



Title	混合型保測変換ノニ, 三ノ性質ニツイテ
Author(s)	河田, 敬義
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 256, p. 457-467
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75075
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1142. 混合型保測変換ノ二, 三ノ性質ニツイテ

河田 嶺 義 (東京文理大)

§ 1.

$(\Omega, \mathcal{B}, m)$ ($m(\Omega) = 1$) ヲ測度空間トシ,
 $\Omega \ni \omega \rightarrow T\omega \in \Omega$ ヲソノ保測変換トスル。 T ガエルゴード的 (ergodisch) トハ $\mathcal{B} \ni E, m(E \ominus TE) = 0$ ナラバ $m(E) = 0$ 又ハ $= 1$ ナルコトヲイフ。 T ガ混合型 (Mischungstypus) ノデアルトハ $\mathcal{B} \ni A, B =$ 数シテ

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} m(T^n A \cap B) = m(A) \cdot m(B)$$

ガ成立スルコトヲイフ。又 (1) ガアル $\{n\}$ ノ密度 1 ノ部分列 $\{n'\}$ ヲトレバ $\lim_{n' \rightarrow \infty} =$ 数シテ成立スルトヤ $= T$ ヲ廣義混合型トイフ。コレハ T ガエルゴード的ガ且ツ角変数 ϕ :

$$(2) \phi(T\omega) = e^{i\lambda_0} \phi(\omega) \quad f.i.e. \quad (\lambda_0 \neq 0(2\pi))$$

ガ存在シナイコト同値デアルコトガ良ク知ラレテキル。

G. D. Birkhoff ノ個別エルゴード定理ニヨレバ, T ガエルゴード的デアルトノ必要且ツ十分な条件ハ, 任意ノ Ω 上 m -可積分ノ函数 $f(\omega): f(\omega) \in L^1_1(\Omega) =$ 数シテ殆ントスベテノ $\omega =$ 数シテ

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k \omega) = \int_{\Omega} f(\omega) m(d\omega)$$

トナルコトデアル。(3)ノイリ = スベテノ $E \in \mathcal{B}$ = 對シテ
殆ンドスベテノ ω = 對シテ

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_E(T^k \omega) = m(E)$$

(χ_E ハ E ノ特性函数)ト云ッテモ同値デアル。

之レニ對シテ次ノ定理が証明サレル。

定理 I 『エルゴード的保測変換 T が廣義混合型デア

ルタノノ必要十分条件ハスベテノ $f(\omega) \in L^1(\Omega)$ 及ビ

入非 0 (mod. 2π) = 對シテ殆ンド到ル所

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\lambda} f(T^k \omega) = 0$$

トナルコトデアル。(5)ノイリ = スベテノ $E \in \mathcal{B}$ = 對シテ
殆ンドスベテノ ω = 對シテ

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\lambda} \chi_E(T^k \omega) = 0$$

ト云ッテモ同値デアル。』

E. Hopfハ又 T が廣義混合型トナルタメノ条件ヲ
積空間ニ於ケル積変換ノ性質ニヨッテ導ヘタ。ソレト關聯
シテ、今別ニ今一ツノ測度空間 $(\Omega', \mathcal{B}', m')$ ($m'(\Omega') = 1$) ト、ソノ上ノ保測変換 T' トが與ヘラレテキルトキ
=、積空間

$$\bar{\Omega} = \Omega \times \Omega', \quad \bar{\omega} = (\omega, \omega'),$$

$$\omega \in \Omega, \omega' \in \Omega'$$

、上テ $E \times E' = \{(\omega, \omega'); \omega \in E, \omega' \in E'\}$, $E \in \mathcal{B}, E' \in \mathcal{B}'$
ヲ含ム最小ノ Borel 集合体ヲ $\bar{\mathcal{B}}$, 其処テノ積測度ヲ $\bar{m}: \bar{m}(E \times E') = m(E) \times m(E')$ トスレバ,

$$(7) \quad \bar{T} \bar{\omega} = (T\omega, T\omega')$$

ナル $\bar{\Omega}$ 上ノ変換ハ又レツノ保測変換トナル。E. Hopf
ハ T が広義混合型デアールタメノ必要十分条件ハ

$(\Omega', \mathcal{B}', m') = (\Omega, \mathcal{B}, m)$, $T' = T$ ノトキ, $\bar{T}$ ガエル
ゴード的デアールコトヲ証明シタ。コレト関係シテ次ノ定理
ガ証明サレル。

