



Title	連結こむばくと可換群ニツイテノー注意
Author(s)	角谷, 静夫; 中山, 正
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 256, p. 442-451
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75073
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1140. 連結こむばくと可換群ニ

ツイテノ一注意

角 谷 静 夫 (阪大)
中 山 正 (名大)

こむばくと可換群¹⁾ノ位相群トシテノ構造が代数的構造カラドノ程度決定サレルカトイフ問題ヲ考ヘテミマス。

先ツ、代数的ニ同型ナニツノこむばくと群ニ於テ必ずシモ同相同型ガ存シナイコトハ、例ヘバそれのいど群²⁾トニツノ全それのいど群ノ直積トラデモ考ヘレバ両者ハ代数的ニハ同型デアルコトカラ知ラレル。而シテ更ニ、一方ガ連結、他方ガ不連結ナコむばくと群ハ代数的ニモ決シテ同型ニナラナイコトハ容易ニ知ラレルガ、上部ノ問題ニ関シテ連結ノ場合ト完全不連結ノ場合トハ大体反對的ト性質ヲ有シテキルマウデアリマス。コソデハ先ツ連結ノ場合ニ限ツテ

こむばくと連結群 G ハ (自明即チ單位元ノミノ場合及ビ)

1) 以下スベテ可換群ノミヲ指シ、單ニ群ト云フテモ可換群ノコトトスル。

2) 有理数全体ノ (加法) 群ノ指標群ナルそれのいど群ヲ假ニ斯ク呼ブ。

「 G が可分デナク且ツ各それのいど群ノ幾ツカ (> 1)
ノ直和ナル時」

ナラ一ツノ例外ノ場合ヲ除ケバ、必ず G ト同相同型ニハナ
ラズ代数的ニハ同型ナニむばくと連結群が唯一ニ存在スル。
上ノ例外ノ場合ニハソノ様ナモ、ハ存シナイ。

以下ユノコトヲ証明シテミル。即チ G がニむばくと群
ナルトキ、ソノ各元ノ n 乗 (n 倍) ノ全体ノナス部分群ヲ
 G^n デ表セバ G^n ハ G ノ明部分群ナルコト明ラカデアルガ
特ニ G が連結ナラバ $G^n = G$ ガスベテノ自然 n ニ對シ成
立ツ。

何者、 G/G^n ハニむばくと群デ而モソノ各元ノ n 乗が
1 デカラ完全不連結、ヨシテソレハ G キ G^n デハ矛盾スル
カラデアル。(コノコトハニテ指標群ニ有限ノ order ノ
元ノナイコトカラモ明ラカデアル)。此方完全不連結ニむ
ばくと群 G デハスベテノ G^n ノ共通分ハ 1 ノミデカラ、一
般ノニむばくと G ニツイテハ n G^n が丁度ノ連結成分
ニナル。コノ考察カラ連結ニむばくと群ト連結デナイニむ
ばくと群ハ決シテ代数的ニモ同型ニナラナイコトが明カ
デアル。

扱テ、 G ヲ連結ニむばくと群トスル。先ツソレヲ單ニ
代数的ナ群ト見テソノ構造ヲシラベヨウ。 G ノ有限ノ
order ノ元全体ノナス部分群ヲ H トスレバ、明ラカニ H
モ任意ノ n ニ對シテ $H = H^n$ ヲ充スカラ H ハ G ノ直和因

子トトリ $G = H \oplus K$ トナル。³⁾ 更ニ $K \cap G/H =$ 同型デア
 アルカラ矢張りスベテ $n = \infty$ レ $K = K^n$ ナルヲ充ス、而カモ
 K ハ *torsionfree* デアル。因ッテ (例ヘバ脚註 3) ノ定
 理ヲ繰返シ適用シテ)。 K ハ有理数 (全体) ノ加法群 R ノ
 幾ツカ (ソノ濃度ヲ m トスル) ノ制限直和ニナル。(制
 限 = *restricted*)。

一方 *torsion* 群 H ハ各素数 $p =$ 對應スル *primary*
 群ノ制限直和デアアル。而レテ各 *primary* 成分 $H^{(p)}$ が
 矢張り $H^{(p)} = (H^{(p)})^n$ ナルヲ充スカラ 容易ニ知ラレルヤ
 ヲ $H^{(p)}$ ハ分母が p ノ由ナル有理数ノ加法群ヲ *mod* 1
 デ考ヘタ群 S_p ノ幾ツカ (ソノ濃度ヲ m_p トスル) 制限
 直和ニナル。⁴⁾ 即チ結局

$$G = \sum_m^{\oplus} R \oplus \sum_p^{\oplus} \sum_{m_p} S_p$$

トナル。(但シ $\oplus$ ハ制限直和ノツモリ。又 p ハスベテノ
 素数ノ上ヲワクルトスル。

3) 任意ノ (代数的) 群ニオイテ、スベテ $n = \infty$ レ $A^n = A$ ナルヲ充
 ス部余群 A ノ直和因子ニナル。例ヘバ R. Baer, *Ann.*
Math. 37. §1 参照。

