



Title	或ル種ノ函數方程式 及ビ 函數不等式ニ就イテ
Author(s)	春木, 博
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 257, p. 480-503
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75077
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1144. 或ル種ノ函數方程式及ビ 函數不等式ニ就イテ

春 木 博 (神戸高等
商船學校)

以下未整理ノマコ誠ニ難然トシテアルガ、種々ナル函
數方程式ヲ適當ナル條件ノ下ニ解イテ見ヨウ。

§ 1. $f(x)$ が $|x| < 1$ デ、定義サレター價可測函數
ナルトキ、次ノ函數方程式ニ適スルモノヲ求メテ見ヨウ。

$$[1] \quad f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) + f\left(\frac{x-y}{1-xy}\right) = 2f(x)$$

此ノ方程式ハ $f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = f(x) + f(y)$ ト同値ナルコ

トハ容易ニ示サレル。

$x = \frac{1-t}{1+t}$ ナル変換ニヨッテ、 $|x| < 1$ ハ $t > 0$ ニ移
ル。

$$[1] \text{ニ於テ、} x \text{ノ代リ} = \frac{1-x}{1+x}, \quad y \text{ノ代リ} = \frac{1-y}{1+y} \text{トオケベ}$$

$$f\left(\frac{1-xy}{1+xy}\right) + f\left(\frac{1-\frac{x}{y}}{1+\frac{x}{y}}\right) = 2f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

$g(x) = f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ トオケバ $g(x)$ ハ $x > 0$ デ、定義サレ
ター價可測實函數デ、シカモ次ノ函數方程式ヲ満足サレ
ル。

$$g(xy) + g\left(\frac{x}{y}\right) = 2g(x)$$

上式 = 於テ, $y = x$ トオケバ

$$g(x^2) = 2g(x) - C \quad (\text{但シ } C = g(1)) \dots\dots (1)$$

又, x , y 代リ = xy , y 代リ = $\frac{x}{y}$ トオケバ

$$g(x^2) + g(y^2) = 2g(xy)$$

上式へ (1) を代入スレバ

$$g(x) + g(y) - C = g(xy)$$

$h(x) = g(x) - C$ トオケバ

$$h(x) + h(y) = h(xy)$$

$h(x)$ は可測ナル故, 之ヨリ $h(x) = \alpha \log x$ (但シ α は任意, 實常數)

$h(x) \rightarrow g(x) \rightarrow f(x)$ トカヘルコト = ヨリ

$$f(x) = \alpha \log \frac{1-x}{1+x} + C \quad (\alpha, C \text{ は任意, 實常數})$$

次ニ, コノ函數方程式ニ對シ, 幾何學的意味付ケヲシテ見ヨウ。今 $|x| < 1$ ナルスベテノ實數ニ對シ, $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$ トスルトキ

$$\alpha(\alpha, \beta) = \frac{1}{\log \left| \frac{\alpha - \beta}{1 - \alpha\beta} \right|}$$

ナル距離付ケヲシヨウ。

之ハ Green 幾何學ニ於テ用オラレル。スルト, 容易ニ計算ニヨリ, コノ意味ニ於テ = 点 $\frac{x+y}{1+xy}$, $\frac{x-y}{1-xy}$, 中点

ハ x ト $+1$ 。

一方 $f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right), f\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)$ 、中点ハ普通、

Euclid、意味ニ於テ、 $f(x)$ トナルコトハ [1]、函数方程式ヨリ判ル。結局 $f(x)$ ヲ $|x| < 1$ ナル實數ヲウツス一價可測寫像トスルトキ、*Green* 幾何ニ於ケル意味ニ於テ二点、中点ヲ *Euclid*、意味ニ於テ中点ニウツス寫像ハ $\propto \log \frac{1-x}{1+x} + C$ ニ限ルコトガ判ル。

§2. 次ニ、 $f(x)$ ヲ $|x| < 1$ ナ定義サレタ一價微分可能ナル函数トスルトキ

$$[2] \quad f(x) + f(y) = f\left(\frac{x\sqrt{1-y^4} + y\sqrt{1-x^4}}{1+x^2y^2}\right)$$

ニ適スル函数 $f(x)$ ヲ求メテ見ヨウ。

$$[2] \text{ ヲ } y = \text{ツイテ微分シテ } y=0 \text{ トオケバ } f'(x) = \frac{f'(0)}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$[2] = \text{於テ } x=0, y=0 \text{ トオケバ } f(0)=0$$

$$\text{故ニ } f(x) = C \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

茲ニ C ハ任意ノ實常數ナリトスル。

コノ函数ハ連珠形ノ弧長ヲ求メルトキ、出テクル函数デア
ル。

次ニ $f(x)$ ヲ $-\infty < x < +\infty$ ナ定義サレタ二回微分可

能ハ函数トスルトキ，次ノ函数方程式ヲ満足セシメルモノヲ求メテ見ヨウ。

$$\begin{aligned} [3] \quad & f^4(x) + f^4(y) + f^4(x+y) - 2f^2(y)f^2(x+y) \\ & - 2f^2(x+y)f^2(x) - 2f^2(x)f^2(y) \\ & + 4f^2(x)f^2(y)f^2(x+y) = 0 \end{aligned}$$

