



Title	収斂空間ニ就イテ
Author(s)	松山, 昇
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 258, p. 544-552
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75083
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1150. 収斂空間 = 就イテ

松 山 昇

集合 S ノ スベテ ノ 部分集合 ノ 集合 $2^S =$ 於テ 2^S ノ 夫々ノ 部分集合 $A =$ 他ノ 部分集合 A' ヲ 對應 ($A \rightarrow A'$) セシノル 方法ガ 興ヘラレタトキニ S ハ 空間ガ アルト云フ。ソノタメニ 最も多ク 用ヒラレルモノトシテ 次ノ ニツガアル。

(I) 近傍空間. S ノ 各々点 $X =$ 近傍ト名付ケラレル 2^S ノ 集合 ∇_X ガ 對應シテイル。サテ X ノ 任意ノ 近傍 $\nabla_X =$ 對シテ $(\nabla_X - X) \cap A \neq \phi$ ナルトヤ, 且コノトキニ 限ッテ $X \in A'$ ト 定義スル。

(II) 収斂空間. $S =$ 於テ 点列ト名付ケラレル 集合 $\{X_\alpha\}^{1)}$ ガ 考ヘラレ, 更ニ $\{X_\alpha\}$ ガ $X =$ 収斂スルカ否カハ 常ニ 決定サレルモノトスル。若シ $X =$ 収斂スルヤウナ 点列 $\{X_\alpha\}$ ヲ A ノ 中カラ 取り出セルナラバ, 且ツコノトキニ 限ッテ $X \in A'$ ト 定義スル。

リ 任意ノ 方向系 = 對シテ

近傍空間及び収斂空間デハ適當ナル條件ヲ満スラバ⁽²⁾
 一方オノ地方ノ空間ニ移レウレモノデアツテ、例ヘバ近傍
 空間ガ収斂空間トナルタメニハ点列 $\{X_n\}$ ノ収斂ハ次ノ(III)
 ニヨツテ定義サレル。

(III) 任意ノ ∇_x ニ對シテ $\alpha_0 = \alpha_0(\nabla_x)$ ガ定マツテ
 $\alpha > \alpha_0$ ナル限リ $X_n \in \nabla_x$ デ且ツコノ時ニ限ツテ $\{X_n\}$ ハ
 X ニ収斂デアルト言フ。

(III)ト(II)ニヨツテ我々ハ収斂空間ヲ定義スルコトハ出
 来ルガ、今(II)トハ立場ヲ変ヘテ $A = A'$ ヲ對應セシメルニ、
 モット A ニ關係シタ方法ヲ用ヒルコトニヨツテ、近傍空間
 S ノ中ニ澤山ノ収斂ニヨル位相ヲ導入スルコトガ出来ルコ
 トガ分ツタ。シカモ、ソレヲ位相ノ全体ハ位相ノ強サニヨ
 ヲツテ順序 (ordering) ヲツケルトキ Boole 代数ニナル
 コトガ示サレル。

1. 2^S カラ 2^S ヘノ函数 φ , φ ハ 2^S カラ 2^S ヘノ
 函数トシテ次ノ條件ヲ満スモノトスル。

(重. 1) 任意ノ $A \in 2^S$ ニ對シテ $A \subset \varphi(A)$

(重. 2) $A \subset B$ ナラバ $\varphi(A) \subset \varphi(B)$

カナル函数 φ ノ全体ノ集合ヲ重トスル。

定義 1. $\varphi_1 \in \mathfrak{H}$, $\varphi_2 \in \mathfrak{H}$ トレヌベテノ $A \in 2^S$ ニ對
 シテ $\varphi_1(A) \subset \varphi_2(A)$ ナルトキ、且ツコノ時ニ限ツテ $\varphi_1 < \varphi_2$

(1) G. Birkhoff; Ann. of Math. 38 (1937)

J. W. Tukey; Convergence and uniformity in
 topology.

トスル。

然レトキ容易 = 分ル如ク, $\mathcal{P}_1 < \mathcal{P}_2 < \mathcal{P}_3$ + ラバ $\mathcal{P}_1 < \mathcal{P}_3$ デアリ又, $\mathcal{P}_1 < \mathcal{P}_2 < \mathcal{P}_1$ + ラバ $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$ デアル。更 = $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ = 對シテ $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 (A) = \mathcal{P}_1(A) \cup \mathcal{P}_2(A)$, $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 (A) = \mathcal{P}_1(A) \cap \mathcal{P}_2(A)$ ト置ク + ラバ重ハ定義 1 / 意味, 順序 = 關シテ束ヲ + スコトが分ル。

若シスベテ / $A \in 2^S$ = 對シテ $\theta(A) = A$, $I(A) = S$ + ルニツノ函數 $\theta, I(\in \mathfrak{A})$ ヲ考ヘル + ラバ重ハ *Boole* 代數 = ナルコトモ容易 = 証明出來ル。