定理 II 『 T が広義混合型ナルタメノ必要十分条件
ハ, 任意ノ測度空間 $(\Omega', \mathcal{B}', m')$ 及ビ任意ノ Ω' 上ノエル
ゴード的保測変換 $T' =$ 對シテ (7), $\bar{T}$ ガエルゴード
的ナルコトデアル。』

コノ定理ノ意味ハ統計系列ノ理論ト結びツクルコトニ
ヨリ、ハッキリスル様ニ思ハレルガ此処デハ省略スル。

次ニ前ノ意味デノ逆ノ問題ヲ考ヘテミル。今ニニ興ハ
タ $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{B}})$ 上ニ測度 $\bar{\mu}$ ガ定義サレテ

$$(8) \quad \bar{\mu}(E \times \Omega') = m(E), \quad \bar{\mu}(\Omega \times E') = m'(E'),$$

$$\bar{\mu}(\bar{E}) = \bar{\mu}(\bar{T} \bar{E})$$

ヲ満足シ, 且ツ $\bar{T}$ が $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{B}}, \bar{\mu})$ 上エルゴード的デアール
トスルト

定理 III 『今 T が廣義混合型, T' がエルゴード的トスレバ, $\bar{\mu} = \bar{m}$ カ、然ラザレバ $\bar{\mu}$ ハ $\bar{m}$ = 對シテ特異 (singular) デアル』

即チ $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{B}}, \bar{\mu})$ 中 m ト m' トハ 互ニ独立デアルカ、又ハ甚ダ緊密ニ関係シテホナケレバナラナイ。

§ 2

定理 II カラ定理 I, III ヲ導クコトハ容易デアル。

定理 I ノ証。 今 T が廣義混合型デナケレバ, (2) ノ ϕ ヲトリ, $\lambda = -\lambda_0$ トスレバ

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\lambda} \phi(T^k \omega) = \phi(\omega) \quad f.i.$$

トナリ, (5) が成立シナイ。

今度ハ T が廣義混合型トスレバ, Ω' が実数全体ノ加法群ヲ mod. 2π デ考ヘタ空間, $\mathcal{B}'$ がソノ Borel 集合系, m' が Lebesgue 測度, $T'\omega' = \omega' + \lambda$ トスル。

(i) $\lambda =$ 無理数ナラバ T' ハエルゴード的保測変換トナルカラ, 定理 II = ヨツテ $\bar{\Omega} = \Omega \times \Omega'$ 上ノ $\bar{T} = T \times T'$ ハ又エルゴード的トナル。故ニ $F(\bar{\omega}) = e^{i\omega'} f(\omega)$ トオケバ

$$F(\bar{T}\bar{\omega}) = e^{i(\omega + \lambda)} f(T\omega)$$

トナルカラ, (3) = ヨツテ

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F(T^k \bar{\omega}) \\
&= e^{i\omega'} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\lambda} f(T^k \omega) = \int_{\bar{\Omega}} \bar{F}(\bar{\omega}) \bar{m}(d\bar{\omega}) \\
&= \int_{\Omega} f(\omega) m(d\omega) \times \int_{\Omega'} e^{i\omega'} m(d\omega') = 0 \quad f.ü
\end{aligned}$$

即ち (5) が成立する。

(iii) $\lambda = \frac{s}{r}$, $(r, s) = 1$ とする, T が廣義混合型となる故, T^r はエルゴード的である。故に $n = mr + t$, $0 \leq t < r$ とする。

