



Title	分布函数ノ誘導ニ就イテ
Author(s)	宮澤, 光一
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 258, p. 557-567
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75085
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1152. 分布函数ノ誘導ニ就イテ

宮澤 光 一(小樽高商)

近年発達シテ来タ小標本ノ理論、或ハ統計的假設檢定論ニ於テ、一番基本ニナツテキルモノハ、各種統計量ノ分布函数デアリマス。 χ^2 -分布、 S^2 ノ分布、Fisher、 t -分布等ガ或ハ解析的ニ或ハ幾何学的ニ求メラレテキマスガ、ソレヲ統一的立場カラ一括シテ誘導シテ、ミタイト思フ

デアリマス。

x, y ヲ互ニ独立ト偶然量トシ、ソノ分布函数(普通確率密度ト云ハレテキルモノデス)ヲ夫々 $f(x), g(y)$ トスレバ $Z = x + y$ ノ分布函数 $h(z)$ ハ

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(z-x) dx$$

即チ、 f ト g トノ *Faltung* $h = f * g$ トシテ得ラレル譯デスガ、正規分布及ビ Γ -分布ノ一系ガ *Faltung* = 對シテ閉ゲテキルコトカ、コレカラノ推論ノ據リ所デアリマス。

§1. 正規分布ガ *Faltung* = 對シテ閉ゲテキルコト、コレハ良ク知ラレテキルコトナリデ、記号ト結果トガケヲ書イテオクコトニシマス。即チ平均値 m , 標準偏差 σ ナル正規分布ヲ $\phi_{\sigma}(x, m)$ デ表ハス。即チ

$$\phi_{\sigma}(x, m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

又、*Faltung*ノ結果ハ

$$\begin{aligned} \phi_{\sigma_1}(x, m_1) * \phi_{\sigma_2}(x, m_2) * \dots * \phi_{\sigma_k}(x, m_k) \\ = \phi_{\{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_k^2\}^{1/2}}(x, m_1 + m_2 + \dots + m_k) \end{aligned}$$

§2. 一系ノ Γ -分布ガ *Faltung* = 對シテ閉ゲテキルコト。

order p ナル Γ -分布トハ次ノ如キモノヲイフ。

$$(p > 0)$$

$$\gamma_{\sigma}(x, p) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ \frac{1}{(2\sigma^2)^p \Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

x, y が互に独立な Γ -分布 $\gamma_{\sigma}(x, p), \gamma_{\sigma}(y, q)$ を持つ。然らば $z = x + y$, 分布函数は

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{\sigma}(x, p) \gamma_{\sigma}(z-x, q) dx$$

であるが、被積分函数は $x < 0$ 及び $z-x < 0$ となる時は恒等的に零となるから

$$h(z) = \int_0^z \gamma_{\sigma}(x, p) \gamma_{\sigma}(z-x, q) dx = c_1 c_2 \int_0^z x^{p-1} (z-x)^{q-1} e^{-\frac{z}{2\sigma^2}} dx$$

$$= c_1 c_2 e^{-\frac{z}{2\sigma^2}} \int_0^z x^{p-1} (z-x)^{q-1} dx$$

$$\text{但し } c_1 = \frac{1}{(2\sigma^2)^p \Gamma(p)}, \quad c_2 = \frac{1}{(2\sigma^2)^q \Gamma(q)}$$

$$= c_1 c_2 e^{-\frac{z}{2\sigma^2}} \int_0^1 z^{p+q-1} t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$$

$$= c_1 c_2 z^{p+q-1} e^{-\frac{z}{2\sigma^2}} B(p, q) = \frac{1}{(2\sigma^2)^{p+q} \Gamma(p+q)} z^{p+q-1} e^{-\frac{z}{2\sigma^2}}$$

$$\text{即ち } h(z) = \gamma_{\sigma}(z, p+q)$$

カクシテ、一般に次の関係成立ス。

$$\begin{aligned} \gamma_{\sigma}(x, p_1) * \gamma_{\sigma}(x, p_2) * \dots * \gamma_{\sigma}(x, p_k) \\ = \gamma_{\sigma}(x, p_1 + p_2 + \dots + p_k) \end{aligned}$$

§3. $y = (x-m)^2$, 分布

$$x \text{ が正規分布 } \phi_{\sigma}(x, m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

ヲトストキ

$$y = (x - m)^2$$

ノ分布函数ヲ求メル。

$x \geq m$ ノ部分ノミヲ考ヘレバ

$$x - m = y^{\frac{1}{2}}, \quad dx = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} dy$$

ナルガ, $x \leq m$ ノ部分デモ分布ハ同様ナル故, y ノ分布函数トシテハ

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \times 2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}$$

$$\therefore g(y) = \gamma_{\sigma}(y, \frac{1}{2})$$

§4. χ^2 -分布

以上ヨリ直チニ得ラレル結果トシテ先ヅ χ^2 -分布ヲ求メル。

$x_1, x_2, \dots, x_n$ ヲ $\phi_{\sigma}(x, m)$ ノ母集団カラノ n -sample トシ

$$\chi^2 = \frac{(x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2 + \dots + (x_n - m)^2}{\sigma^2}$$