2. 近傍空間. S ヲ近傍空間トシ各々ノ点 x = 對スル近傍ノ條件ヲ次ノ様ニ置ク。

$$(N.1) \quad x \in \nabla_x$$

$$(N.2) \quad U_x \cap \nabla_x \text{ ハ又 } x, \text{ 近傍デアアル。}$$

定義 2. 点列 $\{X_\alpha\}$ ハ A / 元ヨリ + ルモノトシ A^c ヲ含ム如何ナル x / 近傍 ∇_x = 對シテ $\exists \alpha_0 = \alpha_0(\nabla_x)$ ガ定マツテ $\alpha > \alpha_0$ + ル限リ $X_\alpha \in \nabla_x$ デアルトキ, 且コノ時 = 限ツテ $\{X_\alpha\}$ ハ A = 關シテ x = 收斂スルト言ヒ

$$X_\alpha \rightarrow x(A)$$

ト書ク。

同ジ点列 $\{X_\alpha\}$ デ $\in A$ / 取り方 = ヲツテハ x = 收斂スルコトモアリ, 又シナイコトモアル。更ニ定義 2 / A ヲ特ニ S = トルトキハ普通ノ收斂ノ定義ニト一致スルコト = 注意スベキデアアル。

補題 1. $X_\alpha \rightarrow x(A)$ = シテ $\{X_\beta\} \subset \{X_\alpha\}$ が共終

系 (cofinal subsequence) デアル + ラバ $x_\beta \rightarrow x(A)$ デアル。

証明ハ容易デアル。

補題2. $\{x_\alpha\} \subset B \subset A = \text{シテ } x_\alpha \rightarrow x(A) \text{ + ルトキ}$
 $x_\alpha \rightarrow x(B)$ デアル。

証明. B^c フ含ム x ノ如何ナル近傍 $\nabla_x \in A^c$ フ含ム
 x ノ近傍デアル。従ッテ $\alpha_0 = \alpha_0(\nabla_x)$ ガ定マツテ $\alpha > \alpha_0$ ナ
ル限リ $x_\alpha \in \nabla_x$ デアル。即チ $x_\alpha \rightarrow x(B)$ 。

定義3. $\varphi \in \Phi$ トシ互ニ相異ナル A ノ点カラナル点列
 $\{x_\alpha\} = \text{對シテ}$

$$x_\alpha \rightarrow x(\varphi(A))$$

ナルトキ且コノ時ニ限ッテ $x \in A^\varphi$ ト定義スル。コノ A^φ フ
位相 $\varphi = \text{ヨル } A$ ノ導来集合ト名付ケル。

コノ定義ニ於テ A^I ハ普通ノ導来集合ノ定義(II)ト一
致スル。我々ノ以下ノ議論デ最ニ興味ナルノハ A^φ ト A^I
デアル。尚ホ以下ノ議論ニ於テハ次ノ条件ヲ満スモノトス
ル。

(D). 考ヘル方向系ノ全体ノ集合ヲ $\mathcal{A}$ トシ $\mathcal{A}$ 一属ス
ル各々方向系ハ無限ニ多クノ相異ナル元ヲ含ムモノトスル。

系. $x \in A^\varphi$, $\varphi' < \varphi$ + ラバ $x \in A^{\varphi'}$ デアル。

証明. 假定ニヨッテ $\{x_\alpha\} \subset A$ ガアツテ $x_\alpha \rightarrow x(\varphi(A))$
デアル。然ルニ $\{x_\alpha\} \subset A \subset \varphi'(A) \subset \varphi(A)$ デアルカラ補題2
ヲ用ヒテ, $x_\alpha \rightarrow x(\varphi'(A))$ 。即チ $x \in A^{\varphi'}$ トナル。

コノ系ハ $\varphi' < \varphi$ + ラバ位相 φ ガ位相 φ' ヨリニ強クナイ

コトヲ示シテイル。

定理1. $(A \cup B)^{\mathcal{F}} \subset A^{\mathcal{F}} \cup B^{\mathcal{F}}$

証明. $x \in (A \cup B)^{\mathcal{F}}$ トスル $\{x_{\alpha}\} \subset A \cup B$ デ

$x_{\alpha} \rightarrow x (\mathcal{F}(A \cup B))$ ナル系列 $\{x_{\alpha}\}$ ヲ取ルコトが出来ル。

$\{x_{\alpha}\} \cap A, \{x_{\alpha}\} \cap B$ ノ内少クトエ一方ハ共終系ヲナサネ
バナラナイ。例へバ

$$\{x_{\beta}\} \equiv \{x_{\alpha}\} \cap A$$

ガ $\{x_{\alpha}\}$ ノ共終系デアルトスル。補題1ヨリ

$$x_{\beta} \rightarrow x \mathcal{F}(A \cup B)$$

$$\text{又} \quad \{x_{\beta}\} \subset A \subset \mathcal{F}(A) \subset \mathcal{F}(A \cup B)$$

