}^0 \end{pmatrix}$$

ナル關係ニヨリ

$$E(\mu)^2 = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ h_{\mu}^{\lambda} \end{pmatrix} \right|^2 E(\mu)^2 = F^{-2(M+\overline{M-1}+\dots+M-\mu+1)} E(\mu)^2$$

或ハ $E(\mu)^2 = F^{2(M+\overline{M-1}+\dots+M-\mu+1)} E(\mu)^2$

前ノ Lemmaニヨリ $E(\mu)^2$ ハ重サ $-2M/\mu$ ノ共形スカラーデアル。

從ツテ $E(\mu)^2$ ハ重サ $-\mu(\mu-1)$ ノ共形スカラーデアル。ソレガ intrinsic ナルコトハ、ソノツクリ方カラ明カデアル。

從ツテ $F \geq 0$, $P \geq 0$ ナル場合ニ限レバ

$$K(\mu) = |E(\mu)^2|^{\frac{+1}{\mu(\mu-1)}}$$

ヲ定義サレル $K(\mu)$ ハ次數 $M+\mu-1$ ノ線素ニマデ depend スル重サ -1 ノ intrinsic + 共形スカラーデ、且ツ

$$K(\mu) = \left\{ a_{\mu i j} x^{(M+\mu-1)i} x^{(M+\mu-1)j} + 2a_{\mu i} x^{(M+\mu-1)i} + a_{\mu} \right\}^{\frac{1}{\mu(\mu-1)}}$$

1形テアル。 $\square = a_{\mu ij}, a_{\mu i}, a_{\mu} \wedge 1 \forall \mu \in x, x^{(1)}, \dots$
 $\dots, x^{(M+M-2)},$ 函数トアル。

$$t_{iM} = (-1)^M F^{-1} F_{(M)} i$$

$$t_{iM-1} = (-1)^M M \left[\left\{ F^{-1} F_{(M)} i_{(M)} j - F^{-2} F_{(M)} i F_{(M)} j \right\} x^{(M+1)j} \right. \\ \left. + h_i(x, \dots, x^{(M)}) \right]$$

$$h_i = F^{-1} \sum_{r=0}^{M-1} F_{(M)} i_{(r)} j x^{(r+1)j} - F^{-2} F_{(M)} i \sum_{r=0}^{M-1} F_{(r)} j x^{(r+1)j}$$

$$t_{iM} x^{(1)i} = 0, t_{iM-1} x^{(1)i} = 0, h_i x^{(1)i} = 0 \quad \text{等} \equiv 0$$

$$E(2)^2 = F^{-2(M+1)} \left[(t_{iM}, t_{iM}) (t_{jM-1}, t_{jM-1}) - (t_{jM}, t_{jM-1})^2 \right]$$

$$= F^{-2(M+1)} M^2 \left[\left(\overset{\circ}{E}_M, \overset{\circ}{E}_M \right) r^{ij} \left\{ (f_{ia} - \overset{\circ}{E}_{iM} \overset{\circ}{E}_{aM}) x^{(M+1)a} \right. \right.$$

$$+ H_i \} \left\{ (f_{jb} - \overset{\circ}{E}_{jM} \overset{\circ}{E}_{bM}) x^{(M+1)b} + H_j \right\}$$

$$- r^{ij} \overset{\circ}{E}_{iM} \left\{ (f_{ja} - \overset{\circ}{E}_{jM} \overset{\circ}{E}_{aM}) x^{(M+1)a} \right.$$

$$+ H_j \} r^{kb} \overset{\circ}{E}_{kM} \left\{ (f_{kb} - \overset{\circ}{E}_{kM} \overset{\circ}{E}_{bM}) x^{(M+1)b} + H_b \right\} \Big]$$

$$(H_i = F^{2M} h_i)$$

$$= M^2 F^{-2(M+1)} \left[\left\{ \left(\overset{\circ}{E}_M, \overset{\circ}{E}_M \right) f_{ij} - \overset{\circ}{E}_{iM} \overset{\circ}{E}_{jM} \right\} x^{(M+1)i} x^{(M+1)j} \right.$$

$$+ 2 \left\{ \left(\overset{\circ}{E}_M, \overset{\circ}{E}_M \right) H_i - \left(\overset{\circ}{E}_M, H \right) \overset{\circ}{E}_{iM} \right\} x^{(M+1)i}$$

$$+ \left\{ (\overset{\circ}{E}_M, \overset{\circ}{E}_M) (H, H) - (\overset{\circ}{E}_M, H)^2 \right\}$$