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\lambda} f(T^k \omega) \\
&= \frac{1}{r} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r(m+1)}{n} \times \left\{ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} f(T^{rk} \omega) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \dots + \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m+1} e^{it \frac{s}{r}} \sum_{k=0}^m f(T^{rk} T^t \omega) \right\} \right. \\
&\quad \left. + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_m}{n} \times \left\{ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} e^{i(t+1) \frac{s}{r}} \sum_{k=0}^{m-1} f(T^{rk} T^{t+1} \omega) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \dots + \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(T^{rk} T^{r-1} \frac{s}{r} \omega) \right\} \right] \\
&= \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \int_{\Omega} f(T^k \omega) m(d\omega) e^{i \frac{ks}{r}} \\
&= \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} e^{i \frac{ks}{r}} \times \int_{\Omega} f(\omega) m(d\omega) = 0 \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

定理 III の証明. (8) 式, 測度 $\bar{\mu}$ を

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2$$

と $\bar{m}$ = 関シテ 絶対連続 + $\bar{\mu}_1$ と, 特異 + $\bar{\mu}_2$ と = 分
ケル。

$$\bar{\mu}_1^0(E) = \bar{\mu}_1(TE), \quad \bar{\mu}_2^0(E) = \bar{\mu}_2(TE) \quad \text{ハ又夫々}$$

$\bar{m}$ = 関シテ 絶対連続及特異トナルカラ

$$\begin{aligned} \bar{m}(E) &= \bar{m}(TE) = \bar{\mu}_1(TE) + \bar{\mu}_2(TE) \\ &= \bar{\mu}_1^0(E) + \bar{\mu}_2^0(E) \end{aligned}$$

カラ $\bar{\mu}_1(E) = \bar{\mu}_1^0(E) = \bar{\mu}_1(TE), \quad \bar{\mu}_2(E) = \bar{\mu}_2^0(E) = \bar{\mu}_2(TE)$
ヲ得ル。

シカレ $\bar{m}$ ハ 定理 II カラ エルゴード的ナル故, ソレ =
関シテ 絶対連続且 不変ト $\bar{\mu}_1$ ハ

$$\bar{\mu}_1(E) = \alpha \bar{m}(E), \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

デナケレバナラヌ。一方 $\bar{\mu}_2$ ハ $\bar{m}$ - 特異且 $\bar{T}$ - 不変ナル故
アレ $\bar{m}(\bar{E}) = 0$ ナル $\bar{E} \in \bar{B}$ ヲトレバ

$$\bar{\mu}_2(\bar{E}) = \bar{\mu}_2(\bar{B}), \quad \bar{\mu}_2(\bar{B} - \bar{E}) = 0, \quad \bar{T}\bar{E} = \bar{E}$$

ナラシメタルコトが出来ル。故ニ

$$\bar{\mu}(\bar{E}) = \bar{\mu}_2(\bar{B}), \quad \bar{\mu}(\bar{B} - \bar{E}) = \bar{\mu}_1(\bar{B}), \quad \bar{T}\bar{E} = \bar{E}$$

ヨリ, $\bar{\mu}$ = 関シテ $\bar{T}$ がエルゴード的デアレカラ $\bar{\mu} = 0$ ナ
ハ $\bar{\mu}_2 = 0$ デナケレバナラナイ。 *q. e. d.*

§ 3

定理 II の証明. 今 $\bar{T}$ が廣義混合型デナケレバ (2) ,

ϕ ヲトル。又 $(\Omega', \mathcal{B}', m') = (\Omega, \mathcal{B}, m)$, $T = T'$ ト
シテ

$$F(\bar{\omega}) = \frac{\phi(\omega)}{\phi(\omega')}$$

トスレバ, $F(\bar{\omega}) \neq \text{Konst.}$ デ, 且ツ

$$F(\overline{T\omega}) = \frac{\phi(T\omega)}{\phi(T'\omega')} = \frac{\phi(\omega)}{\phi(\omega')} = F(\bar{\omega})$$