コノ函数方程式ハ又次ノ如クニ書きケルコトハ明カデアール。

$$\begin{aligned} & \{f(x+y) + f(x) + f(y)\} \{f(x) + f(y) - f(x+y)\} \{f(y) + f(x+y) \\ & - f(x)\} \times \{f(x+y) + f(x) - f(y)\} = 4f^2(x)f^2(y)f^2(x+y) \end{aligned}$$

常數解 $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ ヲ除キ $f(0) = 0$ ナルコトハ容易ニ判ル。

[3]ヲ y ニツイテニ回微分シテ、 $y=0$ トオケバ $f(0)=0$ ナル故

$$f'^2(x) = d^2 \{1 - f^2(x)\} \quad \text{茲ニ } d = f'(0)$$

$$\text{之ヨリ} \quad f(x) = \sin dx$$

以上ヲ綜合スレバ

$$f(x) \equiv \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f(x) \equiv -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f(x) = \sin dx$$

(但シ d ハ任意ノ常數) ガ求ムル解ノ凡テデアール。

§3. 次ニ、 $f(x)$ ヲ原点ノ近傍ヲ原点ヲ除キ、一價正則ナルトキ、次ノ函数方程式ヲ満足セシメルモノヲ求メテ見ヨウ。

$$[4] \quad f(x+y) + f(x-y) = \frac{2f(x)f^2(y)}{f^2(y) - f^2(x)}$$

[4] = 於テ $y \rightarrow x'$ + ラシタルコト = ヨリ, 原点 $f(x)$ 1 極
ナルコトヲ知ル。

ユツテ $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ トオケバ $h(x)$ ハ 原点ノ近傍デ
一價正則 = シテ $h(0) = 0$, 且ツ

$$\frac{1}{h(x+y)} + \frac{1}{h(x-y)} = \frac{2h(x)}{h^2(x) - h^2(y)}$$

ヲ満足セシメル。

上式ヲ $y = 0$ 二ツイテ = 回微分シ $y = 0$ トオケバ

$$h''(x)h(x) - 2h'^2(x) + 2\alpha^2 = 0 \quad (\text{但シ } \alpha = h'(0))$$

之ヲ $f(x) = \frac{1}{h(x)}$ 二書き直セバ

$$f''(x) = 2\alpha^2 f^3(x)$$

之ヨリ $f(x)$ ノ 有理型解ヲ求ムルベ

$$f(x) = \frac{c}{x} \quad (\text{但シ } c \neq 0 \text{ + ラサル複素常数 + リトスル})$$

§5. 次ニ, $f(x)$ ノ 原点ノ近傍デ, 原点ヲ除キ一價正
則ナル函数トシ, 次ノ 函数方程式ヲ満足サセルモノヲ求メ
テ見ヨシ。

$$[5] \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + \frac{f''(x)}{f'(x) - f'(y)}$$

[4] ト全ク同様 = シテ

$$f(x) = \zeta(x) + ax + b$$

ヲ得ル。茲ニ a, b ハ 任意ノ 複素常数デアル。 $\zeta(x)$ ハ 楕円
函数論ニ出テ来ル函数デアル。

次に, $f(x)$ が $x > 0$ で定義されたい値可測實函数ナルトキ, 次ノ函数方程式ヲ満足セシタルモノヲ求メテ見ヨウ。

$$\S 6. \quad f(xy) + f\left(\frac{x}{y}\right) = 2f(x)f(y)$$

$g(x) = f(e^x)$ トオケバ, $g(x)$ は $-\infty < x < +\infty$ 上で定義されたい値可測實函数ナリ [6] = ヨリ 次ノ函数方程式ヲ満足セシタルコトが判ル。

$$g(x+y) + g(x-y) = 2g(x)g(y)$$

之レヨリ $g(x) \equiv 0$, $g(x) = \cos \alpha x$, $g(x) = \cosh \alpha x$ ヲ得ル。但シ α ハ任意ノ常数ナリトスル。

之ヨリ $f(x) \equiv 0$, $f(x) = \cos(\alpha \log x)$,

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^\alpha + x^{-\alpha})$$

\S 17. 平面三角法ノ問題 $x + y + z = \pi$ ナラバ

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + 2 \cos x \cos y \cos z = 1$$

デアルト云フノガアル。之ヨリ z ヲ消去シテ $x + y$ ヲ xy ニカヘタ次ノ函数方程式ヲ考ヘテ見ヨウ。但シ $f(x)$ ハ $x=1$ ノ近傍で定義されたい二回微分可能ナル函数トスル。

$$[7] \quad f^2(x) + f^2(y) + f^2(xy) - 2f(x)f(y)f(xy) = 1$$

[7]ニ於テ $f(x) \equiv -\frac{1}{2}$ ヲ除ケバ $f(1) = 1$ ナルコトハ容易ニ判ル。

[7]ヲ $y=1$ ニツイテ微分シテ $y=1$ トオケバ $f(1) = 1$ ヲ

使ッテ

$$f'(1) - f'(1) f^2(x) = 0$$

之ヨリ $f'(1) = 0$ (常數解トキハ、勿論 $f'(1) = 0$)