$$\text{即ち } K(2) = \left\{ a_{ij} x^{(M+1)i} x^{(M+1)j} + 2a_i x^{(M+1)i} + a \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{M^2} F^{2(M+1)} a_{ij} = (\overset{\circ}{E}_M, \overset{\circ}{E}_M) f_{ij} - \overset{\circ}{E}_{iM} \overset{\circ}{E}_{jM}$$

$$\frac{1}{M^2} F^{2(M+1)} a_i = (\overset{\circ}{E}_M, \overset{\circ}{E}_M) H_i - (\overset{\circ}{E}_M, H) \overset{\circ}{E}_{iM}$$

$$\frac{1}{M^2} F^{2(M+1)} a = (\overset{\circ}{E}_M, \overset{\circ}{E}_M) (H, H) - (\overset{\circ}{E}_M, H)^2$$

より

$$(\overset{\circ}{E}_M, H) = r^{ij} \overset{\circ}{E}_{iM} H_j$$

$$(H, H) = r^{ij} H_i H_j$$

トスル。

a_{ij}, a_i, a は イデアル $\in (x_1, \dots, x^{(M)})$ ノミノ

函数デアル。

$$C_i \equiv a_{ij} x^{(M+1)j} + a_i$$

ハ intrinsic + 共変ベクトルデ, 且

$$a_{ij} x^{(1)j} = 0, \quad a_i x^{(1)i} = 0$$

ナル關係が成立スル。従ツテ (a_{ij}) ノ rank $\geq n-1$

ト假定スル。

$$a_{ij} x^{(M+1)j} + a_i = 0$$

ハ $x^{(M+1)j}$ ヲ未知数トスル聯立一次方程式ト考ヘタトキ
ニ解ヲモツ。ソノ一ツノ特殊解ヲ

$$x^{(M+1)j} = -H^j$$

トスレバ一般解ハ $P(t)$ ヲ t ノ任意ノ函数トスルトキ

$$x^{(M+1)j} + H^j + P(t)x^{(1)j} = 0$$

トナル。従ツテ微分方程式

$$C_i = 0$$

ハ $M+1$ 級 path 1 互ニ projective + class ヲ表
ハル。シカモコノ path 八 Eigenschaft Γ ヲモツ。
従ツテ之レカラ projective invariant + ausge-
zeichnete System

$$x^{(M+1)j} + h_j^j = 0$$

ヲ herausziehen スルコトが出来ル。従ツテ之レカラ
次数 M ノ線元素ノ空間デ conform-affine + lineare
übertragung ヲ爲サ、空間ニ導入スルコトが出来
ル。

ハス系 $C_i = 0$ カラ一般ニ次数 M ノ conformal
invariant デ且ツ parameter 1 変換デフト同ジ
変換ヲウケル量 F ヲ導キ出スコトが出来ル。例ヘバ

$$F = a_{ij} H^i H^j - 2a_i H^i + a$$

このパス系 $C_i = 0$ を用いたレベル (I) で導いた conformal-affine connection を少し修正して次数 M の線素 σ の範囲で接続を決定するコトが出来た。又

$$\sigma = \int_{t_0}^t F(x, \dots, x^{(M)}) dt$$

で定義される σ は明らかに conformal invariant の次数 M の河口-Metric と考へる。

定理 2. $M \geq 3$, $\text{rank}(F_{(M)i(M)j})$

$$= \text{rank}\left(\left(\overset{\circ}{E}_M, \overset{\circ}{E}_M\right) f_{ij} - \overset{\circ}{E}_{iM} \overset{\circ}{E}_{jM}\right) = n-1$$

とすれば河口空間 = 於て

$$C_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^{(M+1)i}} \begin{vmatrix} (\overset{\circ}{E}_M, \overset{\circ}{E}_M) & (\overset{\circ}{E}_M, \overset{\circ}{E}_{M-1}) \\ (\overset{\circ}{E}_{M-1}, \overset{\circ}{E}_M) & (\overset{\circ}{E}_{M-1}, \overset{\circ}{E}_{M-1}) \end{vmatrix} = 0$$

の次数 0 の共形変換で不変な $M+1$ 級 path, projective Klasse と考へる。且つ一般に次数 M の conformal metric

$$\sigma = \int_{t_0}^t F(x, \dots, x^{(M)}) dt$$

が存在する。

次、議論は一般に次数 M の共形変換 = 對して成立する。

$$\gamma = F^{(2M-1)(n-1)+2} F,$$

トオク. γ ハ 重サ $2M(n-1)+2$ ノ 共形スカラーデアル.

