



Title	不変測度ノ存在ニツイテ（Ⅲ）
Author(s)	河田，敬義
Citation	全国紙上数学談話会．1943，256，p. 451-456
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75074
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1141. 不変測度ノ存在ニツイテ III

河 田 敬 義 (東京文理大)

E. Hopf, *Theory of measure and invariant integrals*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 34 (1932)ニ於テ, 同じ問題が既ニ解決サレテヤルコトヲ最近知リマシタノデ, ソレトノ關係ニツイテ考ヘテ見タイト思ヒマス. Hopfノ結論ハ次ノ通りデス.

測度空間 $(\Omega, \mathcal{B}, m)$ ($m(\Omega) = 1$) と、その上、
 一対一可測変換 σ (但し σ の測度 0 の集合 γ 測度 0 の集
 合 = ヲツモノトスル) の作ルアル群 G とが與ヘラレテ
 然レトキ前 = 與ヘタ意味デ、不変測度が存在スルタメノ必
 要十分條件ハ

[A] $\Omega \sim M$ 十ラバ $m(M) = 1$ とナルコトデアル。
 此処ニハ前 = 與ヘタ *Zerlegungsleich* とルコ
 トヲアハス: $\Omega = \bigvee_{n=0}^{\infty} A_n, A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j),$
 $m(A_0) = m(B_0) = 0, A_n = B_n^{\sigma_n}, \sigma_n \in G, (n = 1, 2,$
 -----)

証明ハ間接法デアツテ、我々ノ方法トハ全ク異ツテキ
 ル。サテ求メル條件ハ必要十分條件デアルガ、實際ハナル
 ベク十分條件トシテ弱イ方が望マシイ。ソユデ我々ノ方法
 ニヨツテモ亦 [A] が十分デアルコトヲ示サウ。談話 II =
 コレバ、求メル必要十分條件ハ次ノ如クニ表ハセルノデア
 ツタ: (前 = 與ヘタノト多少コトナルガ、實際、証明中ニ
 用ヒル点ハ変ラナイ)

[B] 任意ノ $E (m(E) > 0)$ = 對シテ、アル $\delta > 0$
 がキマリ、 $E \sim F$ 十ラバ必ず $m(F) > \delta$ とナルコト
 デアル。

[A] 十ラバ [B] とルコトノ証明。[B]ヲ否定シテ、
 アル $A_1 \sim A_2 \sim \dots, A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j), m(A_i) > 0$
 ナル集合ノ集リ、存在スルコトヲ証明スレバ、[A] が否定

サレルカラ証明ヲ終ル。

今 $[B]$ ヲ否定スレバ, アル E_0 が存在シテ $m(E_0) > 0$
且ツドンナニナル ε_n ニ對シテ $\forall \tau \in E_0 \sim E_n, m(E_n) < \varepsilon_n$
ナルヤウニ E_n がトレル。

今 $E_0 \sim E_n$ ノ對應ヲ τ_n , $E_m \sim E_0 \sim E_n$ ノ對應ヲ
 $\tau_n^m = \tau_m^{-1} \tau_n$ トスル。

$$(1) \quad E_0^0 = E_0 - \bigvee_{r=1}^{\infty} E_r \quad \text{トシ}$$

$$E_0^0 \sim^{\tau_n} E_n^0 \subset E_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

トスレバ

$$E_0^0 \cap E_n^0 = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

トナル。

$$(2) \quad E_1' = E_1 - \bigvee_{r=2}^{\infty} E_r^0 \quad \text{トシ}$$

$$E_1' \sim^{\tau_n'} E_n' \subset E_n^0 \subset E_n \quad (n = 2, 3, \dots)$$

トスレバ

$$E_1' \cap E_n' = 0 \quad (n = 2, 3, \dots)$$

トナル。

$$(3) \quad \text{一般ニ} \quad E_j^k \quad (k = 0, 1, \dots, j \geq k) \quad \text{ヲ}$$

$$E_j^k \subset E_j^{k-1} \subset \dots \subset E_j^0 \subset E_j,$$

$$\begin{cases} E_k^k \cap E_j^k = 0 & (j = k+1, \dots), \\ E_k^k \cap E_j^k \subset E_j^k & (\quad " \quad) \end{cases}$$

＋ルゴトク定ナルユトが出来ル。証明ハ帰納法デ、(1), (2)
ノ方法デ

$$E_k^k = E_{k-1}^{k-1} - \bigvee_{r=1}^{\infty} E_{k+r}^{k-1}$$

トシテ次々ニ作レバヨイ。

$$E_k^k \cap E_j^k \subset E_{k-1}^{k-1} \cap E_j^k = 0 \quad (k < j)$$

(4) 今 E_n^{n-1} ナル状態ニヨリ

$$E_k^k \cap E_0^k \subset E_0^k$$

トスレバ

$$E_0^0 \supset E_0^0 \supset E_0^1 \supset \dots \supset E_0^k \supset \dots$$

トナル。故ニ

$$E_0^\infty = \bigwedge_{k=0}^{\infty} E_0^k$$

トオケバ

$$E_0^\infty \cap E_n^\infty \subset E_n^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

＋ル E_n^∞ が存在シ、 $E_i^\infty \cap E_j^\infty \subset E_i^i \cap E_j^j = 0 \quad (i \neq j)$ ト