4) 例ヘバ, L. Zippin, *Ann. Math.* 36, §1 参照。 S_p ハ
 コノ *simple root group* ナル。(Zippin
 ノ論文ハ本質的ニ可附番ノ場合ダガ、コノコトニ關シ
 ラハ一般ニツイテ同様)

認テ、 $\text{co} = m$ ハ G 自身ノ濃度ト一致シ、而モ G 、
 指標群 X 、濃度ヲ n トスレバ $m = 2^n$ トナル。何者、
 先ヅ G ノ濃度ガ、從ツテ勿論 m ガ $\leq 2^n = 2^n$ ナルコ
 トハ G ノ各元ハソノ指標ノスベテニ對スル値デキマル事
 カラ明カデアル。⁴⁾

他方ノ不等号ヲ証明スルタメ、先ヅ $X =$ 於テ互ニ独立
 正⁵⁾ノ元ノトス極大ノ系 Y ヲ一ツ考ヘル。カ・ル Y ノ存在
 ハ明ラカデアル。先ヅ Y ガ無限集合ノ時ヲ考ヘヨシ。然ラ
 バ Y 、(有限個ノ)元ノ一次結合ノ全体ノトス部分群 X_1 、
 ハ Y ト同ジ濃度ヲ持つガ、 X ノ任意ノ元ハ適當ナ有理整数
 (≠ 0)ヲ掛ケレバ X_1 ノ元トナルガ (Y ノ極大性カラ)、
 X ノ元ハソノスウナ有理整数及ビソノ X_1 ノ元デキマツテ
 表ラシマフカラ、 X ノ濃度モ X_1 ノソレト、從ツテ Y ノ大
 レト同ジデアル。即チ Y ノ濃度ハ n デアル。然ルニ Y ノ
 各元ニ對シ任意ニ實數 (mod 1)ヲ指定スレバ X_1 ノ指
 標ガ與ヘラレルガ (Y ノ元ハ独立)、ソレハ確カニ X ノ指
 標 (即チ G ノ元)ニマデ拡張出来ル。

コノ考察ニヨリ G ノ濃度ハソクモ (從ツテ (上記ニヨ
 リ)丁度) 2^n デアル。而モ 若シ $\text{co} = Y$ ノ元ニ無理數
 ヲ指定スレバ斯ク爲ラレタ G ノ元ハ確カニ無限ノ order

4) m, n ハ勿論無限デアル。

5) 有理整数ヲ係數トスル一次結合ノ意味デ。

ヲ有シ、而モ有理數ヲ mod . トシテ合同デナイ實數ヲトッ
 テ得ヲレルニ元ハ互ニ mod H デ合同デナイ、從ツテ
 G/H 即チ K ノ濃度モ (ソノモ、從ツテ丁度) 2^n デアル。
 ヨツテ $K = \sum_m^{\oplus} R$ ナル $m \in 2^n$ デアル。(Y が有限ノ
 トキハ X ノ濃度即チ n ハ $\aleph$ 。デアリ、上記ト同様ニ $K \cong G/H$
 ノ濃度ハ $\aleph$ 、從ツテ $m \in \aleph = 2^{\aleph}$ 。トナルカラコノ場
 合モ主張ハ成立ツ)。

次ニ各 p ニツキ m_p ハ有限デアルカ、或ヒハ矢張り
 $m_p = 2^{n_p}$ ナル n_p ガアル。何者、指標群 X ノ各元ノ p
 乗ノナス部分群ヲ X^p トスレバ、剩餘群 X/X^p ハ order p
 ノ巡回群 C_p ノ幾ツカ (ソノ濃度ヲ n_p トスル) ノ制限直
 和デアアル。他方 X/X^p ノ指標ハ G ノ order p ノ元デア
 ーガ、逆ニ G ノ order p ノ元ハ X/X^p ノ指標デアアル。
 即チ G ノ order p ノ元ノ部分群ハ X/X^p ノ指標群デア
 リ、コレハ C_p ノ n_p 個ノ直和、從ツテ n_p が無限ノトキ
 2^{n_p} 個ノ制限直和デアアル。他方ソレハ $\sum_{m_p}^{\oplus} S_p$ ノ
 order p ノ元ノ群々カラ $m_p = 2^{n_p}$ デアル (但シ n_p
 が有限ナラ $m_p = n_p$)。

