OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Inseparabelナ体ノ Arithmetik ニ関スル一注意
Author(s)	東屋, 五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1943, 259, p. 597-600
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75089
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

1156. inseparabel 十体ノ Arithmetik ニ関スル一注意

恵屋　五郎（名大）

浅野、中山両先生ハ学士院記事 16 巻（1940），「a Remark on the Arithmetic in a subfield」ニ於テ

K ガ整閉整域 $\mathfrak{O}$ ノ商体，k ガ K ニ対シテ有限次ナル K ノ部分体トスルトキ，$\mathfrak{o}=\mathfrak{O}\cap k$ ナル整域ニテ gewöhnliche arithmetik ノ成立ツタメノ條件ヲ求メテ居ラレマスガ、K/k ガ rein inseparabel デ、且ツ Exponent ガ有限ナラバ、同様ノコトガ成立ツコトニ関シテ簡単ナ注意ヲ述ベマス。

K, $\mathfrak{O}$ ヲ上記ノ意味トシ、k ヲ K/k ガ Exponent p^e ノ rein inseparabel ナ部分体トスル（勿論 $p\neq 0$ ハ K ノ Charakteristik）。K ノ元ノ p^e 乗ノ全体ヲ $K^{(p^e)}$ ニテ表ハス（以下 $\mathfrak{O}^{(p^e)}$ 等モ同様ノ意味ヲ表ハス）ナラバ、$K^{(p^e)}\subseteqq k\subseteqq K$ デアル。

$\mathfrak{o}=\mathfrak{O}\cap k$ トオケバ，$\mathfrak{o}$ ハ明ラカニ整閉整域デアルガ、k ガソノ商体トナッテヰル。何トナレバ $\alpha\in k$ ヲ任意ニトルトキ、$a\alpha\in\mathfrak{O}$ ナル $a(\neq 0)\in\mathfrak{O}$ ガアルガ $a^{p^e}\in\mathfrak{O}\cap k=\mathfrak{o}$, $a\alpha^{p^e}\in\mathfrak{O}\cap k=\mathfrak{o}$ トナル故デアル。

更ニ、$\mathfrak{O}^{(p^e)}\subseteqq\mathfrak{O}\cap k=\mathfrak{o}$ ナル故 $\mathfrak{O}$ ノ元ハスベテ $\mathfrak{o}$-ganz デアルガ、勿論 $\mathfrak{O}$ ガ整閉ナルコトカラ $\mathfrak{o}$-ganz ナ K ノ元全

体が$\mathfrak{O}$ニ一致スルコトが分ル。

逆ニ、oヲkヲ商体トスル任意ノ整閉整域トシ、$\mathfrak{O}$ヲKノo-ganz ナル全体トスレバ、$\mathfrak{O}$ハKヲ商体トスル整閉整域デ$o=\mathfrak{O}\cap k$ガ成立ツ。

即チ、Kヲ商体トスル整閉整域$\mathfrak{O}$トkヲ商体トスル整閉整域oトガ一対一ニ対応スル。

(ソノ時、更ニ全整閉(vollständig ganz-abgeschlossen)ナ整域同志ガ対応スル。何トナレバ、$\mathfrak{O}$が全整閉ナラ，$\mathfrak{O}$モサウデアルコトハ明ラカデアルガ、逆ニ$\mathfrak{O}$デ全整閉ト仮定シ、$\lambda\alpha^{\nu}\in\mathfrak{O}$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$, $\lambda(\neq 0)\in K$, $\alpha\in K$トスレバ $\lambda^{p^e}\alpha^{p^e\nu}\in\mathfrak{O}^{(p^e)}\subseteq\mathfrak{O}$, $\lambda^{p^e}(\neq 0)\in k$, $\alpha^{p^e}\in k$ナル故、$\alpha^{p^e}\in o$ 従ッテ $\alpha\in\mathfrak{O}$トナルコトが分ル)

定理. <u>$\mathfrak{O}$, oヲ上ノ如キ意味トスレバ，$\mathfrak{O}$ニ於テ gewöhnliche Arithmetik ノ成立ツタメノ必要且十分ナ条件ハoニ於テ．ソレが成立ツコトデアル。</u>

証明. 先ヅ必要ナルコトハ、上記論文ノ証明ヲ少シ擴張スレバヨイノデスが，念ノタメ述ベテミマストαヲ任意ノo-Ideal トスル．$\alpha\mathfrak{O}$ナル$\mathfrak{O}$-Ideal ノ逆Ideal ヲ$(\alpha\mathfrak{O})^{-1}$トセバ $\alpha(\alpha\mathfrak{O})^{-1}=\alpha\mathfrak{O}(\alpha\mathfrak{O})^{-1}=\mathfrak{O}$.