$$\Gamma = F |\gamma|^{-\frac{1}{2[M(n-1)+1]}}$$

トオケバ, Γ ハ *conformal invariant* + 相対スカラー
- デ, *parameter* ノ 変換デ F ト 同ジ 変換ヲ スル.

$$V_{i\mu} = E_{i\mu}(\log \gamma)$$

トオク. $V_{i\mu}$ ハ i = ツイテ 絶対共変ベクトルデ

$$V_{i\mu} x^{(1)i} = 0 \quad (\mu \geq 2), \quad V_{i1} x^{(1)i} = -1$$

ナル 関係ガ 成立スル. 而シテ

$$H_{\mu}^{\lambda} = F^{-1} \sum \binom{\lambda}{\alpha} F^{(\lambda-\alpha)} A_{\mu}^{\alpha}(F, F^{(1)}, \dots, F^{(\lambda-\mu)})$$

$$\overset{\circ}{V}_{i\mu} = \sum_{\lambda=\mu}^M H_{\mu}^{\lambda} V_{i\lambda}$$

トオケバ, $\overset{\circ}{V}_{i\mu}$ ハ *intrinsic* + 反変ベクトルデ

$$\overset{\circ}{V}_{i\mu} x^{(1)i} = 0 \quad (\mu \geq 2) \quad \overset{\circ}{V}_{i1} x^{(1)i} = -F$$

ナル 関係ガ 成立シ, 且ツ 共形変換デ

$$\overset{\circ}{V}_{i\mu} = \rho^{\mu} \overset{\circ}{V}_{i\mu} + [*]$$

$$([*] \text{ ハ } \overset{\circ}{V}_{i\mu+1}, \dots, \overset{\circ}{V}_{iM} \text{ ノ 一次同次式})$$

1 如ク変換スル。

従ツテ

$$Y_{ij} = F^{2M-1} F_{(M)i(M)j} + \overset{\circ}{Y}_{i1} \overset{\circ}{Y}_{j1}$$

トオケバ

$$Y_{ij} x^{(1)j} = -F \overset{\circ}{Y}_{i1}, \quad Y_{ij} x^{(1)i} x^{(1)j} = F^2$$

トナツテ Y_{ij} ヲ基本テンソルトシテ採用スルコトが出来。
且ツ定理1ト同様ニ次、定理3が成立スル。

定理3. μ ヲ *Syngge* ノベクトル $\overset{\circ}{Y}_{iM}, \dots, \overset{\circ}{Y}_{iM-\mu+1}$
ノツクル平行 2μ 面体、基本テンソル Y_{ij} ノ意味デ、体
積ハ重サ $-\frac{1}{2}\mu(\mu-1)$ ノ共形スカラーデ且ツ *intrinsic*
デアール。

$\overset{\circ}{Y}_{iM}, \dots, \overset{\circ}{Y}_{iM-\mu+1}$ ノツク平行 2μ 面体ノ体積ヲ
 $V(\mu)$ トスレバ

$$\chi(\mu) = |V(\mu)|^{\mu(\mu-1)}$$

デ定義サレル $\chi(\mu)$ ハ重サ -1 ノ共形スカラーデ、 $(\chi,$
 $\dots, \chi^{(M+\mu-1)})$ ノ函数デ

$$\chi(\mu) = \left\{ A_{\mu ij} x^{(M+\mu-1)i} x^{(M+\mu-1)j} + 2A_{\mu i} x^{(M+\mu-1)i} + A_{\mu} \right\}^{\frac{1}{2}\mu(\mu-1)}$$

ノ形デアール。 $A_{\mu ij}, A_{\mu i}, A_{\mu}$ ハ何レモ $(\chi, \dots, \chi^{(M+\mu-2)})$

ノ函数デアール。

特ニ $\mu=2$ ノ場合ハ

$$X(z) = \left\{ A_{ij} x^{(M+1)i} x^{(M+1)j} + 2 A_i x^{(M+1)i} + A \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$A_{ij} = \gamma^{-2} \left[(\Gamma_M, \Gamma_M) F^{2(M+1)} g^{ab} \gamma_{(M)a(M)i} \gamma_{(M)b(M)j} \right. \\ \left. + F^{2(M+1)} g^{\alpha\beta} g^{ab} \Gamma_{\alpha M} \Gamma_{aM} \gamma_{(M)\beta(M)i} \gamma_{(M)b(M)j} \right]$$

