



Title	河川空間ノ共形幾何學Ⅳ
Author(s)	岩本, 秀行
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 258, p. 522-528
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75079
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1146 河口空間ノ共形幾何學 IV

岩本 秀行 (東大)

III / 訂正

(i) 相對スカラー F , ハ $\frac{-1}{F^2} \left| \begin{array}{c} F_{(M)i(M)j} \quad \dot{E}_{i1} \\ \dot{E}_{j1} \end{array} \right|$ トシテ

ケレバナラナイ。

(ii) III, 定理 2 デ $\text{rank}(f_{ij}) = n-1$ ノトキ $\text{rank}((E_M, E_M) f_{ij} - \dot{E}_{iM} \dot{E}_{jM}) = n-1$ トナルコトハアリ得
ナイ。定理 4 = ツイテニ殆ンド同様デアル。

補題 I. $\text{rank}(f_{ij}) = n-1$ ナルトキ $\text{rank}(f_{ij} + \alpha \dot{E}_{iM} \dot{E}_{jM}) = n-1$ ナルタメノ必要且充分條件ハ
 $1 + \alpha e \neq 0 \quad e = (E_M, E_M)$

デアル。

$$\text{証明. } -F'_1 = \left| \begin{array}{c} f_{ij} + \alpha \dot{E}_{iM} \dot{E}_{jM} \\ \dot{E}_{j1} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \dot{E}_{i1} \\ 0 \end{array} \right| \neq 0$$

ガ $\text{rank}(f_{ij} + \alpha \dot{E}_{iM} \dot{E}_{jM}) = n-1$ ノ必要且充分條件
デアル。

$$F'_1 = - \left| \begin{array}{c|cc} f_{ij} & \dot{E}_{i1} & \dot{E}_{iM} \\ \hline \dot{E}_{j1} & 0 & 0 \\ \hline -\alpha \dot{E}_{jM} & 0 & 1 \end{array} \right| = \gamma + \alpha e \gamma - \gamma(1 + \alpha e) \neq 0$$

$$1 + \alpha e \neq 0$$

從ツテ $\text{rank}(\alpha f_{ij} - \dot{E}_{iM} \dot{E}_{jM})$ 或ハ

$\text{rank}(f_{ij} - \frac{1}{\alpha} \dot{E}_{iM} \dot{E}_{jM})$ ガ $n-2$ ヲ下トナル

$\alpha = (E_M, E_M)$ の場合 = 限ルコトが分ル。

以下デハスベテ $e \neq \text{const}$ トスル。

定理1. $\lambda(x, x^{(1)}, \dots, x^{(M)})$ ヲ任意ノ重サノ
intrinsic + scalar トスルトキ $M+1$ 次ノ微分
方程式

$$T_i(\lambda) \equiv \dot{E}_{iM-1} + \lambda F^{-1} \dot{E}_{iM} = 0$$

ノ解ハ全体トシテ conformal invariant ナ

$$a_{ij} x^{(M+1)j} + a_i = 0$$

ヲ満足スル。

$$\text{証明. } \dot{E}_{iM-1} = F^{-(M+1)} \left[\left(f_{ij} + \frac{M-1}{2} \dot{E}_{iM} \dot{E}_{jM} \right) x^{(M+1)j} + H_i \right]$$

且ツ $e \neq \text{const}$ ナカニ $\frac{M-1}{2} e + 1 \neq 0$ 。

$$\text{従ツテ } \text{rank} \left(f_{ij} + \frac{M-1}{2} \dot{E}_{iM} \dot{E}_{jM} \right) = n-1$$

$$\text{故ニ } \dot{E}_{iM-1} = -F^{-(M+1)} \left(f_{ij} + \frac{M-1}{2} \dot{E}_{iM} \dot{E}_{jM} \right) (x^{(M+1)j} + H^j)$$

トカクコトが出来ル。

$$\text{rank}(f_{ij}) = n-1, \quad \dot{E}_{iM} x^{(1)i} = 0, \quad f_{ij} x^{(1)j} = 0$$

カラ $f_{ij} \Lambda^j = \dot{E}_{iM}$ ナル Λ^j ヲ求メルコトが出来ル。

$$\text{且ツ } \Lambda^i \equiv g^{ij} \dot{E}_{jM} \pmod{x^{(1)i}}$$

トナル。

$$\text{従ツテ } \Lambda^i \dot{E}_{iM} = e$$

$$\left(f_{ij} + \frac{M-1}{2} \dot{E}_{iM} \dot{E}_{jM}\right) \Lambda^j = \dot{E}_{iM} + \frac{M-1}{2} e$$

$$\dot{E}_{iM} = \left(1 + \frac{M-1}{2} e\right) \dot{E}_{iM}$$

$$1 + \frac{M-1}{2} e \neq 0 \Rightarrow$$

$$\dot{E}_{iM} = \left(1 + \frac{M-1}{2} e\right)^{-1} \left[f_{ij} + \frac{M-1}{2} \dot{E}_{iM} \dot{E}_{jM}\right] \Lambda^j$$