[7]ヲ二回 $y = \text{ツイテ}$ 微分シテ $y = 1$ トオキ, $f(1) = 1$,
 $f'(1) = 0$ ヲ使ヘバ

$$2x^2 f'^2(x) = f''(0) f^2(x) - f''(0)$$

コノ微分方程式ハ変數分離型トナル故, $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$

ノ下ニトケバ $f(x) = \frac{x^\alpha + x^{-\alpha}}{2}$ 又ハ $f(x) = \cos(\alpha \log x)$

トナル。

茲ニ α ハ任意ノ實常數ナリトスル。

次ニ $f(x)$ ノ原点ノ近傍ニ於テ純單調ナルトキハ, [6]
ト[7]トハ同値ナルコトヲ証明シテ見ヨウ。

[6]ヨリ [7] が出ルコト. [6]ニ於テ, x ノ代リニ xy ,

y ノ代リニ $\frac{x}{y}$ トオケバ

$$f(x^2) + f(y^2) = 2f(xy) f\left(\frac{xy}{y}\right)$$

[6]ニ於テ $y = x$ トオケバ $f(x^2) = 2f^2(x) - 1$ ($f(x) \equiv 0$
ノトキヲ除ケバ $f(1) = 1$. シカモ $f(x) \equiv 0$ ハ條件ニ反
スル)

コノ二ツヨリ $f(xy) f\left(\frac{x}{y}\right) = f^2(x) + f^2(y) - 1$

上式ト[6]トヨリ $f\left(\frac{x}{y}\right)$ ヲ消去スレバ [7]ヲ得ル。

[7]ヨリ [6] が出ルコト. [7]ニ於テ $x = 1$, $y = 1$ トオケ

バ $f(1) = 1$ ナルコトが判ル。 ($f(1) = -\frac{1}{2}$ モ得ルカ、
コノトキハ $f(x) \equiv -\frac{1}{2}$ トナリ、之モ條件ニ反スル)

[7] = 於テ $y = \frac{1}{x}$ トオケバ $f(1) = 1$ ナルコトカラ $f(x)$
 $= f\left(\frac{1}{x}\right)$ 更ニ [7] = 於テ y ノ代リ $= \frac{1}{y}$ トオケバ $f\left(\frac{1}{y}\right) = f(y)$
ナルコトカラ

$$f^2(x) + f^2(y) + f^2\left(\frac{x}{y}\right) - 2f(x)f(y)f\left(\frac{x}{y}\right) = 1$$

上式ト [7] トヨリ原点ノ適當ノ近傍ニ於テ $f(xy) \neq f\left(\frac{x}{y}\right)$
ナルコトカラ (純單調性ニヨル)

$$f(xy) + f\left(\frac{x}{y}\right) = 2f(x)f(y)$$

何者 二次方程式 $t^2 - 2f(x)f(y)t + f^2(x) + f^2(y) - 1 = 0$
ノ二根ハ $f(xy), f\left(\frac{x}{y}\right)$ トナルカラ。

§ 8. 次ニ $f(x), \varphi(x)$ ノトモニ、 $x > 0$ ナ定義サレ
タ一箇可測實函數ナリトスルトキ、次ノ函數方程式ヲ満足
セシナルモノヲ求メテ見ヨウ。

$$[8] \quad f(xy) + f\left(\frac{x}{y}\right) = 2f(x)\varphi(y)$$

$g(x) = f(e^x), \psi(x) = \varphi(e^x)$ トオケバ [8] ヨリ

$$g(x+y) + g(x-y) = 2g(x)\psi(y)$$

$g(x), \psi(x)$ ハトモニ可測ナル故、次ノ解ヲ得ルコトハヨ
ク知ラレテ其ル。

$$\begin{cases} f(x) \equiv 0 \\ \varphi(x) \text{ は任意} \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = a \cos \lambda x + b \sin \lambda x \\ \varphi(x) = \cos \lambda x \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = a \cosh \lambda x + b \sinh \lambda x \\ \varphi(x) = \cosh \lambda x \end{cases}$$

之ヨリ

$$\begin{cases} f(x) \equiv 0 \\ \varphi(x) \text{ は任意} \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = a \cos(\lambda \log x) + b \sin(\lambda \log x) \\ \varphi(x) = \cos(\lambda \log x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = ax^\lambda + bx^{-\lambda} \\ \varphi(x) = \frac{1}{2}(x^\lambda + x^{-\lambda}) \end{cases}$$

茲に a, b, λ は任意、實常數トスル。

$x > 0$ ナ微分方程式 $x^2 y'' + xy' + y = 0$ ノ解ヲ求メルニハ、 $x = e^t$ トル [8] ヲトク、ト同ジ変換ニヨッテ、結局 a, b ナ任意、常數トスルトキ $y = a \cos(\log x) + b \sin(\log x)$ トナルカラ面白い。

