



Title	Locally compact abelian group トソノ character-group ニツイテ
Author(s)	丸山, 滋彌
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 259, p. 576-584
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75087
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1154. Locally compact abelian group Γ
の character-group = Γ^*

丸山 滋 彌 (阪大)

1) van Kampen, *annal. of math.* vol. 36 = γ ル標記ノ論文が稍々尙草ニ過ヤルヲテ、ソノ註釋ノヤウチユトデスガ、以下ニ述ベテ見エス。尙ホ、ユ、"ノート"ハ小生ノ角谷先生ノ下戸ノセミナリイノ原稿デ、先生及ビ安西君カラ色々援助シテ載イテ出来タモノデアリマス。

2) 以下ニ屢々同型定理ヲニツ述ベテ置キマス。

1. G γ topological group H 及ビ N γ ソノ normal subgroup ナリ且 $H \supset N$ トスル。

$$G/H \cong (G/N)/(H/N)$$

2. $G = E \oplus F$ ($\oplus$ は direct sum) トスルハ
 $G/E \cong F$

3) G は locally compact, connected, abelian group トスル。其時 free, discrete デ有限階ノ subgroup H が存在シテ G/H が compact = ナル。

コレノ証明ハ第二頁附屬公理が假定サレテオナイタメ少シ複雑 = ナルガ、結局 Kampen ノト同様ナコトヲ適當 = 改メテ行ハバヨイ。

4) compact abelian group G ハ任意 = 小ナル subgroup H 7 G/H が有限次元 Δ 7 Torus K^{Δ} ト有限群 E トノ直和 $K^{\Delta} \oplus E$ トナルヲウナモノヲ有スル。

コレハ Kampen ノノ極

5) G は locally compact abelian group, G_0 7 ノノ component トスル。若シ G/G_0 が compact ナラ、 G ハ一意 = 定マル最大ノ compact ナ部分群 R 7 有シ、
 $G = T \oplus R$ 。 T ハ有限次元ノ vector 群デアアル。

証明) 3), 4) = ヨリ Kampen ノト同様 = G ハ free, discrete ナ subgroup H ト任意 = 小ナル部分群 D 7 且 $G/(H \oplus D) = K^S \oplus E$ K^S ハ S -次元ノ Torus, E ハ有限群トナル様ナ H, D ガアル。從ツテ Pontrjagin, Topological groups §35, B) ト同様 = シテ $G/D = T' \oplus R'$, T' ハ vector 群, R' ハ compact 群トナル。今 $G \rightarrow G/D$ ナ natural homomorphic mapping 7 f トスルハ、 D ハ compact トシテヨイカラ $R = f^{-1}(R')$ ハ compact デ

且 $\forall G/R = T'$ デアルカヲ $R \wedge G$ / maximal compact
 + 部分群デアル。 $S = f^{-1}(T')$ トオケバ

$$i) S \supset H$$

$$ii) S/H \wedge compact \quad (i), ii) \wedge T' / \text{作り方カヲ判ル}$$

$$iii) [S, R] = G$$

ヲ満足スル。

$\mathcal{F}$ 上ノ $i), ii), iii)$ ヲ満足スル $\mathcal{F}$ + G / 部分群 / 全体トスルバ、 $\mathcal{F}$ が空集合デナイユトが判ツタ。 $\mathcal{F}$, element S, S' ヲ $S \supset S'$ + $\mathcal{R}$ 関係デ順序ヲツケ $\mathcal{F}$ ヲ partially ordered set トスル。 $\mathcal{F}$ / 任意ノ descending chain $\mathcal{F}': S'_1 \supset S'_2 \supset \dots \supset S'_\alpha \supset \dots$ ヲトレバ $S'_0 = \bigcap_{S'_\alpha \in \mathcal{F}'} S'_\alpha =$

判シテ $i), ii)$ / 条件ガ成立スルコトハ明カデアル。 $iii)$ = 關シテモ、ソレハ成立スル。 ソレヲ示スニハ與ヘテ $g \in G$ ト任意ノ $S'_\alpha \in \mathcal{F}' =$ 判シテ $E_\alpha^{(g)}$ ヲ

$$E_\alpha^{(g)} = \{r_\alpha / g = r_\alpha + g'_\alpha, r_\alpha \in R, g'_\alpha \in S'_\alpha\}$$

ト定義スルバ $\{E_\alpha^{(g)} | \alpha\}$ ハ finite intersection property ヲ有シ、且 $\forall E_\alpha^{(g)} \subset R$ デ $E_\alpha^{(g)}$ ハ皆閉集合デアルカヲ

$$r \in \bigcap_{E_\alpha^{(g)}} E_\alpha^{(g)} \subset R$$

ナル r ガアル。 $g - r \in g - E_\alpha^{(g)} \subset S'_\alpha$ ガ任意ノ $S'_\alpha \in \mathcal{F}' =$