従って

$$T_i(\lambda) \equiv \dot{E}_{iM-1} + \lambda F^{-1} \dot{E}_{iM}$$

$$= \left(f_{ij} + \frac{M-1}{2} \dot{E}_{iM} \dot{E}_{jM}\right) \left[x^{(M+1)j} + H^j + \frac{\lambda}{F} \left(1 + \frac{M-1}{2} e\right)^{-1} \Lambda^j\right]$$

従って $M+1$ 次微分方程式

$$T_i(\lambda) = 0$$

$$\therefore x^{(M+1)i} + H^i + \frac{\lambda}{F} \left(1 + \frac{M-1}{2} e\right)^{-1} \Lambda^i + \rho x^{(1)i} = 0$$

1 形 = カケル。

$$a_{ij} \Lambda^j = (e f_{ij} - \dot{E}_{iM} \dot{E}_{jM}) \Lambda^j = e \dot{E}_{iM} - e \dot{E}_{iM} = 0$$

$$\begin{aligned} \exists \text{ 1) } a_{ij} \left[-H^j + \frac{\lambda}{F} \left(1 + \frac{M-1}{2} e\right)^{-1} \Lambda^j + \rho x^{(1)i} \right] + a_i \\ = -a_{ij} H^j + a_i \end{aligned}$$

又, $\dot{E}_{iM-1} = 0 \wedge a_{ij} x^{(M+1)j} + a_i = 0$ を満足スル。即ち

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^{(M+1)k}} \left| \begin{pmatrix} \dot{E}_M, \dot{E}_M \\ \dot{E}_M, \dot{E}_{M-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{E}_M, \dot{E}_{M-1} \end{pmatrix} \right| \\ = 2(\dot{E}_M, \dot{E}_M) g^{ij} \dot{E}_{iM-1} \dot{E}_{jM-1, (M+1)k} - 2(\dot{E}_M, \dot{E}_{M-1})(\dot{E}_M, \dot{E}_{M-1})_{, (M+1)k} \end{aligned}$$

トナルカラデアイル。従ッテ

$$-a_{ij} H^j + a_i = 0$$

故ニ $T_i(\lambda) = 0$ ノ解ハスベテ $a_{ij} x^{(M+1)j} + a_i = 0$ ノ解デアイル。

$$a_{ij} \wedge x^{(1)j} = 0$$

$$a_{ij} \wedge^j = 0$$

ヲ満足シ、 $x^{(1)j}$, $\wedge^j$ ハ一般ニ一次独立デカラ^{*} $\text{rank}(a_{ij})$

$= n-2$ ナラバ^{**} $a_{ij} x^{(M+1)j} + a_i = 0$ ノ解デ

Eigenschaft Γ $\forall \gamma \in \Gamma$ ノ全部 $T_i(\lambda) = 0$ ノ解ナルコトガワカイル。

$$F^{M+1} \cdot T(\lambda) = \left(f_{ij} + \frac{M-1}{2} E_{iM} E_{jM} \right) \left(x^{(M+1)j} + H_{M-1}^j(\lambda) \right)$$

トスイル。

$$\frac{d}{dt} \text{ヲ曲線 } x^{(M+1)j} + H_{M-1}^j(\lambda) + \rho x^{(1)j} = 0$$

ニ沿フ微分トスイル。

$$\frac{d}{dt} \Phi = \sum_{\lambda=0}^{M-1} \Phi_{(\lambda)i} x^{(\lambda+1)i} - \Phi_{(M)i} H_{M-1}^i(\lambda)$$

$\frac{d}{dt} \Phi$ ハ conformal invariant $\tau + \mu$ 適當ナ

$$* \quad x^{(1)j} = \sigma \wedge^j, \text{ ナラバ } 0 = f_{ij} x^{(1)j} = \sigma f_{ij} \wedge^j = \sigma E_{iM}$$

$$E_{iM} \neq 0 \exists \quad \sigma = 0 \text{ 得イル。}$$

一般ニ (a_{ij}) ノ rank ハ $n-2$ ナルヲ得イル。

函数トスレバ

$$\overline{\frac{d}{dt} \Phi} = \frac{d}{dt} \Phi - \mu \Phi_{(M)i} \Lambda^i$$

ノ如ク変換スル。重トシテ $e \neq \text{const}$ ヲトレバ

$$\overline{\frac{d}{dt} e} = \frac{d}{dt} e - \mu e_{(M)i} \Lambda^i$$

$$\Lambda' = e_{(M)i} \Lambda^i = F^{-M} [(2-e) e^{-g^{ia} g^{jb} g^{kc} f_{ijk} \overset{\circ}{E}_{aM} \overset{\circ}{E}_{bM} \overset{\circ}{E}_{cM}}]$$

$$f_{abc} = F^{3M-1} F_{(M)} a_{(M)} b_{(M)} c$$

(1) $\Lambda' \neq 0$ ノ場合

$$\begin{aligned} \overline{\frac{d}{dt} \Phi} &= \frac{d}{dt} \Phi - \frac{1}{\Lambda'} \left(\frac{d}{dt} e \right) \Phi_{(M)i} \Lambda^i \\ &= \frac{d}{dt} \Phi - \Lambda g^{ij} \Phi_{(M)i} \overset{\circ}{E}_{jM} \end{aligned}$$