§ 9. 次ニ $f(x)$ ナ $-\infty < x < +\infty$ ニテ定義サレター價可測函數トリトシ、次、函數方程式ヲ満足セシメルモノヲ求メヨウ。

$$[9] \quad f(x+y) + f(x-y) = 2\{f(x)f(y) - 2f(x)f(y)\}$$

$f(x) = \frac{1}{2}\{1 - g(x)\}$ トオケバ $g(x)$ ハ一價可測實函數デアリ、且ツ [9] ニヨリ次、函數方程式ヲ満足セシメル。

$$g(x+y) + g(x-y) = 2g(x)g(y)$$

之ヨリ $g(x) \equiv 0$, $g(x) = \cos \lambda x$, $g(x) = \cosh \lambda x$

即ち $f(x) \equiv \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$,

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 - \cosh 2x) = -\sin^2 h \frac{2x}{2}$$

結局, 求ムル解ハ

$$f(x) \equiv \frac{1}{2}, f(x) = \sin \frac{2x}{2} = \cosh 2x, f(x) = -\sin^2 h 2x$$

茲ニハ任意, 實常數ナリトスル。

$\cosh \theta$ ハ $\sin^2 \frac{\theta}{2}$ ヲアラハシ, 航海術ニ用ヒラレル函数デアール。

§ 10. 次ニ, $f(x)$ ヲ $-\infty < x < +\infty$ ニ定義サレタ一慣可測實函数トスルトキ, 次ノ函数方程式ヲ満足サセラルモノヲ求メヨウ。

$$[0] \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) - f(x) - f(y) + 1$$

$f(x) = \frac{1}{2} \{1 + g(x)\}$ トオリコトニヨリ [9] ト全ク同様ニ論ジテ

$$f(x) \equiv \frac{1}{2}, f(x) = \cos^2 2x, f(x) = \cosh^2 2x$$

ヲ得ル。茲ニハ任意ノ實常數ナリトスル。

§ 11. 次ニ, $f(x)$ ヲ $x > 0$ ニ定義サレタ一慣實函

數ナリトシ, 且ツ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\Gamma(x)} = 1$ ナリトスルトキ, 次ノ函数方程式ヲ満足サセラル $f(x)$ ヲ求メテ見ヨウ。茲ニ $\Gamma(x)$ ハ

が、この函数 $\int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ を表す。

$$[11] \quad f(x+1) = x f(x)$$

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{\Gamma(x)} \quad \text{トオケバ [11] ヨリ}$$

$$\varphi(x+1) = \varphi(x)$$

之ヨリ任意ノ自然数 n = 對シ

$$\varphi(x+n) = \varphi(x)$$

又假定 = ヨリ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 1$. $\varphi(x) = \varphi(x+n)$ ノ両辺 = 於
テ $n \rightarrow +\infty$ トスルコトヨリ $\varphi(x) \equiv 1$ 即チ $f(x) = \Gamma(x)$

§12. 以前筆者ハ全國紙上數學談話會ニ於テ、

$\Gamma(x) = e^x$ ヲカケタ函数ノ満足スル函数方程式ヲ論ジタ
ガ、次ニハ $\Gamma'(x) = x$ ヲカケタ函数ノ満足スル函数方程式
ニツイテ論ジヨウ。

$f(x)$ ヲ $x > 0$ デ定義サレタ一價實函数ヲ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x \Gamma'(x)} = 1 \quad \text{トスルトキ、次ノ函数方程式ヲ満足}$$

スル函数ハ $x \Gamma'(x) = \text{限ル}$ 。証明ハ全ク [11] ト同ジデアル。

$$[12] \quad f(x+1) = (x+1) f(x)$$

§13. 次ニハ、二変数ノ函数ニ就イテ論ジヨウ。

$f(x, y)$ ヲ $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$ デ定義サレタ一

價實函數トシ，且ツ x 及ビ y ニツイテ，夫々可測ナルトキ
次ノ函數方程式ヲ満足セシムルモノヲ求メヨウ。

$$[13] \quad f(x+z, y+u) = f(x, y)f(z, u)$$

[13] = 於テ $z=0, u=0$ トオクコトニヨリ $f(x, y) = 0$ ヲ
除ケバ $f(0, 0) = 1$

コノトキ，又 [13] = 於テ $z=x, u=y$ トオクコトニヨ
リ $f(2x, 2y) = f^2(x, y)$

故ニ $f(x, y) \geq 0$ ，又 $f(x, y) = 0$ ナル点 (x, y) ハ
存在シトイコトハ容易ニ証サレル。即チ $f(x, y) > 0$

故ニ $\varphi(x, y) = \log f(x, y)$ トオケバ $\varphi(x, y)$ ハ
 $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$ = 於テ定義サレタ一價實函
數デアリ、シカモ x 及ビ y ニツイテ夫々可測トナル。[13]ヲ
書キカヘルコトニヨリ

$$\varphi(x+z, y+u) = \varphi(x, y) + \varphi(z, u)$$

$\varphi(x, y)$ ハ x 及ビ y ニツイテ夫々可測ナル故，之レヨリ

$\varphi(x, y) = \alpha x + \beta y$ (共立社，南雲道夫先生，或ル種ノ
函數方程式ニツイテ 2 頁参照)

故ニ求ムル解ハ $f(x, y) \equiv 0, f(x, y) = e^{\alpha x + \beta y}$ トナ
ル。茲ニ α, β ハ任意ノ實常數ナリトスル。