對シテ成立スルカラ $g-r \in S_0'$ 即チ $G = [S_0', G]$

故ニ γ ハ極小 + element ヲ有スル。ソノ一ツヲ S_0 トスル
ト S_0/H ハ compact デアルカラ、 S_0 ノ部分群 D_0 デ D_0
ハ任意ニ小サヲ取レテ且ツ $H \cap D_0 = \{0\}$, $S_0/D_0 = T \oplus M$
トナル D_0 ガアル。コノ T ハ有限次元ノ vector 群、 M
ハ compact ナ群デアル。(モウ一度 Pontrjagin, §35
B) ノ方法デ)。 T ノ S_0 ニオケル原像ヲ T_0 トスレバ T_0 ハ
明カニ i), ii) ヲ満足スル。 iii) = 關シテハ D_0 ハ compact
ト假定シテヨイカラ M ノ S_0 ニオケル原像 M_0 ハ compact
デ從ツテ $M_0 \subset R$ 。故ニ

$$[T_0, R] = [T_0, M_0, R] = [S_0, R] = G$$

S_0 ハ極小 + γ ノ element ナルコトヨリ $T_0 = S_0$ 。即チ
 $S_0/D_0 = T_0/D_0 = T$ 。コレハ D_0 ガ S_0 ノ maximal com-
pact ナ部分群デアルコトヲ示シテキル。ソレハ一意的ニ
定マルモノデアルカラ、 D_0 ヲ任意ニ小ナルモノニ取レバ
コトヨリ $D_0 = \{0\}$ 即チ $S_0 = T$ ハ vector 群デ、從ツテ $S_0 \cap R$
 $= \{0\}$, iii) ニヨリ

$$G = T \oplus R$$

6) 構造定理, G ヲ locally compact ナ abel 群
トスレバ $G = T \oplus P$ コノ T ハ vector 群、又 P ハ P/Q
ガ discrete ナ群 + compact 部分群 Q ヲ有スル群
ナ群デアル。

証明) a) G_0 ヲ G ノ component トスレバ G/G_0 ハ
totally disconnected デアルカラアル compact ナ部

命群 H/G_0 がアッテ $(G/G_0)/(H/G_0) = G/H$ が *discrete*
 トトル。ヨッテ H の *component* H_0 は G_0 ト一致スル。
 H/H_0 が *compact* デアルカラ $5) = \exists \forall H = T \oplus R$, T
 は *vector* 群, R は *compact* 群, ヨッテ $G/(T \oplus R) = D$
 は *discrete*.

b) $F \cap G$ をスベテ *compact* + 部分群 R_λ の和集
 合 $F = \bigcup_\lambda R_\lambda$ トスル。 $\bar{F}$ は G の部分群デ $\bar{F} \cap R$ デアル。 H
 は G の開部分群デアルカラ $\bar{F} \cap H \subseteq \overline{F \cap H}$ 又 $F \cap H = (\bigcup_\lambda R_\lambda) \cap H \subseteq \bigcup_\lambda (R_\lambda \cap H)$ H の *maximal compact* + 部分群
 が R デアルカラスベテ, $\lambda = \text{ツイテ}$ $R_\lambda \cap H \subseteq R$. 故 =
 $\bar{F} \cap H \subseteq \overline{F \cap H} \subseteq R$. ヨッテ $T \subseteq H$ ヨリ $\bar{F} \cap T \subseteq \bar{F} \cap H \cap T$
 $\subseteq R \cap T = \{0\}$ 即チ $[T, \bar{F}]$ は直和 $T \oplus \bar{F}$ デアル。 $T \oplus \bar{F}$
 $\supseteq T \oplus R = H$ デアルカラ $T \oplus \bar{F}$ は開イタ部分群即チ $T \oplus \bar{F}$
 は確カ $= G$ の部分群デアル。

c) $F = \bar{F}$ を証明スル。 $G \rightarrow G/(T \oplus R) = D$ と
natural homomorphic mapping を f トスル。 D
 は *discrete* デアルカラ $\overline{f(F)} = f(\bar{F})$. 故 = $f(\bar{F}) \subseteq \overline{f(F)}$
 $= f(\bar{F})$. ヨッテ任意 $a \in \bar{F}$ とル a について $f(a) \in \overline{f(F)}$
 即チ $f(a) = f(b)$, $b \in F$ とル b が存在スル。 F の定義ヨ
 リ $b \in R_\lambda$ とル λ がアルカラ $f(b) \in f(R_\lambda)$ デアルがソノ
 $f(R_\lambda)$ は *compact discrete* 即チ有限群デアル。ヨッ
 テアル整数 n をトルト

