



Title	河川空間ノ共形幾何學Ⅴ
Author(s)	岩本, 秀行
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 258, p. 529-535
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75080
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1147. 河口空間ノ共形幾何學 V

岩本 秀行 (東京)

$$\omega = \frac{1}{\mathcal{F}} \Gamma_{i1} (dx^{(1)i} + \Gamma_j^i dx^j)$$

トオケバ ω ハ座標変換デ scalar デ共形変換デ不変,
parameter, 変換デ

$$\bar{\omega} = d\left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right) / \frac{dt}{d\bar{t}} + \omega$$

ノ如ク変換スル。従ッテ v^i ハ parameter, 変換デ重
サ p ノ intrinsic + vector + ラバ

$$\bar{\delta} v^i = dv^i + \delta \Gamma_j^i v^j - p v^i \omega$$

ハ又ハリ重サ p ノ intrinsic + vector デアル。

$$' \delta x^{(M)\lambda} = g^{ia} \mathcal{F}^{2(M-1)} F (\delta F_{(M)a} + (M-1) F_{(M)a} \omega)$$

ハ intrinsic + base connection テ與ヘル。併
シ conformal invariant デナク

$$' \delta x^{(M)i} = ' \delta x^{(M)i} + \frac{d p}{p} \mathcal{F}^{2(M-1)} F g^{ia} F_{(M)a}$$

$$' \delta x^{(M)i} = \left(\delta_j^i + \frac{x^{(1)i}}{\mathcal{F}} \Gamma_j^i \right) dx^{(M)j} + \sum_j \bigwedge_M^p \delta_j^i dx^{(p)j}$$

トオケバ

$$\bigwedge_M^p \delta_j^i = \bigwedge_M^p \delta_j^i + \frac{\delta^{(p)i}}{p} \omega^j,$$

$$\omega^j = \mathcal{F}^{2(M-1)} F g^{ja} F_{(M)a}$$

之ヲ用ヒテ scalar $d\Phi$ ($\overline{\Phi} = \Phi$)

$$d\Phi = \sum_{r=0}^{M-1} {}^r \nabla_i \Phi \cdot \delta x^{(r)i} + {}^M \nabla_i \Phi \cdot \delta x^{(M)i}$$

ト分解スルニ

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{{}^M \nabla_i \Phi} = {}^M \nabla_i \Phi \\ \overline{{}^{M-1} \nabla_i \Phi} = {}^{M-1} \nabla_i \Phi - \frac{\rho_{(M-1)i}}{\rho} \sigma \\ \overline{{}^{M-2} \nabla_i \Phi} = {}^{M-2} \nabla_i \Phi - \frac{1}{\rho} \nabla_i \rho \cdot \sigma \\ \vdots \\ \overline{{}^r \nabla_i \Phi} = {}^r \nabla_i \Phi - \frac{1}{\rho} \nabla_i \rho \cdot \sigma \\ \vdots \end{array} \right.$$

$$\sigma = \mathcal{F}^{2(M-1)} F g^{ij} F_{(M)j} \Phi_{(M)i}$$

$$\overline{\sigma}^i = \sigma^i, \quad \overline{\sigma} = \sigma$$

即チ $-\frac{1}{\rho} \nabla_i \rho = \frac{1}{\sigma} \left[\overline{{}^r \nabla_i \Phi} - {}^r \nabla_i \Phi \right]$

$$-\frac{1}{\rho} d\rho = -\frac{1}{\rho} \sum_{r=0}^{M-1} \nabla_i \rho \delta x^{(r)i}$$

$$= \text{即チ} \quad -\frac{1}{\rho} d\rho = \sum_{r=0}^{M-1} \overline{{}^r \nabla_i \Phi} \delta x^{(r)i} - \sum_{r=0}^{M-1} {}^r \nabla_i \Phi \delta x^{(r)i}$$

(ρ が次数 $M+1$ なる r , $0 \leq r \leq M$)

従ツテ

$$\delta x^{(M)i} = \delta x^{(M)i} + \frac{\sigma_i}{\sigma} \sum_{r=0}^M {}^r \nabla_i \Phi \delta x^{(r)i} = \left(\delta_j^i + \frac{x^{(1)i}}{\mathcal{F}} \Gamma_{ji} \right) dx^{(1)i}$$