トカ、 γ , γ

$$A_{ij} x^{(M+1)j} + A_i = 0$$

$\text{rank}(A_{ij}) = n-1$ / トキ = conformal invariant + $M+1$ 級 path, projective + class
ヲ與ヘ, 之レカラ次數 M , 共形変換 = 對シテ不変 + conformal affine connection が定マルコトデアル。
又一般 = 次數 M , conformal metric g が存在スルコトモ前ト同様デアル。

定理4. $M \geq 3$, $\text{rank}(F_{(M)i(M)j}) = \text{rank}(A_{ij}) = n-1$ + ル河口空間 F = 於テ

$$\frac{\partial}{\partial x^{(M+1)i}} \begin{vmatrix} (\overset{\circ}{r}_M, \overset{\circ}{r}_M) & (\overset{\circ}{r}_M, \overset{\circ}{r}_{M-1}) \\ (\overset{\circ}{r}_{M-1}, \overset{\circ}{r}_M) & (\overset{\circ}{r}_{M-1}, \overset{\circ}{r}_{M-1}) \end{vmatrix} = 0$$

=ヨリ conformal invariant + path, projective + class が定義サレル。

(II) ヲ決, 定理ヲ証明シテオイタ。

T が重サ 1 , 共形 Affinor + ラベ

$$F \Theta_{\mu}(T, v)$$

$$= \sum_{\nu \geq \mu} \binom{\nu}{\mu} T_{(\nu)_i} v^{(\nu-\mu)_i} - T \sum_{\nu=\mu}^{\alpha} (-1)^{\nu} \binom{\nu}{\mu} (t_{i\nu} v^i)^{(\nu-\mu)}$$

ハ次数 α の共形変換 = 對シテハ *invariant* ナ T ト同
ジ種類ノ *affine* デアルガ次数 $\alpha+1$ 以上ノ共形変換 =
對シテハ *invariant* デナイ。

之ヲ用ヒテ我々ノ空間ニ一般ノ共形変換 = 對シテ変ナ
ル接続ヲ導入スル。

$$K_{\mu}^{\lambda} = \mathcal{F}^{-1} \sum_{\alpha=\mu}^{\lambda} \binom{\lambda}{\alpha} \mathcal{F}^{(\lambda-\alpha)} A_{\mu}^{\alpha}(\mathcal{F}, \mathcal{F}^{(1)}, \dots, \mathcal{F}^{(\alpha-\mu)})$$

$$\Gamma_{i\mu} = \sum_{\lambda=\mu}^M K_{\mu}^{\lambda} \gamma_{i\lambda}$$

トナク。

$\Gamma_{i\mu}$ ハ *intrinsic* ナ共形不変量ナ

$$\Gamma_{i\mu} x^{(1)i} = 0 \quad (\mu \geq 2), \quad \Gamma_{i1} x^{(1)i} = -\mathcal{F}$$

ナル關係ガ成立スル。之ヲ用ヒテ二階對稱ナ *ten-*
sor

$$g_{ij} = F \mathcal{F}^{2(M-1)} F_{(M)i(M)j} + \Gamma_{i1} \Gamma_{j1}$$

$$\Gamma_{i1} = \kappa \Gamma_{i1}, \quad \kappa = F/\mathcal{F}.$$

ヲツケル。 g_{ij} ハ *intrinsic* デ共形変換 $(M-1)$ 次デ

$$\bar{g}_{ij} = f^2 g_{ij}$$

1 如ク変換シ, 且ツ

$$g_{ij} x^{(1)i} x^{(1)j} = -F^2 I_{i1}, \quad g_{ij} x^{(1)i} x^{(1)j} = F^2$$

ナル關係が hold スル。但シ I_{i1} ナル Vektor デ
 $M+1$ 次以上ノ線素ガアラハレタトキニハスベテ path
 系

$$A_{ij} x^{(M+1)i} + A_i = 0$$

カラ得ラレ最 $x^{(M+1)i} = -H^i - \varphi x^{(1)i}$ デ置キカヘネバ
 ナラナイ。

上ノ式ヲ $M = M-1$ トシ, I_{i1} 代リ $F_{(M)i}$ トリ,
 $\mathcal{D}_\mu(T, v)$ フルシク修正シテ次ノ量ヲ得ル。