$$0 = n f(b) = n f(a) = f(na)$$

即チ $na \in T \oplus R$ ヨッテ $na = t + r$, $t \in T$, $r \in R$ トスル

ト $n \in R \subset \overline{F} + \mathbb{Z}$ 故 $t = na - n \in \overline{F} \cap T = \{0\}$ 故 $= na \in R$.
 ヌレハ $\overline{F}/R$ が infinite order, element
 有 $\times$ スコトヲ示ス。從ツテ任意, $\overline{F}$, element a ヲ取
 ルト a , $\overline{F}/R \sim$, image ハ有限群ヲ生成シ, 群, $\overline{F} \sim$
 ノ原像ハ a ヲ含ム compact + 群デアイル。ヨツテ
 $\overline{F} = \overline{F}$.

d) $G' = G/(T \oplus F)$ ハ finite order, element
 有 $\times + 1$.

何トレバ $G \rightarrow G' + \mathbb{Z}$ natural homomorphic
 mapping 有 $\times$ スルトキ若シテ G , element $g = \frac{1}{m} \cdot t$
 シ $h(g)$ が order m 有テバ $h(m, g) = 0$, $mg \in T \oplus F$.

$$mg = t + f, \quad t \in T, \quad f \in F$$

トスレバ $\frac{1}{m} \cdot t \in T$ デアルカラ $d = g - \frac{1}{m} \cdot t = \frac{1}{m} \cdot f$
 $md \in F$ c) = ヨリ $\overline{F}/R$ が finite order, element
 カリデアイルカラ適当 + 整数 n 有 $\times$ スレバ $nmd \in R$. ヨツテ
 $d \in R$ トカラ生成サレル群ハ compact トイル。從ツテ
 レハ $\overline{F} = \text{含マレルカラ}$ $d \in F$. 即チ $g = \frac{1}{m} \cdot t \in T$ トナリ始
 メカラ $h(g) = 0$ デアル。

e) $G'' = G/F$ トスレバ G'' ハ T ト同型 + 群 T' 有 $\times$
 $G''/T' = G'$ デアル。 G' ハ d) = ヨリ finite order, element
 有 $\times + 1$ カラ G' ノ中 = $\{S'_\alpha | \alpha\}$ + ル集合ヲ作ツテ任意,
 $g' \in G' + \mathbb{Z}$ element 有 $\times$ タトキ唯一通り = k, k_{α_i}
 $i = 1, 2, \dots, n$ + ル有限ケノ 0 デ + 整数が定マツテ

$$k \cdot g' = \sum_{i=1}^n k_{\alpha_i} S'_{\alpha_i}$$

この逆写像 = スルコトが出来ル。 $G'' \rightarrow G'$ は *natural homomorphic mapping* γ により $\gamma^{-1}(S'_\alpha)$ / 中 = 任意 / element S''_α を取ル。 $g'' \in G$, $g'' \in \gamma^{-1}(g')$ となる

$$k \cdot g'' = \sum_{i=1}^n k_{\alpha_i} S''_{\alpha_i} \in T'$$

だから $t'' \in T'$ 適當 = トスル $k t'' = k g'' = \sum_{i=1}^n k_{\alpha_i} S''_{\alpha_i}$

よ、 $t'' =$ 對して $g''_0 = g'' - t''$ トスル $g''_0 \in \gamma^{-1}(g')$ 且つ $k g''_0 = \sum_{i=1}^n k_{\alpha_i} S''_{\alpha_i}$

よ、 $k g' = \sum_{i=1}^n k_{\alpha_i} S'_{\alpha_i}$ トル關係 = 對して必ず g' / 原像 / 中 = $k g'' = \sum_{i=1}^n k_{\alpha_i} S''_{\alpha_i}$ なる關係ヲ満足スル g'' がアル。 g' は G' 全体 = 互にセルトヲ現ハレルカナル g'' / 全体ヲ E' トスル $E' \cong G'$ (G' は *discrete* だから) 且つ $G'' = T' \oplus E'$ 群 $E' \subset G'' = G/F$ / G へ / 原像ヲ P トスル $P \cap T = F \cap T = \{0\}$ だから $G = P \oplus T$, $P = G/T$ なる故 Q は R / P へ / 像トスル Q は *compact* であり $P/Q = (G/T)/Q = G/(T \oplus R) = D$ は *discrete*.