トスレバ

$$\overline{\frac{\tilde{d}}{dt} \Phi} = \frac{\tilde{d}}{dt} \Phi$$

デ且ツ $\frac{\tilde{d}}{dt}$ ハ普通ノ微分ノ法則ヲ全部満足スル:

$$\frac{\tilde{d}}{dt} (\Phi + \Psi) = \frac{\tilde{d}}{dt} \Phi + \frac{\tilde{d}}{dt} \Psi, \quad \frac{\tilde{d}}{dt} a \Phi = a \frac{\tilde{d}}{dt} \Phi$$

$$\frac{\tilde{d}}{dt} (\Phi \Psi) = \left(\frac{\tilde{d}}{dt} \Phi \right) \Psi + \Phi \left(\frac{\tilde{d}}{dt} \Psi \right), \quad \frac{\tilde{d}}{dt} \Phi^{-1} = -\Phi^{-2} \frac{\tilde{d}}{dt} \Phi$$

之ヲ用ヒテ第二種, Syngge, Vektor

$$\tilde{E}_{i\mu} = \sum_{\lambda=\mu}^M (-1)^\lambda \binom{\lambda}{\mu} \frac{\tilde{d}^{\lambda-\mu}}{dt^{\lambda-\mu}} F_{(\lambda)i}$$

ヲツクルコトが出来ル。之等ハスベテ次数 M ノ共変ベクト

ルデ

$$E_{i\mu} x^{(1)i} = -\delta'_{\mu} F$$

ヲ満足スル。但シ $E_{iM-1} \wedge E_{iM} = \text{比例スル}$ 。

之ヲ用フレバ $n \geq 3, M \geq 4 = \text{對シ}$

$$\begin{vmatrix} (\widetilde{E}_M, \widetilde{E}_M) & (\widetilde{E}_{M-2}, \widetilde{E}_M) & \cdots & (\widetilde{E}_\mu, \widetilde{E}_M) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\widetilde{E}_\mu, \widetilde{E}_M) & \cdots & \cdots & (\widetilde{E}_\mu, \widetilde{E}_\mu) \end{vmatrix}$$

ヲ用ヒテ conformal metric $\mathcal{F}$ ヲ導クコトが出来ル。

之ト微分 $\frac{d}{dt}$ トカラ次数 M ノ範圍デ持續ヲ決定スルコ

トが出来ル。

(2) $\Lambda' = 0$ ノ場合

$$\overline{\frac{d}{dt} e} = \frac{d}{dt} e \quad \text{カラ} \quad \mathcal{F} = \frac{d}{dt} e$$

トオケバ $\mathcal{F}$ ハ conformal metric ヲ與ヘル。

ノコト

$$E_{i\mu} = \sum_{\nu \geq \mu} K_{\mu}^{\nu} (\mathcal{F}, \mathcal{F}', \dots) b_{i\nu}$$

トオケバ

$$\Phi E_{iM-\mu} = \binom{M}{\mu} \left[f_{ij} - \left(\overset{\circ}{E}_{iM} - \frac{M+1}{\mu+1} E'_{iM} \right) \overset{\circ}{E}_{jM} \right] x^{(M+1)j} + H_i,$$

$\Phi \neq 0$

$$E'_{iM} = F^M \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}_{(M)\lambda}$$

補題2. $\text{rank}(f_{ij}) = n-1$, ト $\neq$

$\text{rank}(f_{ij} + \nabla_i U_j) = n-1$. ($\nabla_i x^{(1)i} = U_j x^{(1)j} = 0$)

ナルタメノ必要且充分ノ條件ハ

$$1 + g^{ij} V_i U_j \neq 0$$

デアル。

証明ハ補題1ト同様デアル。

定理2. $\varepsilon_{iM-1} = 0$

或ハ $\varepsilon_{iM-2} = 0$

ハ Conformal invariant + path, projective class ヲ與ヘル。

$$g^{ij} \overset{\circ}{E}_{iM} \overset{\circ}{E}_{jM} - \frac{M+1}{n+1} g^{ij} E'_{iM} \overset{\circ}{E}_{jM} = 1$$

同時ニ

$$g^{ij} \overset{\circ}{E}_{iM} \overset{\circ}{E}_{jM} - \frac{M+1}{2+1} g^{ij} E'_{iM} \overset{\circ}{E}_{jM} = 1$$

ナラバ

$$g^{ij} E'_{iM} \overset{\circ}{E}_{jM} = 0$$

即チ $g^{ij} \overset{\circ}{E}_{iM} \overset{\circ}{E}_{jM} = 1 = \text{const.}$ デ始メノ假定ト矛盾スル。

之ヲ用ヒテ高々 $M+2$ 次ノ線素ノ範囲ヲ持續ヲ決定スルコトが出来ル。

次數メノ共形変換ニ對シテモ殆ンド同様デアル。