



Title	積空間ニ於ケル積保測変換ニ就テ
Author(s)	河田, 敬義
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 258, p. 552-557
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75084
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1151. 積空間 = 於ケル 積保測変換 = 就テ

河 田 敬 義 (東京文理大)

$(\Omega, \mathcal{B}, m), (\Omega', \mathcal{B}', m')$ ($m(\Omega) = m'(\Omega') = 1$) ヲ
測度空間, T, T' ヲ 夫々ノ上デ定義サレタ保測変換トシ

$$\bar{\Omega} = \Omega \times \Omega', \quad \bar{\Omega} \ni \bar{\omega} = (\omega, \omega'), \quad \omega \in \Omega, \omega' \in \Omega'$$

= 對シテ

$$\bar{T} = T \times T', \quad \bar{T}\bar{\omega} = (T\omega, T'\omega')$$

ト定義スレバ, $\bar{T}$ ハ $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{B}}, \bar{m})$ 上ノ保測変換トナル. 此
処 $\bar{m} = m \times m'$ ト m' トノ直積測度, $\bar{\mathcal{B}}$ ハ $E \times E' (E \in \mathcal{B}, E' \in \mathcal{B}')$
ヲ含ム最小ノ Borel 集合体トスル.

談話 1142 デハ T が混合型ノ場合ヲ考ヘタガ, 一般ニ
次ノコトが成立ツ.

今 T ノ固有値入: $\phi(T\omega) = e^{i\lambda} \phi(\omega), \phi \in L^2(\Omega)$

ノ全体ヲ G トスレバ G ハーツノ群ヲ作ル。同様ニ, $T', \bar{T}$
 ニ對シテ $G', \bar{G}$ ヲ考ヘル。又 K ヲ實數ヲ $\text{mod. } 2\pi$ デ考ヘ
 タ加法群トスルト, $G, G', \bar{G}$ ハ K ノ部分群デアアル。

[定理1] $\bar{G}$ ハ K 中ノ G, G' ノ Kompositum $\{G, G'\}$
 ニ等シイ:

$$(1) \quad \bar{G} = \{G, G'\} = \{\lambda + \lambda' : \lambda \in G, \lambda' \in G'\}$$

[定理2] T, T' ヲ夫々エルゴード的トスル。ソノト
 ヲ $\bar{T} \in$ 亦エルゴード的トナルタメノ必要十分條件ハ

$$(2) \quad G \cap G' = 0$$

ナルコトデアアル。

[系1] T, T' ガ廣義混合型 (即チエルゴード的デ $G = G' = 0$) トラバ, $\bar{T}$ 亦廣義混合型トナル。

[系2] T ガ廣義混合型 (エルゴード的デ $G = 0$) ナ
 ラ任意ノエルゴード的ナ T' ニ對シテ $\bar{T} \in$ 亦エルゴード的
 トナル。逆ニ亦真。

コノ系ハ談話 1142 / 定理2ニ他ナラナイ。

(定理1ノ証) (1) $L^2(\Omega)$ ヲ x ニ對シテ $U_x = x(T_\omega)$
 トスレバ

$$(3) \quad U = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it} dE_t$$

トアヲハサレル。同様ニ $U', \bar{U}$ ヲ $T', \bar{T}$ カラ定義スレバ

$$(3') \quad U' = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it} dE'_t, \quad \bar{U} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it} d\bar{E}_t$$

トアヲハサレル。

之レカ $\sigma_x(t) = (E_t x, x)$, $x \in L^2(\Omega)$ トスレバ

$$(4) \quad (Ux, x) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it} d\sigma_x(t)$$

同様 =

$$(4') \quad (U'x', x') = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it} d\sigma'_{x'}(t), \quad (\bar{U}\bar{x}, \bar{x}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it} d\bar{\sigma}_{\bar{x}}(t)$$

トナル。

今、特 $\bar{x} = x \cdot x'$ トオケバ $\bar{\sigma}_{\bar{x}}$ ノ定義ヨリ

$$(5) \quad (\bar{U}\bar{x}, \bar{x}) = (Ux, x) (U'x', x')$$

トナルカラ

$$(\bar{U}\bar{x}, \bar{x}) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t+t')} d\sigma_x(t) d\sigma'_{x'}(t') = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it} d\bar{\sigma}_{\bar{x}}(t)$$

トナリ

$$(6) \quad \bar{\sigma}_{\bar{x}}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_x(t-s) d\sigma'_{x'}(s) = \int_{-\pi}^{\pi} \sigma'_{x'}(t-s) d\bar{\sigma}_{\bar{x}}(s)$$

トナル。

(6) ヨリ $\bar{x} = x \cdot x' =$ 對シテハ $\bar{\sigma}_{\bar{x}}$ ノ不連続点ハ $\sigma_x(t)$, $\sigma'_{x'}(t)$ ノ不連続点ノ和トシテアラハサレルモ、以外ニ t イ。シカルニ大等ハ夫々 $G, G' =$ 含マレルカラ $(\bar{E}_t \bar{x}, \bar{x})$ ハ $\bar{x} = x \cdot x' =$ 對シテハ $t \in \{G, G'\}$ 以外ニ不連続点ヲモタナシ。

一般ニ $L^2(\bar{\Omega}) \ni \bar{y} =$ 對シテ

$$(7) \quad \lim \| \bar{x}_n - \bar{y} \| = 0, \quad \bar{x}_n = x_n \cdot x'_n, \quad x_n \in L^2(\Omega), \\ x'_n \in L^2(\Omega')$$