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu(F_{(M)i}, v) = & F \mathcal{F}^{2(M-1)} \left[F_{(M)i(M)j} \frac{dv^j}{dt} \right. \\ & + \frac{1}{M} \left\{ F_{(M)i(M-1)j} + \left(\frac{d}{dt} \binom{M}{2} \log \mathcal{F} \right) F_{(M)i(M)j} \right\} v^j \\ & \left. + (-1)^M \frac{1}{M} F_{(M)i} \varepsilon_{jM-1} v^j \right] \end{aligned}$$

$\mathcal{D}_\mu(F_{(M)i}, v)$ ハ intrinsic + 共変ベクトルデ, 任意,
 conformal invariant, intrinsic + ベクトル
 v^i = 對シ次數 $M-1$ ノ共形変換デ不変デアル。

之レト

$$\kappa^2 \Gamma_{i,1} (\Gamma_{j,1} v^j)^{(1)} = \Gamma_{i,2} \Gamma_{j,1} \frac{dv^j}{dt} + \kappa^2 \Gamma_{i,1} \Gamma_{j,1}^{(1)} v^j$$

3) 次 / 曲線 = 沿 7 共変微分 / 式 9 得ル。

$$\frac{\delta v^i}{dt} = \frac{dv^i}{dt} + \Gamma_{j,1}^i v^j$$

$$\Gamma_{j,1}^i = \frac{1}{M} F \mathcal{F}^{2(M-1)} g^{ia} \left\{ F_{(M)a(M-1)j} + \binom{M}{2} (\log \mathcal{F})^{(1)} F_{(M)a(M)j} \right. \\ \left. + (-1)^M F_{(M)a} \varepsilon_{jM-1} \right\} - \frac{x^{(1)i}}{\mathcal{F}} \Gamma_{j,1}^i$$

$$D_\mu \Gamma_{j,1}^i = \sum_{\lambda=\mu}^M \binom{\lambda}{\mu} \Gamma_{j,1}^i (\lambda)_\kappa d x^{(\lambda-\mu)\kappa}$$

$$d)_1 \Gamma_{j,1}^i = \sum_{\lambda=1}^M A_\lambda^\lambda D_\lambda \Gamma_{j,1}^i$$

ヲ用ヒテ

$$\delta v^i = dv^i + d)_1 \Gamma_{j,1}^i \cdot v^j$$

+ル 共変微分ヲ 定義出来ル。又次、如中種々、共変微分ヲ 定義出来ル。

定理 5. v^i 〆任意 / *intrinsic, conformal invariant* + 反変ベクトル + ラベ

$$\frac{\delta^\mu v^i}{dt^\mu} = \binom{M}{\mu}^{-1} g^{ia} \left\{ \mathcal{F}^{M+\mu-2} F d_{M-\mu} (F_{(M)a,1} v) + \kappa^2 \mathcal{F}^{-\mu} \Gamma_{a,1} (\Gamma_{j,1} v^j)^{[\mu]} \right\} \\ = \frac{d^\mu v^i}{dt^\mu} + \sum_{r=0}^{\mu-1} \frac{\mu}{r} \Gamma_{j,1}^i v^{(r)j}$$

ハ $i = \gamma + \mu$ intrinsic の次数 μ , 共形変換で不変である。
 $\mu = [\mu]$ の conformal parameter σ に関する
 微分であり

$$\begin{aligned} \binom{M}{\mu} \Gamma_0^{\mu-i} &= \mathcal{F}^{2(M-1)} F g^{i\alpha} \left[D_0(F_{(M)\alpha}, A) \right. \\ &\quad \left. - F_{(M)\alpha} \sum_{\nu=\mu}^d (-1)^\nu \binom{\nu}{\mu} D_0(A, E_{j,\nu}) \right] + \frac{x^{(1)i}}{\mathcal{F}} D_0(A, \Gamma_{ji}^\mu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \binom{M}{\mu} \Gamma_r^{\mu-i} &= \mathcal{F}^{2(M-1)} F g^{i\alpha} \left[D_r(F_{(M)\alpha}, A) \right. \\ &\quad \left. - F_{(M)\alpha} \sum_{\nu=\mu}^d (-1)^\nu \binom{\nu}{\mu} D_r(A, E_{j,\nu}) \right] + \frac{x^{(1)i}}{\mathcal{F}} D_r(A, \Gamma_{ji}^\mu) \\ &\quad (1 \leq r \leq d - \mu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \binom{M}{\mu} \Gamma_r^{\mu-i} &= \mathcal{F}^{2(M-1)} F g^{i\alpha} D_r(F_{(M)\alpha}, A) + \frac{x^{(1)i}}{\mathcal{F}} D_r(A, \Gamma_{ji}^\mu) \\ &\quad (d - \mu + 1 \leq r \leq M - \mu) \end{aligned}$$

