



Title	可解群ニ関スルー注意
Author(s)	岩澤, 健吉
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 258, p. 539-544
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75082
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1149. 可解群 = 関スルー注意

岩澤 健吉 (東大)

1. 群 $G = G_1$ / 交換子群 $\gamma G' = G_2$, G_2 / 交換子群 $\gamma G'_2 = G'_2 = G'' = G_3$, ----- 一般 $= G_n$ / 交換子群 $\gamma G'_n = G_{n+1}$ トシマス。コノトキ適當ナル n ニ對シ

$$G_n = 1 \dots \dots \dots (1)$$

トナルナラバ始メ、群 G ヲ可解 (auflösbar) ト云フコトハ有限群論デ周知ノ通りデアリマスガ、我々ハ以下 G ガ無限群ノ場合ニモ條件 (1) ヲ以テ可解ノ定義トスルコト = シマス。¹⁾

サテ、以上ハ一般ノ abstract ナ群ニツイテノ話デアリマスガ今度ハ G ガ位相群デアル場合ヲ考ヘテ見マス。 G / 交換子群 G_2 ハ abstract ナ意味デハ確カニ G / 部分群デアリマスガ位相ヲ考ヘ=入レルト必ずシモ $G =$ 於テ隔テテキマセン。(ソノ例ハ後ニ示ス) ヨツテ位相群トシテ、 G / 交換子群トシテハ G_2 / closure $\overline{G_2} = G_2^*$ ヲトルコトガ適當ト思ハレマス。實際 G_2^* ハ G/G_2 ガ abel 群デアル様ナ G / 閉 γ 不変部分群 γ ノ γ ナデ最小ノモノトナリマス。

ヨツテ $G = G_1^*, G_2^*$ / 位相的交換子群 $\gamma G_2^*, G_2^*$ / 位相的交換子群 $\gamma G_3^*,$ ----- 一般 $= G_n^*$ / 位相的交換子群 γG_{n+1}^* トオクコト = シ, (1) ト同様ニ適當ナル n = 對シ

$$\phi_n^* = 1 \dots\dots\dots (2)$$

が成立スルトキ ϕ を 位相的=可解 ト呼ブコト=シマス。

ソシテ (1) ノ場合ハコレ=對シ 代數的=可解 ト特=斷ハルコト=シマス。

サテ次ノ定理が成立チマス。

定理1. 位相群 ϕ が代數的=可解デアルコトト位相的=可解デアルコトトハ同等デアル。シカモ (1), (2) ハ同ジル=對シ同時=成立スル。

コレヲ証明スルタメ=一般ニ次ノ補助定理ヲ述ベテオキマス。

補助定理1. H を位相群 ϕ ノ、必ずシモ閉ゲテキタイ部分群トシ $\overline{H}$ をソノ closure トスル。 H ノ代數的交換子群列ヲ $H_1 = H, H_2, H_3, \dots$ トシ、又 $\overline{H}$ ノ位相的交換子群列ヲ $H_1^* = \overline{H}, H_2^*, H_3^*, \dots$ トスレバ

$$\overline{H_n} = H_n^* \quad (n=1, 2, \dots) \dots\dots (3)$$

証明. $n=1$ ナルトキ

$$\overline{H_1} = \overline{H} = H_1^*$$

ハ定義=ヨリ成立スルカラ $n=2$ 關シ帰納法ヲ用ヒルコトトシ

$$\overline{H_{n-1}} = H_{n-1}^* \dots\dots\dots (4)$$

ヲ假定シテ (3) ヲ証明スルコト=シマス。定義=ヨリ

$$H_n = [H_{n-1}, H_{n-1}], \quad H_n^* = \overline{[H_{n-1}^*, H_{n-1}^*]}^{(2)}$$

(4) =ヨリ $H_{n-1} \subseteq H_{n-1}^*$, 故ニ $H_n \subseteq [H_{n-1}^*, H_{n-1}^*]$, コ

レオラ closure ヲトルバ $\overline{H_n} \subseteq H_n^*$. 又一方 H_{n-1}/H_n

abel 群デアルコトカラ容易 = $\bar{g}_{n-1}/\bar{g}_n$ が abel 群デアルコトガワカリマスカラ

$[\bar{g}_{n-1}, \bar{g}_{n-1}] \subseteq \bar{g}_n$, 即チ $[g_{n-1}^*, g_{n-1}^*] \subseteq \bar{g}_n$
closure フトレバ $g_n^* \subseteq \bar{g}_n$, ヨッテ (3) が証明サレマシタ。

特 = $g = \mathcal{O}$ フトレバ定理 1 フ得マスが特別 + 場合トシテ又次, 定理が得ラレマス。

定理 2. g フ位相群 $\mathcal{O}$ ノ稠密 + 部分群 フトレバ g が代数的 = 可解デアルトキ $\mathcal{O}$ ハ又位相的 = (又代数的 =) 可解デアル。