∴ conformal invariant, intrinsic デアル。

$\Phi = e$ トオケバ

$$\frac{\sigma^i}{\sigma} = \frac{1}{\Lambda'} F^M g^{ja} \dot{E}_{aM}$$

コノ方法デハ $\Lambda' \neq 0$ ヲ假定シナケレバナラナイ。併シ次ノ様ニスレバコノ假定ナシニ出来ル。

$$\text{Pfaffian } \Omega = \sum_{r=0}^M P_{rj} dx^{(r)j} = \text{對シ}$$

$$\frac{d}{dt} \Omega = \sum_{r=0}^{M+1} (P_{(r)j}^{(1)} + P_{(r-1)j}) dx^{(r)j}, \quad (P_{-1j} = P_{M+1,j} = 0)$$

ト定義スル。

定理. Ω が変換 $x^{(\bar{\mu})i} = a_{\nu}^{\mu} x^{(\nu)i}$,

$$dx^{(\bar{\mu})i} = a_{\nu}^{\mu} dx^{(\nu)i} + \sum_{\omega} a_{\nu\omega}^{\mu} da^{\omega} \cdot x^{(\nu)i}$$

ニ對シテ invariant ナラ

$$\frac{d}{dt} \left[\Omega + \frac{1}{F} \frac{\partial \Omega}{\partial t} \Gamma_i^i dx^i \right]$$

ニ同ジ変換ニ對シ invariant デアル。

定理. Ω^i が $i = \nu \neq$ Vector 性ヲモツ Pfaffian ナラバ

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}^i}{\partial t} = \frac{d \tilde{\Omega}^i}{dt} + \Gamma_j^i \tilde{\Omega}^j$$

モ $i = \nu \neq$ Vector 性ヲモツ, Ω^i が intrinsic ナラ
 $\frac{\partial \tilde{\Omega}^i}{\partial t} \in \text{intrinsic}$ デアル。コノニ

$$\tilde{\Omega}^i = \Omega^i + \mathcal{F}^{-1} \frac{\partial \Omega^i}{\partial t} \Gamma_{ji}^i dx^j$$

≥ v 4 7

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \delta x^{(M+1)i} &= \frac{d}{dt} \left(\delta x^{(M-1)i} + \frac{1}{\mathcal{F}} \frac{\partial x^{(M-1)i}}{\partial t} \Gamma_{ki}^i dx^k \right) \\ &+ \Gamma_{ji}^i \left(\delta x^{(M-1)i} + \frac{1}{\mathcal{F}} \frac{\partial x^{(M-1)i}}{\partial t} \Gamma_{ki}^i dx^k \right) \\ &- (M-1) \frac{\mathcal{F}^{(1)}}{\mathcal{F}} \left(\delta x^{(M-1)i} + \frac{1}{\mathcal{F}} \frac{\partial x^{(M-1)i}}{\partial t} \Gamma_{ki}^i dx^k \right) \end{aligned}$$

= 3 1)

$$\delta x^{(M)i} = \left(\delta x_j^i + \frac{x^{(1)i}}{\mathcal{F}} \Gamma_{ji}^i \right) dx^{(M)j} + \sum_{p=0}^{M-1} \bigwedge_{Mj}^i dx^{(p)j}$$

+ w base connection 7 得 11.

v^i 7 重 + 0, intrinsic + vector 1 2 v
in δv^i ,

$$\delta v^i = \sum_{p=0}^M \bigwedge_j^p v^i \delta x^{(p)j}$$

1 分解 + 11. 22 =

$$\begin{cases} \bigwedge_j^M v^i = v^i, (M)j \\ \bigwedge_j^p v^i = v^i, (p)j + \Gamma_{k(p)j}^i v^k - \sum_{\lambda=p+1}^M \bigwedge_k^\lambda v^i \bigwedge_{rj}^p k \end{cases}$$

v^i parameter, 变换 7 重 + p, 共形变换 7 重
+ q, intrinsic + vector + 9 11

$$\delta v^i = \delta v^i - p v^i \omega - q v^i \sum_{r=0}^d K^{-1} \bigwedge_j^r \kappa \delta x^{(r)j}$$

ハ v^i , invariant + 共変微分ヲ定義シ, 共変微係数ハ

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{\nabla}_j^r v^i = \nabla_j^r v^i, \quad (\alpha+1 \leq r \leq M) \\ \widetilde{\nabla}_j^r v^i = \nabla_j^r v^i - \frac{q}{\kappa} v^i \nabla_j^r \kappa, \quad (2 \leq r \leq \alpha) \\ \widetilde{\nabla}_j^1 v^i = \nabla_j^1 v^i - \frac{q}{\kappa} v^i \nabla_j^1 \kappa - \frac{p}{\mathcal{H}} v^i \Gamma_{j1}^1 \\ \widetilde{\nabla}_j^0 v^i = \nabla_j^0 v^i - \frac{q}{\kappa} v^i \nabla_j^0 \kappa + \frac{p}{\mathcal{H}} v^i \Gamma_{j1}^{(1)} \end{array} \right.$$