§ 14. 次ニ， $f(x, y)$ ヲ $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$
ニテ定義サレタ一價實函數デ， x 及ビ y ニツイテ夫々可測
ナリトスルトキ，次ノ函數方程式ニ適スルモノヲ求メヨウ。

$$[14] \quad f(x+z, y+u) = f(x, y) + f(x, u) + f(z, y) + f(z, u)$$

[14] = 於て $x=0, y=0, z=0, u=0$ トオケバ $f(0,0)=0$

又 $y=0, z=0, u=0$ トオケバ $f(0,0)=0$ + ル故,
 $f(x,0)=0$, 同様ニシテ $f(0,y)=0$

[14] = 於て $u=0$ トオケバ, $f(x,0)=0, f(z,0)=0$
 + ル故,

$$f(x+z, y) = f(x, y) + f(z, y)$$

$f(x, y)$ ハ x ニツイテ可測 + ル故

$$f(x, y) = \alpha(y)x$$

茲ニ $\alpha(y)$ ハ y ニツイテ, 一價可測實函數デアール。

[14] = 於て, $z=0$ トオケバ $f(0,y)=0, f(0,u)=0$
 + ル故

$$f(x, y+u) = f(x, y) + f(x, u)$$

之ニ $f(x, y) = \alpha(y)x$ ヲ代入スルコトニヨリ,

$$\alpha(y) = cy$$

即チ $f(x, y) = cx y$

茲ニ c ハ任意ノ實常數ナリトスル。

§15. 次ニ, $f(x, y)$ ヲ $x > 0, y > 0$ テ定義サレタ一價實函數デ, x 及ビ y ニツイテ大々可測ナリトスルトキ,
 次, 函數方程式ヲ満足サセルモノヲ求メヨウ。

$$[15] \quad f(xz, yu) = f(x, y)f(z, u)$$

$$y=1, z=1 \text{ とおけば } f(xz, 1) = f(x, 1)f(z, 1)$$

$f(x, 1)$ は x について可測ナル故, $f(x, y) \equiv 0$ である。

$$f(x, 1) = x^\alpha \quad \alpha = \alpha \text{ は任意の實常數とリトスル。}$$

同様ニシテ $f(1, y) = y^\beta \quad \beta = \beta \text{ は任意の實常數とリトスル。}$

$$[15] \text{ニ於テ, } y=1, z=1 \text{ とおけば}$$

$$f(x, y) = f(x, 1)f(y, 1)$$

$$\text{之ヨリ } f(x, y) = x^\alpha y^\beta$$

以上ヲ綜合スルニ, 求ムル解ハ $f(x, y) \equiv 0, f(x, y) = x^\alpha y^\beta$ とナル。

§16. 次ニ $f(x, y)$ ヲ $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$ ニテ定義サレター價實函數ヲ

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2} = C \quad (C \text{ハ實常數}) \text{とキ,}$$

次ノ函數方程式ニ適スルモノヲ求メテ見ヨウ。

$$[16] \quad f(x+y, x-y) = 2f(x, y)$$

$$g(0, 0) = C \neq 0, (x, y) \neq (0, 0) \text{ とキ } g(x, y) = \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2} \text{ と}$$

ル函數 $g(x, y)$ ヲ定義スル。

$$[16] \text{ヨリ } 2(x^2 + y^2)g(x+y, x-y) = 2(x^2 + y^2)g(x, y)$$

$$(x, y) \neq (0, 0) \text{ とバ } g(x+y, x-y) = g(x, y) \text{ が}$$

成り立つ。 $(x, y) = (0, 0)$ とするとき、2ノ式が成り立つ
 コトハ明カデアル。コノ式ニ於テ x ノ代リ $= x+y$, y ノ代
 リ $= x-y$ トオケバ

$$g(2x, 2y) = g(x+y, x-y)$$

故ニ $g(2x, 2y) = g(x, y)$

x ノ代リ $= \frac{x}{2}$, y ノ代リ $= \frac{y}{2}$ トオケバ

$$g(x, y) = g\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$$

之ヨリ任意ノ自然数 n ニ對シ

$$g(x, y) = g\left(\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}\right)$$

$n \rightarrow \infty$ ナラシムレバ假定ニヨリ $g\left(\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}\right) \rightarrow C$

故ニ $g(x, y) \equiv C$

即チ $f(x, y) = C(x^2 + y^2)$

§17. 次ニ $f(x, y)$ ノ $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$
 ニテ定義サレタ一價實函數ナリトシ, x 及ビ y ニツイテ,
 夫々可測ナルトキ, 次ノ函數方程式ニ適スルモノヲ求メテ
 見ヨリ。