$\mathfrak{P}$ヲ任意ノ$\mathfrak{O}$ノPrimideal トシ、ソノBewertungsring ヲ$\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$トシ，$o_{\mathfrak{P}}=\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}\cap k$トオケバ，$o_{\mathfrak{P}}$ハ$\mathfrak{P}$が$k$ニ於テ引起ス Bewertung ノ Bewertungsring デアルが、$\alpha\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ナル$o_{\mathfrak{P}}$-Ideal ノ逆Idealヲ$(\alpha\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}})^{-1}$ニテ表ハセバ $\alpha(\alpha\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}})^{-1}=\alpha\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}(\alpha\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}})^{-1}=\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$

シカラバ $(\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1} \subseteq (\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}} = (\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1}\mathfrak{a}(\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-1} = (\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-1}\mathfrak{O} \subseteq (\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-1}\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ ナル故

$$\left[(\mathfrak{a}\mathfrak{O}^{-1}\right]^{(p^e)} \subseteq (\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-p^e}\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}} \cap k = (\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-p^e};$$

$$\left[(\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1}\right]^{(p^e)} \subseteq \bigcap_{\mathfrak{P}} (\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-p^e}$$

従ッテ

$$\mathfrak{O}^{(p^e)} = \mathfrak{a}^{(p^e)}\left[(\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1}\right]^{(p^e)} \subseteq \mathfrak{a}^{p^e}\left[\bigcap_{\mathfrak{P}} (\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-p^e}\right]$$

$$\subseteq \bigcap_{\mathfrak{P}} \mathfrak{a}^{p^e}(\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-p^e} = \bigcap_{\mathfrak{P}} \mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$$

$$= \bigcap_{\mathfrak{P}} \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}} \cap k = \mathfrak{O} \cap k = \mathfrak{o}$$

トナルガ $\mathfrak{O}^{(p^e)}$ ヲ / ナル故 $\mathfrak{a}^{p^e}\left[\bigcap_{\mathfrak{P}} (\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-p^e}\right] = \mathfrak{o}$. 即チ $\mathfrak{a}$ ガ逆 Ideal $\mathfrak{a}^{p^e-1}\left[\bigcap_{\mathfrak{P}} (\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-p^e}\right]$ ヲ有スルコトガ分ル。

逆ニ十分條件ナルコトノ証明ハ、今証明シタ必要條件ヲ使ッテ簡単ニ出来マス。

即チ、$\mathfrak{O}$ ニ於テ Arithmetik ガ成立ツト假定スル。$\mathfrak{O}$ 従ッテ $\mathfrak{O}$ ニ同型ナ $\mathfrak{O}^{(p^e)}$ ハ基關デ且ツ $\mathfrak{O}$ ハ K ノ $\mathfrak{O}^{(p^e)}$ ニ對スル Hauptordnung デアルカラ、$\mathfrak{O}^{(p^e)} = \mathfrak{O} \cap K^{(p^e)} = \mathfrak{O} \cap k \cap K^{(p^e)} = \mathfrak{O} \cap K^{(p^e)}$. 而シテ $k/K^{(p^e)}$ ハ Exponent ガ高々 p^e ナル rein inseparabel ナ体ナル故ニ、上ノ必要條件ニヨリ $\mathfrak{O}^{(p^e)}$, 従ッテ $\mathfrak{O}^{(p^e)}$ ニ同型ナ $\mathfrak{O}$ ニ於テ gewöhnliche Arithmetik ノ成立ツコトガ分ル。

コノ定理ヲ使ヒマスト、有名ナ「<u>k ガ整域 $\mathfrak{o}$ ノ商体デ K ヲ k ノ任意ノ有限次擴大体トシ、$\mathfrak{O}$ ヲ K ノ $\mathfrak{o}$ ニ對スル Hauptordnung トスルトキ、若シ $\mathfrak{O}$ ニ於テ gewöhnliche</u>

Arithmetik が成立ツナラバ、$\mathfrak{O}$ ニ於テモソレガ成立ツ」トイフコトノ一証明ヲ得ラレマス。

即チ、K_0 ヲ K/k ノ größter separabel Unterkörper トスレバ K_0 ノ $\mathfrak{o}$ ニ對スル Hauptordnung $\mathfrak{O}_0$ ハ通常ノ如ク endliche $\mathfrak{o}$-Modul トルコトヨリ、$\mathfrak{O}_0$ ニ於テ gewöhnliche Arithmetik ノ成立ツコトヲ証明スルトシテ、$K|K_0$ ガ有限次，rein inseparabel トルコトカラ定理ニヨリ $\mathfrak{O}_0$ ニ對スル Hauptordnung $\mathfrak{O}$ ニ於テモ成立ツワケデアリマス。