ナル。故ニ $m(E_0^\infty) > 0$ ナル如ク E_n が作レバ証明ハ
了ル。

$$\begin{cases} E_k^k \cap E_j^k = 0 & (j = k+1, \dots), \\ E_k^k \cap E_j^k \subset E_j^k & (\quad " \quad) \end{cases}$$

ナルゴトク定ナルユトが出来ル。証明ハ帰納法デ、(1), (2)ノ方法デ

$$E_k^k = E_k^{k-1} - \bigvee_{r=1}^{\infty} E_{k+r}^{k-1}$$

トシテ次々ニ作レバヨイ。

$$E_k^k \cap E_j^k \subset E_k^k \cap E_j^k = 0 \quad (k < j)$$

(4) 今デ n ナル對應ニヨリ

$$E_k^k \cap E_0^k \subset E_0^k$$

トスレバ

$$E_0^0 \supset E_0^0 \supset E_0^1 \supset \dots \supset E_0^k \supset \dots$$

トナル。故ニ

$$E_0^\infty = \bigwedge_{k=0}^{\infty} E_0^k$$

トカケバ

$$E_0^\infty \cap E_n^\infty \subset E_n^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ナル E_n^∞ が存在シ、 $E_i^\infty \cap E_j^\infty \subset E_i^i \cap E_j^j = 0 \quad (i \neq j)$ ト

ナル。故ニ $m(E_0^\infty) > 0$ ナル如ク E_n が作レバ証明ハ了ル。

$$(i) \quad a_0 = m(E_0) \text{ トシ, } m(E_1) < \varepsilon_1 = \frac{1}{16} a_0 = \text{トシ.}$$

(ii) $E_0 \stackrel{\tau_1}{\sim} E_1$ は絶対連続 + 対応デアルカラ, λ_1 が十分小 = トシ.

$$E_1 \supset A_1, m(A_1) < \lambda_1 \text{ トラバ,}$$

$$A_1 \stackrel{\tau_1^{-1}}{\sim} A_0 \subset E_0 \wedge m(A_0) < \frac{1}{16} a_0$$

ヲ満足スル.

$$(iii) \quad \lambda_2 = m(E_2) < \varepsilon_2 = \text{Min} \left(\frac{1}{32} a_0, \frac{1}{2} \lambda_1 \right) = \text{トシ.}$$

又 $E_0 \stackrel{\tau_2}{\sim} E_2 = \exists \text{ して } m(A_2) < \lambda_2, E_2 \supset A_2 \sim A_0 \subset E_0 \text{ カ}$

$$\text{ヲ } m(A_0) < \frac{1}{32} a_0 = \lambda_2 \text{ トラバ.}$$

$$(iv) \quad \lambda_3 = m(E_3) < \varepsilon_3 = \text{Min} \left(\frac{1}{64} a_0, \frac{1}{4} \lambda_1, \frac{1}{2} \lambda_2 \right)$$

$$= \text{トシ.} \dots\dots\dots \text{通ツテ同様} = m(E_n) < \varepsilon_n, E_0 \stackrel{\tau_n}{\sim} E_n,$$

$$\varepsilon_n = \text{Min} \left(\frac{1}{8} \frac{1}{2^n} a_0, \frac{1}{2^{n-1}} \lambda_1, \frac{1}{2^{n-2}} \lambda_2, \dots, \frac{1}{2} \lambda_{n-1} \right)$$

$$= \varepsilon_n \text{ トラバ. 但シ } \lambda_n \wedge$$

$$E_0 \stackrel{\tau_n}{\sim} E_n \text{ + 対応デ } E_n \supset A_n, m(A_n) < \lambda_n \text{ トラバ}$$

$$\text{ハ } A_n \stackrel{\tau_n^{-1}}{\sim} A_0 \subset E_0 \wedge m(A_0) < \frac{1}{8} \frac{1}{2^n} a_0 \text{ トトラバ.}$$

キタル.

(v) コノトキ

$$m(E_0^o) \geq a_0 - \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \geq a_0 \left(1 - \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \right) = \frac{3}{4} a_0$$

一般 =

$$m\left(\bigvee_{k=1}^{\infty} E_{n+k}\right) \leq \sum m(E_{n+k}) \leq \lambda_n \sum \frac{1}{2^k} = \lambda_n$$

ト + 1)

$$E_n^{n+1} - E_n^n \subset \bigvee_{k=1}^{\infty} E_{n+k}^{n+1} \subset \bigvee_{k=1}^{\infty} E_{n+k} \quad \text{カ } \bar{\tau}$$

$$m(E_n^{n+1} - E_n^n) \leq \lambda_n \tau + \nu.$$

$$\text{故} = \lambda_n, \tau + \nu \text{ カ } \tau, \quad m(E_0^{n+1} - E_0^n) < \frac{1}{8} \frac{a_0}{2^n} \tau + \nu.$$

$$\text{故} = m(E_0^{\infty}) = m(E_0^0) - m(E_0^0 - E_0^1) - \dots - m(E_0^{n+1} - E_0^n) - \dots$$

$$= \frac{3}{4} a_0 - \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} a_0 = \frac{1}{2} a_0 > 0$$

ト + 11。

q. e. d.

———— (18. 6. 21) ————