$$[17] \quad f(x+z, y+u) + f(x-z, y-u) = 2f(x, y)$$

[17]ニ於テ $z=x$, $u=y$ トオケバ

$$f(2x, 2y) = 2f(x, y) - f(0, 0)$$

又, [17]ニ於テ, x ノ代リ $= x+z$, y ノ代リ $= y+u$, z ,

代り $= x - z$, u , 代り $= y - u$ トオケバ

$$f(2x, 2y) + f(2z, 2u) = 2f(x+z, y+u)$$

コノ式ハ $f(2x, 2y) = 2f(x, y) - f(0, 0)$ ヲ代入ス
バ

$$f(x+z, y+u) = f(x, y) + f(z, u) - f(0, 0)$$

$$f^*(x, y) = f(x, y) - f(0, 0) \text{ トオケバ}$$

$$f^*(x+z, y+u) = f^*(x, y) + f^*(z, u)$$

$$\text{之ヨリ} \quad f^*(x, y) = ax + by$$

故ニ $f(x, y) = ax + by + c$ 茲ニ a, b, c ハ任意
ノ實常數。

§18. 次ニ, $f(x, y)$ が $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$
ニ定義サレタ連續函數ナルトキ, 次ノ函數方程式ニ適スル
モノヲ求メテ見ヨウ。

$$[8] \quad f(xz + yu, xu - yz) = f(x, y)f(z, u)$$

[8]ニ於テ $y=0, u=0$ トオケバ

$$f(xz, 0) = f(x, 0)f(z, 0)$$

$f(x, y)$ ハ連續函數ナル故, $f(x, y) \equiv 0$ ヲ除ケバ

$$f(x, 0) = x^\alpha \quad \text{茲ニ } \alpha \text{ ハ } 0 \text{ 又ハ正ノ常數デアル。}$$

[8]ニ於テ $z=x, u=y$ トオケバ

$$f(x^2 + y^2, 0) = f^2(x, y)$$

$$\text{即チ} \quad (x^2 + y^2)^\alpha = f^2(x, y)$$

$f(x, y)$ ハ連續函數ナル故ノヨリ $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}$

$$\text{ナルカ, } f(x, y) = -(x^2 + y^2)^{\frac{\lambda}{2}}$$

[8] = 適スルモ、ノミヲ求ムレバ、結局之ヨリ

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{\lambda}{2}}$$

以上ヲ綜合スレバ $f(x, y) \equiv 0$ 又ハ $f(x, y) = (x^2 + y^2)^\lambda$
但シ $\lambda \geq 0$ ($0^0 = 1$ ナリト規約ス)。

§19. 次ニ、 $f(x, y)$ ヲ $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$
ニテ定義サレター價實函数デ、 x 及ビ y = ツイテ夫々可測
ナリトスルトキ、次ノ函数方程式 = 適スルモ、ヲ求メテ見
ヨウ。

$$[19] \quad f(x+z, y+u) + f(x-z, y-u) = 2f(x, y) + 2f(z, u)$$

[19] = 於テ $y=0, u=0$ トオケバ

$$f(x+z, 0) + f(x-z, 0) = 2f(x, 0) + 2f(z, 0)$$

$f(x, y)$ ハ x = ツイテハ可測ナル故、之ヨリ $f(x, 0) = ax^2$;
同様ニシテ $f(0, y) = cy^2$. 茲ニ a, c ハ任意ノ實常
數デアール。

[19] = 於テ $u=0$ トオケバ $f(z, 0) = az^2$ ナル故

$$f(x+z, y) + f(x-z, y) = 2f(x, y) + 2az^2$$

$$\text{コノデ } P(x, y) = f(x, y) - f(x, 0) = f(x, y) - ax^2$$

トオキ、上式ヲカキトホセバ

$$P(x+z, y) + P(x-z, y) = 2P(x, y)$$

之ヨリ、可測ナルコトカラ

$$P(x, y) = \alpha(y)x + \beta(y)$$

茲 = $\alpha(y)$, $\beta(y)$ は y の可測函数デアル。

コノ式 = 於テ $x=0$ トオケバ $P(0, y) = \beta(y)$

シカモ $P(x, y) = f(x, y) - ax^2 =$ 於テ $x=0$ トオケバ

$$P(0, y) = f(0, y) = cy^2$$

故ニ $\beta(y) = cy^2$

即チ $P(x, y) = \alpha(y)x + cy^2$

オキテモ $f(x, y) = ax^2 + cy^2 + \alpha(y)x$

之ヲ (19) = 代入シテ, $z=0$ トオケバ

$$\alpha(y+u) + \alpha(y-u) = 2\alpha(y) + 2\alpha(0)$$

之ヨリ $\alpha(y)$ が可測ナルコトカラ

$\alpha(y) = by$ 茲 = b は任意ノ實常數デアル。

結局, $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ が求ムル解トナル。茲 = a, b, c は任意ノ實常數デアル。

§20. 次ニ, 之ヲ應用シテ次ノ函数方程式ノ解ヲ求メヨ。

$$(20) \quad f(z_1 + z_2) + f(z_1 - z_2) = 2f(z_1) + 2f(z_2)$$

茲 = , z_1, z_2 は任意ノ複素數デアリ, $f(z)$ は實數部 $p(x, y)$, 虚數部 $q(x, y)$ カトモ x 及ビ y = ツイテ夫々可測ナル一價實函数ナリトスル。 $f(z) = p(x, y) + iq(x, y)$ ヲ (20) へ代入シテ, 實數部虚數部ヲ等シトオケバ (但シ $z_1 = x+iy$, $z_2 = z+iu$)

$$p(x+z, y+u) + p(x-z, y-u) = 2p(x, y) + 2p(z, u)$$

$$g(x+z, y+u) + g(x-z, y-u) = 2g(x, y) + 2g(z, u)$$

ユ、ニツハ丁度 [19] トナル故、之ヨリ

$$p(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2, \quad q(x, y) = lx^2 + mxy + ny^2$$