トナル。故ニ $\overline{T}$ ハエルゴード的デトイ。

今度ハ $\overline{T}$ ヲ廣義混合型トスル。コノ場合ニ $\overline{T}$ ガエルゴ
ード的デナイトシテ矛盾ニ導ク。

$\overline{T}$ ガエルゴード的デナイトレタノデアルカラ $\bar{B} \ni \bar{E}$,
 $\bar{m}(\bar{E}) = C$, $C \neq 1$, $C \neq 0$ 且ツ

$$(9) \quad \bar{m}(\overline{T E} \ominus \bar{E}) = 0$$

ナル $\bar{E}$ が存在スル。Furiniノ定理カラ

$$(10) \quad (\bar{E})_{\omega'} = \{\omega; (\omega, \omega') \in \bar{E}\}$$

トスレバ, 殆んどスベテノ $\omega' =$ 對シテ $(\bar{E})_{\omega'} \in \mathcal{B}$ デ

$$(11) \quad \bar{m}(\bar{E}) = C = \int_{\Omega'} m((\bar{E})_{\omega'}) m'(d\omega')$$

トナル。コノトキ

$$(12) \quad m((\bar{E})_{\omega'}) = C \quad f.\bar{m}$$

トナル。何トスレバ, ソウデナイトスレバアル $\varepsilon > 0$ ニ對
シテ

$$A' = \{\omega'; m((\bar{E})_{\omega'}) \geq C + \varepsilon\}, m'(A') > 0$$

$$B' = \{ \omega'; m((\bar{E})_{\omega'}) \leq c - \varepsilon \}, \quad m'(B') > 0$$

トナル。假令より T' ハエルゴード的デアルカラ、アルル
 $=$ 對シテ

$$m'(T'^n A' \cap B') > 0$$

トナル。故ニ (11) カラ

$$\begin{aligned} \bar{m}(T^n \bar{E} \cap \bar{E}) &\geq \int_{\Omega'} |m((\bar{E})_{\omega'}) - m((T^n \bar{E})_{\omega'})| m'(d\omega') \\ &\geq 2\varepsilon \cdot m'(T'^n A' \cap B') > 0 \end{aligned}$$

トナリ (9) = 矛盾スル。

$=$ テ $\bar{B}$ ノ定義カラ任意ニ取ハラレタ $\varepsilon > 0 =$ 對シテ

$$E \in \mathcal{B}, E'_i \in \mathcal{B}', E'_i \cap E'_j = \emptyset \quad (i \neq j),$$

$$\bigcup_{i=1}^n E'_i = \Omega', \quad \bar{E}_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^n E_i \times E'_i$$

$$(13) \quad \bar{m}(\bar{E} \ominus \bar{E}_\varepsilon) < \varepsilon$$

ナルヤ $\eta = E_i, E'_i$ ラエラデユトが出来ル。コノトキ

$$\begin{aligned} \varepsilon > \bar{m}(\bar{E} \ominus \bar{E}_\varepsilon) &= \int_{\Omega'} m((\bar{E} \ominus \bar{E}_\varepsilon)_{\omega'}) m'(d\omega') \\ &\geq \sum_{i=1}^n |m(E_i) - c| m'(E'_i) \end{aligned}$$

デアルカラ、 $d > 0 =$ 對シテ

$$(14) \quad \sum_{m(E_i) > c+d} m'(E'_i) \leq \frac{2\varepsilon}{d}$$

トナル。

サテ T が廣義混合型デアルトイフ假定カラ $\varepsilon > 0$ 是對シテアルト分大ナル N ヲトレバ

$$(15) \quad |m(T^N E_i \cap E_j) - m(E_i) \times m(E_j)| < \varepsilon, \quad i, j = 1, \dots, n$$

ヲシタルコトが出来ル。 (9) ト (13) トカラ

$$(16) \quad \bar{m}(\bar{T}^N \bar{E}_\varepsilon \ominus \bar{E}_\varepsilon)$$

$$\leq \bar{m}(\bar{T}^N \bar{E}_\varepsilon \ominus \bar{T}^N \bar{E}) + \bar{m}(\bar{E}_\varepsilon \ominus \bar{E}) < 2\varepsilon$$