2. 上ノ定理ノ應用ヲ述ベテ見マス。ソノタメニ先ッ

補助定理 2. compact (bicomact) connected + 可解群³⁾ ハ abel 群デアル。

証明. ソノ様ナ群 $\mathcal{O}$ が abel 群デナイト假定シ $a, b \neq e$ ナル元 a, b フトリマス。 $\mathcal{O}$ ノ適當ナ連続有界表現 D フトレバ $D(a b a^{-1} b^{-1}) \neq E$, 即チ $D(a) D(b) \neq D(b) D(a)$ トナリマスカラ表現サレタ群 $D(\mathcal{O})$ モ亦 abel 群デハアリマセン。サテ一方 $D(\mathcal{O})$ ハ compact connected + Lie 群デスカラ local = ハソレハ abel 群ト非 abel 單純群トノ直積デアルワケデスが今ノ場合 $\mathcal{O}$ ハ (位相的 =) 可解デスカラ非 abel 群ノ部分ハ存在シマセン。即チ $D(\mathcal{O})$ ハ local = ハ abelian デアリマスガ, ソレハ connected ナル故全体トシテモ

$abel$ 群トナリマス。コレハ明カニ $D(a)D(b) \neq D(a)D(b)$
 = 矛盾シマス。

コレヲ用ヒテ

定理3. G ヲ十分多クノ概週期函数ヲ有スル可解群
 トスル。但シ G = 位相ハ假定シナイ。 G = 於テ指數
 $[G: \mathcal{H}]$ が有限デアルマシナ凡テノ不変部分群 $\mathcal{H}$ ノ共
 通部分群ヲ $\mathcal{H}$ 。トスレバ $\mathcal{H}$ 。ハ $abel$ 群デアール。

証明. 概週期函数ヲ用ヒテ G ヲ開テテ $bicomact$ ナ
 位相群 $\overline{G}$ ヲツクレバ G ハ $\overline{G}$ = 於テ稠密ナ部分群トナリマ
 ス。コノテ定理2ヲ用ヒレバ $\overline{G}$ モ亦可解群デアールコトが知
 ラレマス。 $\overline{G}$ ノ單位元ヲ含ム $connected$ ナ $component$
 ヲ $\mathcal{H}^*$ トスレバ $\mathcal{H}^*$ ハ明カニ $connected bicomact$ ナ
 可解群, ヨツテ補助定理ニヨリ $abel$ 群デアリマス。一方
 $\overline{G}/\mathcal{H}^*$ ハ 0-次元群ナル故 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}^*$ 。ヨツテ証明サレ
 マシタ。

上ノ定理ハ逆ヲ考ヘテ見マスト可解ナ群 G デ上ノ如
 クニシテ作ツタ $\mathcal{H}$ 。ガ $abel$ 群デアールマシナモノデアッテ
 モ必ずしも十分多クノ概週期函数ヲ有シテキルトハ限リマ
 ゼン。例ヘバ有理数 a, b, c = ヨリツクアレタ。

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad a \neq 0, b \neq 0$$

ノ如キ形ノ行列全体, ツクル群ハ、ノ一例デアリマス。

3. 最後ニ代数的交換子群 $G_2 = G'$ ト位相的交換子群
 $G_2^* = \overline{G'}$ が一致シナイ例ヲ一ツ挙ゲテオキマス。

有理数全体ノ加法群ヲ $\mathcal{R}_0$, 實数全体ノ加法群ヲ $\mathcal{R}$,
トシ $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}$, トノ直和 (直積) ヲ $\mathcal{R} \oplus \mathcal{R}_0$ トシマス。

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1$$

$\mathcal{R}$ ノ元ヲ一般ニ

$$A = (a, \gamma) \quad a \in \mathcal{R}_0, \gamma \in \mathcal{R}_1$$

トカフトヤ $\mathcal{R}$ ノ自己同型 σ ヲ

$$A^\sigma = (a, \gamma + a)$$

ニヨリ定義シ $\mathcal{R}$ ヲ σ カラ生成サレル自由環状群 $\{\sigma^n\}$

ニヨツテ拡張シタ群ヲ $\mathcal{O}_\sigma$ トシマス。

$$\mathcal{O}_\sigma = \{\mathcal{R}, \sigma\}$$

サテ, $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1$ = 普通ノ位相ヲ入レレバ σ ハ連続ナ
自己同型ナル故, コレヲ拡張シテ $\mathcal{O}_\sigma$ = 位相ヲ導入スルコ
トが出来マス。(但シ $\mathcal{O}_\sigma/\mathcal{R}$ ハ discrete トナル)。 $\mathcal{O}_\sigma$ ノ
代数的交換子群ヲツクルト容易ニ面ヲレル様ニソレハ

$$\{(0, a), \quad a: \text{有理数}\}$$

ナル形ノ元全体トナリ, ソノ closure

$$\{(0, \gamma), \quad \gamma: \text{實数}\}$$

ト異ルコトがワカリマス。

註1) ユノ様ナ可解ノ定義ハ無限群ノ場合ニハ條件が強ス

ヤルヌヲデアリマス。實際, R. Baer 其ノ他, ソダイ

エツトノ學者達ハモツト拡張シタ意味ニ可解ト云フ言

葉ヲ用ヒテキマス。

2) $[\cdot, \cdot]$ ハ交換子群ヲ示ス。

脚註3) 定理1 = ヨリ代数的 = 可解デヤリ同時 = 位相的 =
可解デヤリマス。