カクテ G ノ分解

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} G = \sum_m^{\oplus} R \oplus \sum_p^{\oplus} \sum_{m_p}^{\oplus} S_p \\ m = 2^n \text{ (} n \text{ 無限)}, \text{ 各 } m_p = \text{有限又ハ } 2^{n_p} \text{ (} n_p \text{ 無} \\ \text{限)} \text{ 且ツ } n_p \leq n \end{array} \right.$$

ヲ得ル。

然ルニ、今 $\{q\}$ ヲ素数、或ル集合トスルトキ $\{q\}$ 連それのいど群⁶⁾ $D_{\{q\}}$ ヲ考ヘルニ、コレハ代数的ニハ

$$D_{\{q\}} = \sum_{\mathbb{C}}^{\textcircled{1}} R \oplus \sum_{p \in \{q\}}^{\textcircled{1}} S_p \text{ デアルコトハ容易ニ知ラレヨ}$$

ウ。(特ニ $\{q\}$ が空ナラ $D_{\{q\}}$ ハ實數 $\text{mod } 1$ ノ群デアアル。)

ソコデ、素数、集合、或ル族 $\{q\}_p$ 及ビ濃度 n_p ヲ採ツテ、各 p ニ對シ

$$\sum_{p \in \{q\}_p} n_p \begin{cases} = n_p & \text{即チ } 2^{\{\Sigma \dots\}} \\ = m_p & (m_p \text{ 有限ノトキ}) \end{cases} = m_p (m_p \text{ 無限ノトキ})$$

ナル様ニスル。更ニ濃度 n ヲ

$$N_0 \cdot \sum_p n_p + N_0 \cdot n = n$$

ナル如ク採ル。ソシテコレニ應ジテ

$$\sum_p D_{\{q\}_p} \oplus \sum_n (\text{全それのいど群})$$

ヲ考ヘルト、コレハ n_p , n ノトリ方カラヲカルヤウニ代数的ニハ G ト同ジカ解ヲモツ。然ルニコノ $(\{q\}_p, n_p, n)$ ノ異ナル系ニ對應スルニ群ハ同相同型ニハナリ

6) 分母が $\{q\}$ 中ノ素数、中ノ積ナル有理數ノ群ノ指標群。

得⁷⁾ + イ. ヨツヲソノ様ナ異ナルニツノ系が得ラレルトキニハ G ニハ確カニ同相同型ニハナラナイガ、代数的ニ同型ナ群が存在スルワケデアル。

扱テ、ユニ⁸⁾ニツノ β ニ對シ $n_p \neq 0$ ナラ確カニ異ナルニツノ系が得ラレルカラ、ソレヲヨイ。只一ツノ β ニツイテ $n_p \neq 0$ ナルトキモ、若シソレガ $n_p \geq 2$ ナラバニツノ $D\{q \neq p\}$ ノ直和ノ代リニソレト代数的ニハ同型ニ次元ノ連結ニおぼくニ群ヲ直和分解不能ナ (β ニツイテソレト同相同型ニハナラナイ) モノ⁸⁾ヲ使ヘバ矢張り悉モ毎 G ト代数的同型デ互ニ同相同型デナイモノガニツ出來ルカラヨロシイ。

更ニ、タニ一ツノ n_p ノミキ 0 デ而モ $=1$ ノトキ、或ヒハスベテ $n_p = 0$ ノトキデモ、若シ G ガ可分、即チ $N = N_0$ ノトキハ、ハトレテ任意ノ有限濃度 (> 0) 或ヒハ N_0 ト出來ルカラ、矢張り同相同型デナイモノが得ラレル。

更ニ、 $n > N_0$ デ唯一ツノ n_p ノミキ 0 デ且ツソレガ $n_p = 1$ ノ時デモ、即チ

$$G = S_p \oplus \sum_m^{\oplus} R \quad (m = 2^n, n > N_0)$$

7) 指標群ヲ考ヘレバヨイデアラウ。

8) ニツノ独立ナ元ヲ有シ、且ツトト異ナル q ニ對シテハ常ニ $\chi^q = \chi$ トナリ、而シテ直和分解不能ナル χ ノ指標群。

ノ時デモ, 先ツニツノ (*discrete* + 群)

$$(1) \quad (\text{分母が } p \text{ ト素 + 有理数ノ群}) \oplus \sum_n^{\textcircled{v}} R$$

$$(2) \quad (p \text{ 進整數ノ群}) \oplus \sum_n^{\textcircled{v}} R$$

ヲ考ヘルト, ユノ兩者ノ指標群ノ代數的構造ハ共ニ上ノ
G ト一致スル。何者, (1)ノ指標群ハ $D_{\{g \neq p\}} \oplus \sum_n (\text{全}$