デアルカラ、補題2ヨリ

$$x_{\beta} \rightarrow x (\mathcal{F}(A))$$

即チ $x \in A^{\mathcal{F}}$ トナル。

定理2. 集合 ∇ ガ x ノ近傍ナルタ人ノ必要且十分ナ
ル条件ハ任意ノ $\mathcal{F} \in \mathfrak{F} = \mathfrak{F}(x)$ 對シテ

$$x \in (\nabla^c)^{\mathcal{F}}$$

デアイル。

証明. 定義3ノ系ニヨツテ $x \in (\nabla^c)^{\theta}$ ヲ示セバヨイ。

∇ ガ x ノ近傍デアルトシ且ツ $x \in (\nabla^c)^{\theta}$ トスル。従ツテ適

當ナル $\{x_{\alpha}\} \subset \nabla^c$ ガアツテ $x_{\alpha} \rightarrow x (\nabla^c)$ 。デアルカラ、

$\nabla^c = \nabla$ ヲ含ム任意ノ x ノ近傍従ツテ特ニ $\nabla = \nabla^c$ シヲモ

$\alpha_0 = \alpha_0(\nabla)$ ガ定マツテ $\alpha > \alpha_0$ ナル限リ $x_{\alpha} \in \nabla$ デアル。

コレハ $\{x_{\alpha}\} \subset \nabla^c$ ニ矛盾スル。逆ニ $x \in (\nabla^c)^{\theta}$ デ且 ∇ ガ

x ノ近傍デナイトスル。 ∇ ヲ含ム x ノ如何ナル近傍 $\cup x =$

對シテモ

$$U_x \cap \nabla^c \neq \emptyset$$

依ッテ $x_\alpha \in U_x \cap \nabla^c \subset \nabla^c$ ナル点 x_α ヲ見出スコトが
出来ル。シカモ各々 x_α ハ互ニ相異ナルヤツニトレル。又
近傍系ノ全体ハ C ニ關シテ方向系ヲナシテイルカラ $\{x_\alpha\}$
ハ点列デアアル。コノ点列ノ作り方ヨリナル如ク, $\{x_\alpha\} \subset \nabla^c$
デ $x_\alpha \rightarrow_x (\nabla^c)$ デアル。即チ $x \in (\nabla^c)^\theta$ トナッテ貰
アル。

コノ定理ヨリモトノ近傍空間ハ θ 位相ニヨル収斂空間
ハ位相合同ニナルコトが分ル。

次ニ一ツノ空間 S カラ他ノ空間 S' へノ一意寫像 F ニ對
シテ点列トシテノ連續性ト近傍トシテノ連續性ニツイテ
考ヘヨウ。

定理3. 次ノ二ツノ事柄ハ同等デアアル。

$$(a) \quad x \in S \text{ ト } A \in 2^{S'} \text{ ニ對シテ } x_\alpha \rightarrow x (F^{-1}(A)) \text{ ナラバ}$$
$$F(x_\alpha) \rightarrow F(x) \quad (A)$$

$$(b) \quad A^c \text{ ヲ含ム近傍 } \nabla_{F(x)} = \text{對シテ } S \text{ デ } (F^{-1}(A))^c \text{ ヲ}$$
$$\text{含ム } x \text{ ノ近傍 } U_x \text{ が定マツテ } F(U_x) \subset \nabla_{F(x)}.$$

証明. (a) が成立シタトシテ如何ナル $(F^{-1}(A))^c$ ヲ含ム
 x ノ近傍 U_x ニ對シテ $F(U_x) \not\subset \nabla_{F(x)}$ デアルナラバ
 $x_\alpha \in U_x$ デ $F(x_\alpha) \in \nabla_{F(x)}$ ナル点 x_α ヲトルコトが出来ル。
然ルニ $F(x_\alpha) \in \nabla_{F(x)}^c \subset A$ デアルカラ $x_\alpha \in F^{-1}(A)$. ナホ近
傍系ノ順序ニ關シテ $\{x_\alpha\}$ ハ点列ヲナシ $x_\alpha \rightarrow x (F^{-1}(A))$
デアアル。

依テ $F(X_\alpha) \rightarrow F(X)(A)$. 所テ $A^c \subset \bigvee_{F(X)} + \text{ル故}$
 $F(X_\alpha) \in \bigvee_{F(X)}$ デアルカラ $F(X_\alpha) \rightarrow F(X)(A)$. トナッ
 テ矛盾デアル. 逆 = (b) が成立シ, 且ツ $X_\alpha \rightarrow X(A)$ トシ
 ヨウ. (b) デ定マル $\bigcup_\alpha = \text{数レテ } \alpha_0 = \alpha_0(\bigcup_\alpha)$ ヲトルナ
 ラバ $\alpha > \alpha_0$. ナル限リ $X_\alpha \in \bigcup_\alpha$ トナル. 依テ $F(X_\alpha) \in \bigvee_{F(X)}$
 或ハ $F(X_\alpha) \rightarrow F(X)(A)$.