トナル。 一方

$$E'_{ij} = T'^N E'_i \cap E'_j, \quad i, j = 1, \dots, n$$

トスレバ

$$(17) \quad \begin{cases} E'_{ij} \cap E'_{kl} = 0, & i \neq k \text{ 又 } j \neq l \\ E'_j = \bigcup_{i=1}^n E'_{ij}, & \bar{T}^N E'_i = \bigcup_{j=1}^n E'_{ij} \end{cases}$$

ヲ満足スル。

$$\text{今 } m'(E'_{ij}) = \alpha_{ij} \geq 0 \text{ トオケル}$$

$$(18) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} = m'(E'_j), & \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} = m'(T'^N E'_i) = m'(E'_i), \\ \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} = 1 \end{cases}$$

トナル。 (15) カラ

$$\begin{aligned} m(T^N E_i \ominus E_j) &= m(E_i) + m(E_j) - 2m(T^N E_i \cap E_j) \\ &\geq m(E_i) + m(E_j) - 2m(E_i)m(E_j) - \varepsilon \end{aligned}$$

テアルカラ

$$\overline{m}(\overline{T}^N \overline{E}_\varepsilon \ominus \overline{E}_\varepsilon) = \overline{m}\left(\bigcup_{i,j=1}^n ((T^N E_i \ominus E_j) \times E'_{ij})\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^n m(T^N E_i \ominus E_j) m'(E'_{ij})$$

$$\geq \sum_{i,j=1}^n \left\{ m(E_i) + m(E_j) - 2m(E_i) m(E_j) - \varepsilon \right\} \Delta_{ij}$$

$$\stackrel{(13)}{=} \sum_{i=1}^n m(E_i) m'(E'_i) + \sum_{j=1}^n m(E_j) m'(E'_j)$$

$$- 2 \sum_{i,j=1}^n m(E_i) m(E_j) \Delta_{ij} - 2\varepsilon$$

$$= 2 \left\{ \sum_{i=1}^n m(E_i) m'(E'_i) - \sum_{i,j=1}^n m(E_i) m(E_j) \Delta_{ij} - \varepsilon \right\}^{*})$$

シカル = Schwarz, 不等式カラ

$$\sum_{i,j=1}^n m(E_i) m(E_j) \Delta_{ij} \leq \left\{ \left(\sum_{i,j=1}^n m(E_i)^2 \Delta_{ij} \right) \left(\sum_{i,j=1}^n m(E_j)^2 \Delta_{ij} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{i=1}^n m(E_i^2) m'(E'_i) \leq \sum_{m(E_i) > c+d} m(E_i) m(E'_i)$$

$$+ (c+d) \sum_{m(E_i) \leq c+d} m(E_i) m(E'_i)$$

$$\stackrel{(14)}{\leq} (c+d) \sum_{i=1}^n m(E_i) m(E'_i) + (1-c-d) \frac{2\varepsilon}{d}$$

ト + 14.

$$\Delta = \frac{1}{2}(1-c) \text{トオ} \neq *) = \Delta \wedge \Delta \leq \Delta$$

$$*) \geq 2 \left\{ d \sum_{i=1}^n m(E_i) m'(E'_i) - 2\varepsilon - \varepsilon \right\}$$

$$\text{故} = (16) \text{ト合セテ} \left(\text{且} \forall (13) \text{カラ } \bar{m}(\bar{E}_\varepsilon) = \sum_{i=1}^n m(E_i) m'(E'_i) \right.$$

$$\geq c - \varepsilon + \nu \text{ 故})$$

$$2\varepsilon \geq 2 \left\{ \frac{1-c}{2} (c-\varepsilon) - 3\varepsilon \right\} \geq c(1-c) - 7\varepsilon$$

$$\text{即 } 9\varepsilon \geq c(1-c)$$

トナル。コレハ $C \neq 0, C \neq 1, \varepsilon \rightarrow 0$ トスレバ矛盾ナリ。

q. e. d.

(6.21)