トオケバ $\frac{x_k}{\sigma}$ ハ平均値 $\frac{m}{\sigma}$ ノ周リニ標準偏差ノヲモツテ正規分布ヲトストス。ヨツテ $y_k = \left(\frac{x_k}{\sigma} - \frac{m}{\sigma}\right)^2$ トオケバ, γ ノ分布ハ $\gamma(y_k, \frac{1}{2})$ ナリ。

而も, $y_1, \dots, y_n$ は互に独立ナル故 §2 カラ χ^2 -分布トシテ決ヲ得ル.

$$f(x^2) = \gamma_1(x^2, \frac{n}{2}) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2})} (x^2)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

§5. 見本平方偏差 S^2 の分布

$x_1, x_2, \dots, x_n$ ヲ母集団 $\phi_n(x, 0)$ カラ, n -sample トシ,

$$S^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

$$\text{但シ } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

の分布ヲ求メル. $x_1 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x}$ が互に独立ナラ、上ノ如クシテ求マルノデアルが従属シテ其ルタメ次ノ変換ヲナス。

$$\begin{cases} y_1 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\sqrt{n}} \\ y_2 = c_{21}x_1 + \dots + c_{2n}x_n \\ \vdots \\ y_n = c_{n1}x_1 + \dots + c_{nn}x_n \end{cases}$$

コゝ c_{ik} へ上ノ直交変換ナル如ク定メルモノトス。コレハ常ニ可能ナリ。然ラバ

$$\sum y_k^2 = \sum x_k^2, \quad n\bar{x}^2 = y_1^2 + \text{コトカラ}$$

$$nS^2 = \sum_1^n x_k^2 - n\bar{x}^2 = \sum_1^n y_k^2 - y_1^2 = \sum_2^n y_k^2$$

而シテ x_i 's は独立ナル故 y_i 's も独立ナリ。

而 $\bar{y}_i$ の平均値 0, 固り = 標準偏差

$$\left(\sum_{k=1}^n c_{ik}^2 \sigma^2 \right)^{1/2} = \sigma \left(\sum c_{ik}^2 \right)^{1/2} = \sigma$$

χ^2 は正規分布 χ^2 故, 以上 = χ^2

$$f(ns^2) d(ns^2) = \gamma_{\sigma} \left(ns^2, \frac{n-1}{2} \right) d(ns^2)$$

$$= \frac{1}{(2\sigma^2)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} (ns^2)^{\frac{n-3}{2}} e^{-\frac{ns^2}{2\sigma^2}} d(ns^2)$$

$$\therefore f(s^2) = \frac{\left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} (s^2)^{\frac{n-3}{2}} e^{-\frac{ns^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \gamma_{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \left(s^2, \frac{n-1}{2} \right)$$

2, 関係の後 = Student, 分布 χ^2 求 t 利用ス
14.

§6. Student, z -分布 及び Fisher, t -分布.

先ッ

$$\left\{ \begin{array}{l} f(w) = \gamma_{\sigma}(w, p) = \frac{1}{(2\sigma^2)^p \Gamma(p)} w^{p-1} e^{-\frac{w}{2\sigma^2}} \\ f(u) = \phi_{\sigma}(u, m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}} \end{array} \right.$$

ナルトキ

$$v = w^{\frac{1}{2}}$$

トシ

$$z = \frac{u-m}{v}$$

ノ分布函数ヲ求メル. Student ノ分布ハコノ特殊ノ場合トシテ含まレルヲアール.

$$c w^{p-1} e^{-\frac{w}{2\sigma^2}} dw = 2c v^{2p-1} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv$$

$$\text{但シ } c = \frac{1}{(2\sigma^2)^p \Gamma(p)}$$

ヨツテ, u 及 v ノ joint distribution ハ

$$c' v^{2p-1} e^{-\frac{(u-m)^2 + v^2}{2\sigma^2}} du dv$$

$$\text{但シ } c' = \frac{2}{\sqrt{2\pi} \sigma (2\sigma^2)^p \Gamma(p)}$$

z 及 v $v = \sqrt{1+z^2}$ 考ヘルハ

$$u-m = zv, \quad du = v dz$$

ナル故

$$= c' v^{2p} e^{-\frac{(1+z^2)v^2}{2\sigma^2}} dz dv$$

ヨツテ, z ノ 分布函数ハ

$$f(z) = c' \int_0^\infty v^{2p} e^{-\frac{(1+z^2)v^2}{2\sigma^2}} dv$$

$$v = \sqrt{2} \sigma (1+z^2)^{-\frac{1}{2}} t$$

ト変換スレバ

$$\begin{aligned} f(z) &= C \int_0^\infty (\sqrt{2} \sigma)^{2p} (1+z^2)^{-\frac{2p}{2}} t^{2p} e^{-t^2} \sqrt{2} \sigma (1+z^2)^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi} \sigma (2\sigma^2)^p \Gamma(p)} (\sqrt{2} \sigma)^{2p+1} (1+z^2)^{-\frac{2p+1}{2}} \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^\infty t^{2(p+\frac{1}{2})-1} e^{-t^2} dt \\ &= \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(p)} (1+z^2)^{-\frac{2p+1}{2}} \\ \therefore f(z) &= \frac{1}{B(p, \frac{1}{2})} (1+z^2)^{-\frac{2p+1}{2}} \end{aligned}$$