但シ a, b, c, l, m, n ハ任意ノ實常數ナリトスル。

$$z = x + iy \quad \text{トスルトナ}$$

$$f(z) = ax^2 + bxy + cy^2 + i(lx^2 + mxy + ny^2)$$

之ヲマツテ書ケバ、 α, β, γ ヲ任意ノ複素數トスルトナ

$$f(z) = \alpha z^2 + \beta z\bar{z} + \gamma \bar{z}^2$$

茲ニ $\bar{z}$ ハ z ノ共軛複素數ナリトスル。

§21. 次ニ、 $f(x, y), g(x, y)$ ヲ $-\infty < x < +\infty,$

$-\infty < y < +\infty$ ニテ定義サレタ一價實函數ナリトシ、 x 及

y ニツイテ、夫々可測ナリトスルトナ、次、函數方程式

ヲ満足サセルモノヲ求メテ見ヨウ。

$$[21] \quad f(x+z, y+u) + f(x-z, y-u)$$

$$= 2f(x, y) + 2g(z, u)$$

$$\text{之ヨリ} \quad g(z, u) = \frac{1}{2} \{ f(x+z, y+u) + f(x-z, y-u) - 2f(x, y) \}$$

$$\text{故ニ} \quad g(x'+z', y'+u') + g(x'-z', y'-u')$$

$$= \frac{1}{2} \{ [f(x+x'+z', y+y'+u') + f(x-x'-z', y-y'-u') - 2f(x, y)] \\ + [f(x+x'-z', y+y'-u') + f(x-x'+z', y-y'+u') - 2f(x, y)] \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ [f(x+x'+z', y+y'+u') + f(x+x'-z', y+y'-u')] \\ + [f(x-x'+z', y-y'+u') + f(x-x'-z', y-y'-u')] - 4f(x, y) \}$$

$$[21] = \exists \quad 1)$$

$$\begin{aligned} f(x+x'+z', y+y'+u') + f(x+x'-z', y+y'-u') \\ = 2f(x+x', y+y') + 2\varphi(z', u') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad f(x-x'+z', y-y'+u') + f(x-x'-z', y-y'-u') \\ = 2f(x-x, y-y') + 2\varphi(z', u') \end{aligned}$$

＋ル故

$$\begin{aligned} \varphi(x'+z', y'+u') + \varphi(x'-z', y'-u') \\ = f(x+x', y+y') + f(x-x', y-y') + 2\varphi(z', u') - 2f(x, y) \end{aligned}$$

$$\text{又} [21] = \exists \quad 1)$$

$$\begin{aligned} f(x+x', y+y') + f(x-x', y-y') \\ = 2f(x, y) + 2\varphi(x', y') \end{aligned}$$

＋ル故

$$\varphi(x'+z', y'+u') + \varphi(x'-z', y'-u') = 2\varphi(x', y') + 2\varphi(z', u')$$

之ハ [19] ト＋ルカラ 之ヨリ a, b, c 任意, 實常数トスルト

$$\neq \quad \varphi(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

之ヲ [21] へ代入スルバ

$$\begin{aligned} f(x+z, y+u) + f(x-z, y-u) \\ = 2f(x, y) + 2(ax^2 + bzu + cu^2) \end{aligned}$$

$$\text{よテ} \quad p(x, y) = f(x, y) - (ax^2 + bxy + cy^2) \text{トオキ}$$

上式ヲ $p(x, y) = \text{カキ} + \text{ホセ}$ バ

$$p(x+z, y+u) + p(x-z, y-u) = 2p(x, y)$$

之ハ [17] ト＋ルカラ, 之ヨリ

$$p(x, y) = lx + my + n$$

即ち $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + my + n$

茲に a, b, c, d, m, n は任意の實數デアル。

§22. 次ニ、 $f(x, y)$ が $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$ ニテ定義サレタ一價實函数ニシテ、且ツ x 及ビ y ニツイテ夫々可測ナルトキ、次ノ函数方程式ニ適ナルモノヲ求メテ見ヨウ。

$$\begin{aligned} [22] \quad f(x+z, y+u) + f(x+z, y-u) \\ = 2f(x, y)f(z, u) \end{aligned}$$

上式ニ於テ x ト z , y ト u トヲ入レカヘルコトニヨリ

$$f(x, y) = f(x, -y)$$

又 [22] = 於テ $x=0, y=0, z=0, u=0$ トオケバ

$f(x, y) \equiv 0$ ヲ除キ $f(0, 0) = 1$ トナル。

[22] = 於テ $y=0, u=0$ トオケバ

$$f(x+z, 0) = f(x, 0)f(z, 0)$$

$f(x, y)$ ハ x ニツイテ可測ナル故 $f(x, 0) \equiv 0$ (コノトキハ

$f(x, y) \equiv 0$ トナルコトハ容易ニ判ル) ヲ除キ、 $f(x, 0) = e^{ax}$

茲ニ a ハ任意ノ實常數ナリトスル。

又 [22] = 於テ $x=0, z=0$ トオケバ

$$f(0, y+u) + f(0, y-u) = 2f(0, y)f(0, u)$$

$f(x, y)$ ハ y ニツイテモ可測ナル故、又ヨリ $f(0, y) \equiv 0$

(コノトキハ $f(x, y) \equiv 0$) ヲ除キ、 $f(0, y) = \cos \beta y$,

$f(0, y) = \cosh \beta y$ ヲ得ル。茲ニ β ハ任意ノ實常數デア

14.

