



Title	ニツノ定理ニ就イテ
Author(s)	春木, 博
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 258, p. 535-538
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75081
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1148. ニツノ定理ニ就イテ

春 木 博 (神戸高商船)

§1. (定理1) 複素数平面上ニ於テ、任意ノ多項式
 $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$ 、凡ベテノ零點
 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ヲ内部ニ含ム任意ノ円 $|z| = r \left(> \max_{1 \leq k \leq n} |\alpha_k| \right)$
 ノ $f(z) = 0$ ノ平面ニ、寫像曲線ハ凸曲線デアル。

(証明) $f'(z)$ ノ零點ヲ $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ トスル
 事、方程式論ニ於ケル如ク、定理ニヨリ、 $\beta_1, \beta_2, \dots$
 $\dots, \beta_{n-1}$ ハ n 箇ノ點 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ ヲ包ム最小
 凸多角形ニ包マレ、從ツテ $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ ハ勿論
 $|z| = r \left(> \max_{1 \leq k \leq n} |\alpha_k| \right)$ ノ内部ニアル。

$$\text{又 } \frac{f''(z)}{f'(z)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{z - \beta_k} \text{ + ルヨヲ知ラレタ關係式ノ両}$$

辺 = z ヲカケ、ソノ實數部ヲ考ヘレバ

$$R\left\{z \frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} = R\left\{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{z}{z - \beta_k}\right\} = \sum_{k=1}^{n-1} R\left(\frac{z}{z - \beta_k}\right) \dots\dots (1)$$

$z = x + iy, \beta_k = \rho_k + it_k$ トオケバ

$$R\left(\frac{z}{z - \beta_k}\right) = \frac{x^2 + y^2 - \rho_k x - t_k y}{(x - \rho_k)^2 + (y - t_k)^2}$$

が、 xy 平面上ニ於テ、 $x^2 + y^2 - \rho_k x - t_k y = 0$ ノ點
 $(\frac{1}{2}\rho_k, \frac{1}{2}t_k)$ 即チ點 $\frac{1}{2}\beta_k$ ヲ中心トシ半径 $\frac{1}{2}|\beta_k|$
 ナル円、

換言スレバ原點ト點 β_k トヲ直徑ノ兩端トスル円ヲア
 ラハス。(以下、ユノ円ヲ円 β_k ト呼ブコトニスル)
 從ツテ円 β_k 外ノ點 (x, y) ニ對シテハ

$$x^2 + y^2 - \rho_k x - t_k y > 0$$

從ツテ、前述ノ通り $|z| = r \left(> \max_{1 \leq k \leq n} |\rho_k| \right)$ ハ円 β_1 , 円
 β_2 , 円 β_3 , -----, 円 β_k , -----, 円 β_{n-1} ヲ内部ニ含
 ムカラ

$|z| = r$ 上ノ任意ノ點 $z = x + iy$ ニ對シテハ (1) = ヲ

||

$$R\left\{z \frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} > 0 > -1$$

故ニ $f(z)$ ニヨル $|z| = r$ ノ寫像曲線ハ凸曲線デアール。

§2. $0 < b < a$ トシ

$$a_1 = \frac{1}{2}(a+b), a_2 = \frac{1}{2}(a_1+b_1), \dots, a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1}+b_{n-1}), \dots,$$

$$b_1 = \sqrt{ab}, b_2 = \sqrt{a_1 b_1}, \dots, b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}, \dots,$$

トスレバ、数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ ハ同一、極限值 M (M ハ a, b ノ算術幾何平均ト名付けラレル)ヲ持テ、 M ハ

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}$$

デ導ヘラレルコトヲがうすハ論ジテ。茲ニ

$$k = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \text{ デアル。以下 } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} = K \text{ トシヨ}$$

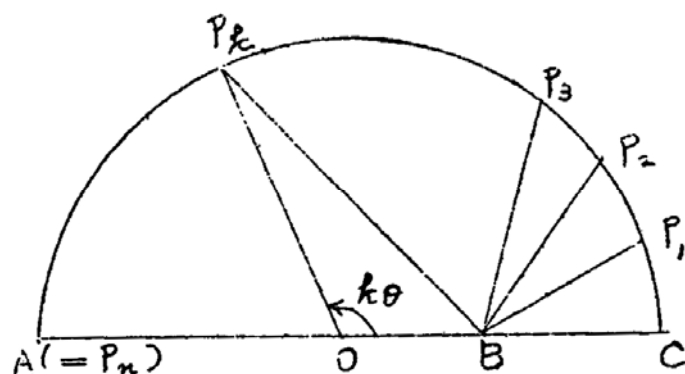
フ。

次ニ、コノ極限值 M ノ別ノ意義ヲ與ヘテ見ヨウ。

(定理2)

一直線上ニ、三點 A, B, C ヲ取リ $AB = a, BC = b$ トシメル。

次ニ AC ヲ直径トスル半円 O ヲエカキ、ソノ半円周ヲ n 等分シ、ソノ分



点ヲ $P_1, P_2, P_3, \dots, P_k, \dots, P_n (= A)$ トシ、 n 箇ノ線分 $BP_1, BP_2, BP_3, \dots, BP_k, \dots, BP_n$ ノ長サノ調和平均ヲ H_n トスレバ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = M \text{ デアル。}$$

(証明) 中心角 $\angle OP_k = \theta$ とおけば $n\theta = \pi$

定義 = 3.11

$$\frac{1}{H_n} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{BP_k}}{n}$$

$\triangle BOP_k$ = 餘弦公式ヲ適用スルバ

$$BP_k = \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a-b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos k\theta}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{H_n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a-b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos \theta}}$$

之ヨリ計算 = 3.11

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{H_n} &= \frac{2}{a\pi} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\ &= \frac{2K}{a\pi} \left(k = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) \end{aligned}$$

シカニ $=$, $a\pi = 2KM + \pi$ 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = M$$

———— (完) ————