サテ Student, z トハ, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 7 母集団 $\phi_\sigma(x, m)$ カラノ n -sample トシ

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}, \quad s^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

トスレトキ

$$z = \frac{\bar{x} - m}{s}$$

デアル, 而シテ

$$f(s^2) = \gamma_{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}(s^2, \frac{n-1}{2}), \quad f(\bar{x}) = \phi_{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}(\bar{x}, m)$$

ナコトカラ, 上ノ結果ヲ用ヒレバ直チニ

$$f(z) = \frac{1}{B(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2})} (1+z^2)^{-\frac{n}{2}}$$

ヲ得.

Fisher, t とハ

$$t = \frac{(\bar{x} - m)(n-1)^{1/2}}{s}$$

ナル故 $Z = (n-1)^{-1/2} t$ ナルコトヲ用ヒテ, Fisher, t -分布トシテ

$$F_n(t) = \frac{1}{(n-1)^{1/2} B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

ヲ得.

§17. ニツノ見本平均ノ差ノ著ルシヤノ判定.

$x_1, \dots, x_{n_1}; y_1, \dots, y_{n_2}$ ナル二組, sample
ガアルトキ, コレラガ共ニ同一母集団 $\phi_\sigma(x, 0)$ カラノ
sample ト考ヘルコトガ出来ルカ否カヲ判定スルノニ,
ツノ見本平均

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_{n_1}}{n_1}, \quad \bar{y} = \frac{y_1 + \dots + y_{n_2}}{n_2}$$

ノ差 $\bar{x} - \bar{y}$ ノ分布ガ問題トナル.

$$f(\bar{x}) = \phi_{\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}}(\bar{x}, 0), \quad f(\bar{y}) = \phi_{\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}}(\bar{y}, 0)$$

ナル故 $\bar{x} - \bar{y}$ ハ標準偏差

$$\left(\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}\right)^{1/2} = \left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}\right)^{1/2} \sigma$$

ヲモツテ正規分布ヲナス。ヨツテ

$$u = \left(\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}\right)^{1/2} (\bar{x} - \bar{y})$$

ハ標準偏差 σ ヲモツテ正規分布ヲナス。即チ

$$f(u) = \phi_{\sigma}(u, 0)$$

モシ、 σ が既知ナラコレデ良イガ、一般ニ σ ハ不明デアアル。

コレヲ切り抜ケレタメ次ノ変換ヲナス。

$$\begin{cases} u_1 = \frac{x_1 + \dots + x_{n_1}}{\sqrt{n_1}} \\ u_2 = c_{21}x_1 + \dots + c_{2n_1}x_{n_1} \\ \vdots \\ u_{n_1} = c_{n_11}x_1 + \dots + c_{n_1n_1}x_{n_1} \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = \frac{y_1 + \dots + y_{n_2}}{\sqrt{n_2}} \\ v_2 = d_{21}y_1 + \dots + d_{2n_2}y_{n_2} \\ \vdots \\ v_{n_2} = d_{n_21}y_1 + \dots + d_{n_2n_2}y_{n_2} \end{cases}$$

コノ係數 c_{ik} , d_{ik} ハ上ガ直交変換ナル如ク定メラルトス。然ルトキ

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1} \sum (x_i - \bar{x})^2, \quad s_2^2 = \frac{1}{n_2} \sum (y_i - \bar{y})^2$$

トオケバ

$$\begin{aligned} w &= n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2 = \sum x_i^2 - n_1 \bar{x}^2 + \sum y_i^2 - n_2 \bar{y}^2 \\ &= \sum u_i^2 - u_1^2 + \sum v_i^2 - v_1^2 \\ &= u_2^2 + \dots + u_{n_1}^2 + v_2^2 + \dots + v_{n_2}^2 \end{aligned}$$

而シテ、前ト同様 u_i , v_i ハ共ニ標準偏差 σ ヲモツテ平均値0ノ周リニ正規分布ヲナシ、且ツ互ニ独立ナル故ニ故ニ
ヨリ

$$f(w) = \gamma_{\sigma} \left(w, \frac{n_1 + n_2 - 2}{2} \right)$$

故 = § 6 より

$$Z = \frac{u}{w^{1/2}} = \left(\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \right)^{1/2} \frac{\bar{y} - \bar{y}}{(n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2)^{1/2}}$$

ナル変量ノ分布函数ハ

$$f(z) = \frac{1}{B\left(\frac{n_1 + n_2 - 2}{2}, \frac{1}{2}\right)} (1 + z^2)^{-\frac{n_1 + n_2 - 2}{2}}$$

トシテ與ヘラレル。