ヲ定義サレル。此等ハスベテ次数 α 以下ノ共形変換=對シ不変デアアルガ, 次数 $\alpha+1$ 以上ノ変換=對シ不変デハナイ。

我々ハコゝデ $M \geq 4, n \geq 3$ = 對シ次数 α 以下ノ共形変換デ不変ナル擬似接続

$$\delta v^i = \alpha v^i + \alpha \Theta \Gamma_{j1}^i v^j$$

$$\delta x^{(r)i} = \left(\delta_j^i - \frac{x^{(1)i}}{\mathcal{H}} \Gamma_{j1}^i \right) dx^{(r)j} + \sum_{p=r+1}^M \Lambda_{rj}^p dx^{(p)j}$$

ガ與ヘラレ conformal invariant + 基本テンソル

$$g_{ij} = \kappa^{-2} g_{ij}$$

デ metric. σ ノ與ヘラレル河口空間ヲ組立テタワケデアアル。ユノ空間ヲ $\mathcal{C}_\alpha$ トカクコト=スル。

定理. ニツノ河口空間 $\mathcal{F}, \overline{\mathcal{F}}$ ガ次数 α ノ共形変換デ共形的トナルタメ=必要且ツ充分ナル條件ハ $\mathcal{C}_\alpha, \overline{\mathcal{C}}_\alpha$ ガ幾何的ニ同じ空間トナルコトデアアル。

証明. 充分ナルコトヲ云ハセヨイ. $C_\alpha, \bar{C}_\alpha$ 對應スル点ヲ同ジ座標ヲ表ハセバ (對應スル曲線上ノ点, parameterモ同ジニトル)

$$\overline{e f_{ij}} = e f_{ij}, \quad \text{従テ} \quad \overline{f^2} = f^2$$

$$\overline{\delta x^{(M-1)i}} = \delta x^{(M-1)i}, \quad \frac{\delta x^{(M-1)i}}{dt} = -f^{2M} e f^{ij} \frac{F^{(M)i}}{F}$$

ニヨリ

$$\left(\frac{\overline{F^{(M)i}}}{F} \right) = \frac{F^{(M)i}}{F}$$

故ニ $\overline{F} = F$ トオケル $F^{(M)i} = 0$.

$$\text{又} \quad \overline{\delta x^{(1)i}} = \delta x^{(1)i}, \dots, \overline{\delta x^{(M-\alpha-1)i}} = \delta x^{(M-\alpha-1)i}$$

ヨリ $F_{(M-1)i} = 0, \dots, F_{(\alpha+1)i} = 0$ ヲ得ル.

$$\text{即チ} \quad \overline{F} = F(x, x^{(1)}, \dots, x^{(\alpha)}) F$$

以上ハ $M \geq 4, n \geq 3$ ナル場合, 議論デアアル. シカシ intrinsic + ベクトル e カラツクラレル Syngge, ベクトル $e_{i\mu}$ ハスベテ $e_{i\mu} x^{(1)i} = 0$ ヲ満足スルカラ $\widetilde{E}_{i\mu}$ ノ代リニ之ヲ用フレバ

$$\begin{vmatrix} (e_M, e_M) & (e_M, e_{M-1}) \\ (e_{M-1}, e_M) & (e_{M-1}, e_{M-1}) \end{vmatrix}$$

カラチガ導カレ, 之ハ $M \geq 2, n \geq 3$ ノ場合ニ適用サレル.

又 $n=2$ ノ場合ニハ

$$E_{i, M-1} = \kappa_{M-1}^{M-1}(e) \phi_{i, M-1} + \kappa_{M-1}^M(e) \phi_{i, M}$$

$$E_{i, M} = \kappa_{M-1}^{M-1}(e) E_{i, M-1}(e) + \kappa_{M-1}^M(e) E_{i, M}(e)$$

ハ夫々 $M \geq 3$, $M \geq 2$ 一對シ次数 $M+2$, *conformal invariant* + *path* を表ハス。($n \geq 3$ + *path* / *projective class* を表ハサ + 1). 之ヲ用ヒテ前ト同様 + 議論ヲ接続ヲ決定スルコトが出来ル。