それのいど群) ヲカラ, ソレハ明ラカデアアル。(2)ニツイテ,

p 進整數ノ (加法) 群ヲ A_p デ表ハセバ $g \neq p$ 對シテハ

$$A_p^g = A_g \text{ デアルカラ } \textcircled{v} \text{ノ指標群ニハ order } g \text{ ノ元ハ}$$

イ。即チソノ (米)ノ形ノ分解ニオイテ $g \neq p$ ナル S_g ハ

出テ来 + イ。更ニ S_p = ツイテモ只一ツシカ出 + イコトハ

A_p / A_p^p が order p ノ *cyclic* 群ナルコトカラワカル,

従ツテ A_p ノ指標群ナルニおぼくニ群ノ代數的構造ハ

$$S_p \oplus \sum_{2^c}^{\textcircled{v}} R \text{ トナル。従ツテ (2)ノ指標群ノ代數的構造ハ}$$

$$S_p \oplus \sum_{2^c}^{\textcircled{v}} R \oplus \sum_{2^m}^{\textcircled{v}} R \text{ デ, } \textcircled{v} = m \geq c \text{ ヲカラ } G \text{ ノ}$$

構造ニナル。

又ハ (1) ト (2) ハ同型デ + イ。何者, (1)ノ群ハソレ

$$\text{ヲ } X \text{ デ表ハシタトキ } X / \cap X^{p^m} \cong (\text{分母が } p \text{ ト素 + 有理数ノ群}) \text{ トナルカ,}$$

$$(2)ノ群デハ } X / \cap X^{p^m} \cong (p \text{ 進整數ノ群}) \text{ トナルカラデアアル。}$$

カクテ G ノニツノ位相ツケハ同相同型 + 群ヲ與

カクテ G ノニツノ位相ツケハ同相同型 + 群ヲ與

へ + 1。8')

又、最後 = 一ツ困ル場合ハ $n > \aleph_0$ 。デ、而モスベ
テ、 $n_p = 0$ 、即チ $G = \sum_m^{\text{II}} R$ ($m = 2^n$, $n > \aleph_0$)
ノ場合デアル。例ヘバ G ガ n 個、全それのいど群ノ直和
ナルトキハ代数的 = カ、ル構造ヲモツ。然ルニ逆ニ G ノ
代数的構造ガサラデアレバ、 G ハ n 個、全それのいど群
ノ直和デナケレバナラナイ。

何者、ソノマウチ G ノ指標群ヲ X トスレバ任意、 $n =$
對シ $X = X^n$ デアル。ソレハ若シ $X \neq X^n$ ナラ X/X^n
ノ指標デ 0 - 指標デ + 1 モノガアリ、ソレハ order が
高々 n (即チ有限ナル) G ノ元ヲ樂ヘルコトニナリ G ノ
(代数的)構造ニ反スルカラデアル。カク X ハ $X = X^n$ ヲ
充タレ且ツ有限、order ノ元ガ + 1 カラ X ハ有理数ノ加
法群ノ族ツカノ制限直和デアリ、 G ハ同個数ノ全それのい
ど群ノ直和デアル。ソノ個数ガ n ト一致スルコトハ明カデ
アラフ (但シ連續体假定ヲ假定スル)。斯クテユノ場合 G
ト代数的 = 同型 + 1 モノハ必ず G ト同相同型ニナツテ了

8') 以下イサコカ 若シマヤレニ色々ノ群ヲモチ出シテ来テ統一
ヲ缺イタガ、(こゝはくと連結群ノ指標群ナル) *tori-*
onsfree ノ群ノ一般論ノ未だ存在シナイ現状トレ
テマタ止ムヲ得ナイノデハナカラウカ?

7.

以上で結局我々、最初述べた主張が証明サレタワ
ケデアル。

ナホ、以上、 G 、分析、結果ナル、或ル代数的ナ群が
こむばくと連結群ナルタメ、必要且ッ充分ナ構造ハ(※)ナ
ル形ヲ有ツコトデアルトイフコトモ一寸興味アラウ。

ナホ、局所連結性ヲ假定スレバ、ニッ、代数的ニ同型
ナ連結且ッ局所連結こむばくと群ハ必ズ同相同型デアルコ
トハ直チニ知ラレル。

(以上スベテ群ト云フヌノハ可換群デアル)。