$$D_r(F_{(M)\alpha}, A) = \sum_{\beta \geq r} \binom{\beta}{r} F_{(M)\alpha(\beta)} A_\mu^{\beta-r}$$

$$D_r(A, E_{ji}) = \sum_{\beta \geq r} \binom{\beta}{r} A_\beta^\mu E_{ji}^{(\beta-1)}$$

$$E_{ji} = \sum_{\lambda=\mu}^M K_\mu^\lambda \ell_{i\lambda}$$

トスル。

次, conformal invariant と接続を導入ス

14.

定理6. T を任意, 重数 1 の共形 Affinor トス

レバ

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu^\alpha(T) &= \sum_{\lambda=0}^{M-\mu} \binom{\lambda+\mu}{\mu} \left[T_{(\lambda+\mu)i} \right. \\ &\quad \left. - T \sum_{\nu=\lambda+\mu}^{\alpha} (-1)^\nu \binom{\nu}{\lambda+\mu} \xi_{i\nu}^{(\nu-\lambda-\mu)} \right] dx^{(\lambda)i} \\ &\quad (\mu=1, 2, \dots, M) \end{aligned}$$

+ P -affian の T と同種, Affinor デ且 α 次数 α ,
共形変換 = 對シテ不変デアル, (次数 $\alpha+1$ 以上ノ共形
変換 = 對シテハ不変デナイ)

定理17. T が intrinsic + 重数 1 の共形 Affinor

トラバ

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\mu^\alpha(T) &= \left[D_{0j}^\alpha(T, A)_\mu - T \sum_{\nu=\mu}^{\alpha} (-1)^\nu \binom{\nu}{\mu} D_{0j}^{\nu-\mu}(A, \xi_\nu) \right] dx^j \\ &\quad + \sum_{r=1}^{\alpha-\mu} \left[D_{rj}^\alpha(T, A)_\mu - T \sum_{\nu=r+\mu}^{\alpha} (-1)^\nu \binom{\nu}{r+\mu} D_{rj}^{\nu-\mu}(A, \xi_\nu) \right] dx^{(r)j} \\ &\quad + \sum_{r=\alpha-\mu+1}^{M-\mu} D_{rj}^\alpha(T, A)_\mu dx^{(r)j} \end{aligned}$$

ハ T と同種, 共形 Affinor デ且 α parameter,
変換:

$$\bar{k} = \bar{k}(t): \quad x^{(\bar{\mu})i} = a_{\nu}^{\mu} x^{(\nu)i},$$

$$dx^{(\mu)i} = a_{\nu}^{\mu} dx^{(\nu)i} + a_{\nu\omega}^{\mu} dt^{(\bar{\omega})} x^{(\nu)i}$$

= 對シテ 不変デアル。コゝ =

$$D_{ri}(T, A) = \sum_{\beta=r+\mu}^M \binom{\beta}{r} T_{\mu}^{(\beta)i} A_{\mu}^{\beta-r}$$

$$D_{ri}(A, \varepsilon_{\nu}) = \sum_{\beta=r}^M \binom{\beta}{r} A_{\beta} \varepsilon_{i\nu}^{\beta-r}$$

T 所へ $F_{(M)i}$ を入レテ、次、基接続ヲ得ル。

$$F \cdot \mathcal{F}^{2(M-1)} g^{ij} \delta F_{(M)j} = \delta x^{(M)i}$$

$$= \left(\delta_j^i - \frac{x^{(M)i}}{\mathcal{F}} \Gamma_{ji} \right) dx^{(M)j} + \sum_{p=0}^{M-1} \bigwedge_{\mu}^p \delta_j^i dx^{(p)j}$$

$$\binom{M}{\mu}^{-1} F^{-(M-\mu-1)} \mathcal{F}^{2(M-1)} g^{ij} \delta \bigwedge_{M-\mu}^{\mu} (F_{(M)j}) = \delta x^{(\mu)i}$$

$$= \left(\delta_j^i - \frac{x^{(\mu)i}}{\mathcal{F}} \Gamma_{ji} \right) dx^{(\mu)j} + \sum_{p=0}^{\mu-1} \bigwedge_{\mu}^p \delta_j^i dx^{(p)j}$$

之ハ 次數 μ の 共形変換 = 對シ 不変デアル。