7) G は *locally compact abel* 群トスル。若しアル *compact* な部分群 B があって $G/B = D$ が *discrete* ならば $G =$ 對しての *duality theorem* が成立スル。

a) G^{**} は G / character group G^* / character group トスル。 G^{**} は [topology + 逆像 考へる時] G へ部分群トして含ム。即ち任意 / $0 \neq g \in G =$ 對して $g^* \in G^*$ が存在して $(g^*, g) \neq 0$ である。何とすれば $g \in B$ ならば *compact* 群 / 双對定理 = 有り $g'^* \in B^*$ が存

在シテ $(g'^*, g) \neq 0$ デアル。

$G/B = D$ が *discrete* デアルカラ $g'^* \notin G$ 全体へ拡張スルコトが出来ル。(Kampen Lemma 2) ヲ、拡張ノ一ツヲ g^* トスレバ $(g^*, g) \neq 0$ 。又 $g \notin B$ ナラバ $g \notin G/B = D = \text{オケル像 } \bar{g} \text{ の } \bar{Q} \text{ デ } +1$ 。故ニ $D^* \ni \bar{g}^* + \text{ル } \bar{g}^*$ がアツテ $(\bar{g}^*, \bar{g}) \neq 0$ 。然レ $= \bar{g}^* \in G^*$, element g^* ト考ヘテレルカラ $(g^*, g) \neq 0$ 。

b) $B^* = G^*/(G^*, B)$ コレが代数的ニ (位相ヲ考ヘズニ) 成立スルコトハ明カ。今エヲ充分小ニトリ G^* ノ近傍 V^* ヲ

$$V^* = \{g^*/g^* \in G^* \mid |(g^*, B)| < \varepsilon\}$$

ト定義スレバ $V^* = (G^*, B)$ トナル。ヨツテ $B^* \subseteq G^*/(G^*, B)$ ニ *discrete* ナ位相ヲ有スルカラ位相群トシテモ成立スル。

c) $D^* = (G/B)^* = (G^*, B)$ コレモ代数的ニハ明カデアル。位相が一致スルコトハ D^* が *compact* デアルカラ上ノ D^* カラ (G^*, B) へ、對應が連続ナラベヨイ。今 $\bar{g}^* \in (G/B)^*$ が定義スル (G^*, B) ノ element ヲ g^* トスレバ $\bar{g}^* \rightarrow g^*$ が上ノ對應デアル。 G^* ノ近傍 V^* がアル G ノ *compact* ナ集合 C ト正數 ε トデ

$$V^* = \{g^*/g^* \in G^*, \mid |(g^*, C)| < \varepsilon\}$$

デ與ヘテレルキルトキ, $C \subset G/B$ へ、像ハ *compact*, *discrete* ナル故有限集合 $\{\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_m\}$ デアル。ヨツテ D^* ノ近傍

$$\{\bar{g}^*/\bar{g}^* \in D^*, |(\bar{g}^*, c_i)| < \varepsilon\}$$

、中 = アル D^* 、element $\bar{g}^*$ 、 $V^*(G^*, B)$ 内、 $g^* =$ 対応スル。ユレデ対応、連続性が示サレタ。

d) $b(x, c) = \exists$ リ $B^* = G^*/(G^*, B) = G^*/D^*$ B^* は discrete, D^* は compact 故カラ 再び $D^{**} = G^{**}/B^{**}$ $D^{**} = D$, $B^{**} = B$ デアルカラ $D = G^{**}/B = G/B$

然ルニ a) = $\exists$ リ代数的 $\Rightarrow G^{**} \supset G$ 。コレヨリ $G^{**} = G$ が代数的 = 成立スル。何トトレバ $g^{**} \in G^{**}$ 、 $D \sim$ 、像ハアル $g \in G$ 、 $D \sim$ 、像ト一致スル。ヨツテ $g^{**} \in g + B \subset G$ 。

最後 = B ハ G 及ビ G^{**} 両方、開イタ部分群デアアル。ヨツテ G, G^{**} 、位相ハ単位元、近傍デ、從ツテ全体デ一致シテ并ル。

8) 双対定理。 G は locally compact + abel 群トスルトキ G 、character 群、character 群 G^{**} ハ G ト topologically isomorph デアル。

証明) 構造定理 b) = $\exists$ リ $G = T \oplus P$ + ν 型ヲ有スル。

7) = $\exists$ リ $P^{**} = P$ 。又 $T^{**} = T$ ハ明カデアアルカラ

$$G^{**} = T^{**} \oplus P^{**} = T \oplus P = G$$