[22] = 於て $y=0, z=0$ トオケバ $f(x, y) \equiv 0$ ナ除キ

$$f(x, u) + f(x, -u) = 2e^{\alpha x} \cos \beta y$$

又ハ $f(x, u) + f(x, -u) = 2e^{\alpha x} \cosh \beta y$

トエロカ $f(x, u) = f(x, -u) + u$ 故 $f(x, y) = e^{\alpha x} \cos \beta y,$

$$f(x, y) = e^{\alpha x} \cosh \beta y$$

以上ヲ綜合スルバ 求ムル解ハ $f(x, y) \equiv 0, f(x, y) = e^{\alpha x} \cos \beta y, f(x, y) = e^{\alpha x} \cosh \beta y$ トナル。茲ニ α, β ハ任意ノ實常數ナリトスル。

323. 次ニ、 u ノ函数不等式ニツイテ論シヨウ。

$f(x)$ ナ $-\infty < x < +\infty$ ニテ定義サレタ一價連續函数デ、 $f(0) = 0$ トシ、且ツ次ノ函数不等式ヲ満足セシメルモノトスル。

$$[23] \quad f(x+y) + f(x-y) \leq 2f(x) + 2f(y)$$

(コノデ $f(x+y) + f(x-y) \leq 2f(x)$ ナラバ凸函数トナル)

サテ、 $-\infty < x < +\infty$ ニ於テ $f(x) \geq f(1)x^2$ ナルヲ必要且ツ充分條件ハ任意ノ自然數 n ニ對シ、 $f(n) \geq f(1)n^2$ ナルコトヲアリ、且ツコノトキ $f(x) = f(1)x^2 + g(x)$ トスルナラバ、 $g(x)$ ハ次ノ如キ性質ヲモツ。 $g(x) \geq 0$ デ、 $g(x)$ ハ偶函数デアリ、任意ノ整數 m ニ對シ $g(m) = 0$ トナル。以下之ヲ証明シヨウ。

先づ必要條件ノ方ハ明カデア。次ニ充分條件トナル
コトヲ証明シヨウ。

[23]ニ於テ $x=0$ トオケバ $f(0)=0$ ナル故

$$f(-y) \leq f(y)$$

コノ式デ y ノ代リ $-y$ トオケバ

$$f(-y) \geq f(y)$$

故ニ $f(x)$ ハ偶函數ナルコトカ判ル。

次ニ [23] ヨリ數學的歸納法ニヨリ、任意ノ自然數 n ニ
對シ

$$f(n) \leq f(1)n^2$$

トナルコトヲ証シ得ル。之レト假定 $f(n) \geq f(1)n^2$ 及ビ偶
函數ナルコトカラ、結局任意ノ整數 m ニ對シ

$$f(m) = f(1)m^2$$

トナル。

又 [23] ヨリ任意ノ整數 m ニ對シ

$$f(mx) \leq m^2 f(x)$$

n ノ整數トスルトキ上式ニ於テ $x = \frac{n}{m}$ トオケバ

$$f(n) \leq m^2 f\left(\frac{n}{m}\right)$$

$f(n) = f(1)n^2$ ナル故

$$f\left(\frac{n}{m}\right) \geq f(1) \frac{n^2}{m^2}$$

即チ任意ノ有理數 x ニ對シ

$$f(x) \geq f(1)x^2$$

カ云ヘタ。之ヨリ連續性カラ任意ノ實數 x ニ對シ

$$f(x) \geq f(1)x^2$$

定理，後半ハ，上述ノ証明ノ中カラ明カデアアル。

次ニ實際 $g(x)$ ノヤウナ函数ガアルコトハ $\alpha \geq 0$ トスル
トキ $f(x) = f(1)x^2 + \alpha(1 - \cos 2\pi x)$ が [23] ヲ満足
スルコトカラ明カデアラウ。

[追記] [18] カラ次ノヤウナコトガ云ヘル。複素數
 $x + iy$ ヲ定義スルトキ，實數ノ組合セ $\{x, y\}$ が四則ノ
公理ヲ満足サセタモノトスルトキ，絶對値 $|\{x, y\}|$ ノ定
義トシテ [18] ヨリ

$$|\{x, y\}\{z, u\}| = |\{x, y\}| |\{z, u\}|$$

$$\text{及ビ} \quad |\{1, 1\}| = \sqrt{2}$$

ヲトレバヨイコトガ判ル。但シ $|\{x, y\}| = \varphi(x, y)$ ハ連
續ナリトスル。