3. *Riesz* の条件. コノ章デ我々ノ導來集合 = 關ス
 ル *Riesz* の条件ヲシラベヨウ.

定理4. 次ノ (N.3) が成立スルナラバ $A \subset B$ ナルトキ
 $A^g \subset B^g$ デアル.

(N.3) $\bigcup_\alpha$ ナ X ノ任意ノ近傍トスルトキ $\bigcup_\alpha \subset \bigvee$ ナル
 如クナル $\bigvee \in$ 亦 X ノ近傍デアル.

証明. $x \in A^g$ トスルト適當ナル $\{X_\alpha\} \subset A$ ガアッテ
 $X_\alpha \rightarrow x(\phi(A))$. 定義3ノ系ヨリ $\theta < g$ ナル故

$$X_\alpha \rightarrow x(A)$$

依テ $A^c \cap X$ ノ近傍デハナイ. (N.3) ヲ用ヒルナラバ $B^c \subset A^c$
 カラ $B^c \cap X$ ノ近傍デハナイ. 更ニ $(g(B))^c \subset B^c$ デ
 アルカラ $(g(B))^c \in$ 亦 X ノ近傍デハナイ. シカニ $(g(B))^c$
 ナ含ム如何ナル X ノ近傍 $\bigvee_x$ ナトッテモ必ず B ト交ハラネ
 バナラスカヲ

$$y_\bigvee \in \bigvee_x \cap B$$

ナル点 $y_\bigvee$ ナトルコトガ出來ル. 又コノ作り方ヨリ分ル如
 ク $y_\bigvee \rightarrow x(g(B))$ デアルカラ $x \in B^g$.

依テ $A^g \subset B^g$

系. 位相 θ = 関シテハ (N.3) ハ $A \subset B$ + レトキ $A^\theta \subset B^\theta$ + レタメノ十分ナル条件ヲモアル。

導来集合ノ定義ヨリ明ナル如ク A が唯一点ヨリナル集合ノトキハ $A^\theta = \phi$ デアル。従ツテ S が (N.1) — (N.3) ノ条件ヲ満ス近傍空間デアルトキハ各々 θ = 関シテ導来集合ハ *Riesz* ノ三ツノ条件ヲ満スコトガ分ル。

定理5. S が近傍 = 関スル *Hausdorff* ノ分離公理ヲ満スタメノ必要十分ナル条件ハ

$$X_\alpha \rightarrow x(S), X_\alpha \rightarrow y(S) + \text{ラバ } x = y$$

コノ定理及ビ証明ハ *G. Birkhoff* ノト同様デアルが、近傍空間トシテノ近傍ノ条件ヲ收斂ノ形デノベタモ、デアル。コレ = 反レテ $X_\alpha \rightarrow x(A)$ が唯一ツノ收斂点ヲモツタメノ条件トシテハ、

定理6. $X_\alpha \rightarrow x(A), X_\alpha \rightarrow y(A)$ + レトキ $x = y$ + レタメノ必要且十分ナル条件ハ

(N.4) $x \neq y$ + レトキ A^c ヲ含ム適當ナル近傍 U_x, V_y が存在シテ

$$(U_x \cap A) \cap (V_y \cap A) = \phi$$

ナラシメウルコトデアル。

証明. (N.4) が満サレ + カツタトスルト A^c ヲ含ム如何ナル x, y ノ近傍 U_x, V_x = 對シテモ

$$X_{\nu}, \nu \in (U_x \cap A) \cap (V_y \cap A)$$

ナル点 X_{ν}, ν がアル。シカモ $X_{\nu}, \nu \rightarrow x(A)$ デ且 $X_{\nu}, \nu \rightarrow y(A)$ トナルコトモ容易ニ証明出来ル。即チ矛盾デアル。逆 =

(N.4) が満たされたとして $x_\alpha \rightarrow x(A)$, $x_\alpha \rightarrow y(A)$, かつ y としなう。収斂ノ定義ヨリ A^c を含ム如何ナル近傍 U_x , V_y = 對シテニ適當ニ α_0 が定マツテ $\alpha > \alpha_0$ ナル限リ

$$x_\alpha \in (U_x \cap A) \cap (V_y \cap A)$$

デアルカラ (N.4) = 矛盾スル。