トアヲハサレカ

$$(8) \quad \bar{E}^\lambda = \bar{E}_{\lambda+0} - \bar{E}_{\lambda-0}$$

トオケバ

$$\bar{E}^\lambda \bar{y} = \bar{y} + \text{w} \bar{y} \in L^2(\bar{\Omega}) \quad (\bar{y} \neq 0) \text{ がアレバ}$$

$$0 < (\bar{y}, \bar{y}) = (\bar{E}^\lambda \bar{y}, \bar{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{E}^\lambda \bar{x}_n, \bar{y}_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sigma_{\bar{x}_n}(\lambda+0) - \sigma_{\bar{x}_n}(\lambda-0) \}$$

ナレ故, アレナ

$$\sigma_{\bar{x}_n}(\lambda+0) - \sigma_{\bar{x}_n}(\lambda-0) > 0$$

トナリ, 上ニ見タ様ニ $\lambda \in \{G, G'\}$ トナレ. 即チ $\bar{G} \subset \{G, G'\}$ デアレ.

$$(ii) \text{ 逆} = \bar{\lambda} \in \{G, G'\}, \text{ 即チ } \bar{\lambda} = \lambda + \lambda', \lambda \in G, \lambda' \in G'$$

トスレバ

$$Ux = e^{i\lambda}x, \quad (x \in L^2(\Omega)), \quad U'x' = e^{i\lambda'}x' \\ (x' \in L^2(\Omega'))$$

ヲトケバ, $\bar{x} = x \cdot x' \in L^2(\bar{\Omega}) = \text{w} \text{ シテ}$

$$\bar{U} \bar{x} = Ux \cdot U'x' = e^{i(\lambda+\lambda')}xx' = e^{i\bar{\lambda}}\bar{x}$$

トナレ. 即チ $\bar{G} \supset \{G, G'\}$ トナレ. *q.e.d.*

(定理2, 証) (i) $\bar{T}$ がエルゴード的ナレタメニ

$G \cap G' = 0$ が必要ナコトハ, $G \cap G' \ni \lambda \neq 0$ トスレバ

$$Ux = e^{i\lambda}x, \quad x \in L^2(\Omega), \quad U'x' = e^{i\lambda}x', \quad x' \in L^2(\Omega')$$

トスレバ, $\bar{T}'$ がエルゴード的ナレコトカラ $|x'(\omega)| = \text{const. a.e.}$

トナレカラ

$$\bar{x} = \frac{x}{x'} \in L^2(\bar{\Omega}) \wedge \bar{x} \neq \text{const}, \quad \bar{U} \bar{x} = \bar{x} \quad \text{ヲ満足}$$

シテ シマフユトカラワカル。

(10) T, T' がエルゴード的デ且ツ $G \cap G' = 0$ トスルト
(18)ノ記号ニヨッテ)。

$$\sigma_x(+0) - \sigma_x(-0) = \|E^0_x\|^2 = |(x, 1)|^2$$

$$\sigma_{x'}(+0) - \sigma_{x'}(-0) = \|E'^0_{x'}\|^2 = |(x', 1)|^2$$

トナルカラ, $G \cap G' = 0$ ト合セテ (6) ヨリ $\bar{x} = x \cdot x' =$ 對
シテ

$$(9) \quad \bar{\sigma}_{\bar{x}}(+0) - \bar{\sigma}_{\bar{x}}(-0) = \|\bar{E}^0_{\bar{x}}\|^2 = |(x, 1)|^2 |(x', 1)|^2 = |(\bar{x}, 1)|^2$$

トナル。

今 $\bar{U}\bar{y} = \bar{y}$ ト $\bar{E}^0\bar{y} = \bar{y}$ トハ同値デアルカラ, *const.*
以外ニ $\bar{U}\bar{y} = \bar{y} + \nu \bar{y} \in L^2(\partial\Omega)$ が存在シタトスレバ, ソレ
ヲ成ルニ分ケルユトニヨリ, 豫メ

$$(10) \quad (1, \bar{y}) = 0, \quad \bar{y} \neq 0$$

ト假定シテ差支ヘナイ。(11)ノ様ニ $\bar{x}_n$ ヲトルト

(9) ヨリ $\|\bar{E}^0_{\bar{x}_n}\|^2 = |(x_n, 1)|^2$ デアルカラ, (11)ト合
セテ

$$\lim \|\bar{E}^0_{\bar{x}_n}\|^2 = \lim |(x_n, 1)|^2 = (\bar{y}, 1) = 0$$

トナルガ, 他方 $\bar{E}^0$ ノ連続性カラ

$$\lim \|\bar{E}^0_{\bar{x}_n}\|^2 = \|\bar{E}^0\bar{y}\|^2 = \|\bar{y}\|^2 > 0$$

トナリ矛盾ヲ生ジタ。故ニ下モ亦エルゴード的デナクデバ
ナラス。 *q. e. d.*

(注意) 談話 1142 「混合型保測変換ノ二, 三ノ性質」デ
ノ結果 (定理2) ハ上ノヤヲ = スペクトルノ理論ヲ用ヒレ

バ, ヨリ一般の結果ノ系トナッテシマヒマスカラ, アノ談
話ハ混合型保測変換ノ性質ヲ成ルベク純集合論的ニ扱フタ
メノ証明ヲ企テタモノト考ヘナイ限り意味ハナイト思ハレ
マス。

定理1ハ E. Hopf 等ニヨッテ既ニ知ラレテオノ結果デ
アルコトガ分リマシタ。定理1デハ固有値トノ關係ヲ用ヒ
マシタガ, ソレナシニモ (E. Hopf 等ノ方法デ) ノ廣義
混合型トイフコト。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\lambda} x_B(T^k \omega) = 0 \quad (\lambda \neq 0, \text{mod. } 2\pi)$$

トノ同値ナコトガ出来るヲケデス。(E. Hopf, On Cau-
sality, Statistics and Probability 参照)

(18, 9, 25)